Učitel matematiky

Emil Calda

Limita posloupnosti a věta o sevření

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 4, 216–220

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149556`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2012

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

LIMITA POSLOUPNOSTI A VĚTA O SEVŘENÍ

EMIL CALDA

Ve středoškolském učivu o posloupnostech se tradičně probírají věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou posloupností. V učebnici [1] v článku nazvaném *Věty o limitách posloupností* je v jedné z úloh k procvičení uvedena věta, která ustálený rámec tohoto tématu poněkud překračuje; říká se jí *Věta o sevření* nebo také *Věta o dvou policajtech*, kteréžto označení je poněkud slangové. V následujícím textu se s toutο větou seznámíme blíže – kromě jejího důkazu, který je v uvedené úloze požadován, si ukážeme i její použití k určení limit některých posloupností. Ve všech případech přitom půjde o limity pro n jdoucí do nekonečna, takže v zápisech typu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ budeme $n \to \infty$ vynechávat.

Věta o sevření:
Jestliže posloupnosti (u_n) a (v_n) jsou konvergentní, přičemž $\lim u_n = \lim v_n = L$, a existuje-li přirozené číslo n_1 tak, že pro všechna přirozená $n > n_1$ je $u_n \le a_n \le v_n$, potom existuje i $\lim a_n$ a platí $\lim a_n = L$.

Důkaz této věty je poměrně snadný. Protože $\lim u_n = \lim v_n = L$, existují k libovolně zvolenému kladnému číslu ε přirozená čísla n_2, n_3 tak, že platí:

$$L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon \qquad \text{pro všechna přirozená } n > n_2,$$
$$L - \varepsilon < v_n < L + \varepsilon \qquad \text{pro všechna přirozená } n > n_3$$

Je-li n_0 největší z čísel n_1, n_2, n_3, potom pro všechna $n > n_0$ platí:

$$L - \varepsilon < u_n \le a_n \le v_n < L + \varepsilon,$$

takže je

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

což znamená, že je $\lim a_n = L$.

Poznámka. V učebnici [1] se v této větě předpokládá, že je $u_n \leq$ $\leq a_n \leq v_n$ pro všechna přirozená čísla n; je však zřejmé, že stačí, když tyto nerovnosti platí „od jistého indexu počínaje“.

Užitím věty o sevření **určíme limitu posloupnosti** (a_n) **s n-tým členem** $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Naším úkolem je nalézt konvergentní posloupnosti (u_n) a (v_n), pro jejichž členy od jistého indexu počínaje platí $u_n \leq \dfrac{n!}{n^n} \leq v_n$, a dále je $\lim u_n = \lim v_n = L$. Úpravou výrazu $\dfrac{n!}{n^n}$ zjistíme, že pro všechna přirozená čísla n platí:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} =$$
$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

takže pro všechna přirozená n je:

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Posloupnost (a_n) je tedy sevřena mezi posloupnost (u_n) s n-tým členem $u_n = 0$ a posloupnost (v_n) s n-tým členem $v_n = \dfrac{1}{n}$, a protože platí $\lim u_n = \lim v_n = 0$, plyne odtud

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Podobným způsobem **určíme limitu posloupnosti** (b_n) **s n-tým členem** $b_n = \dfrac{(n\,!)^2}{(2n)\,!}$.

Pro všechna přirozená čísla n je:

$$\frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!} =$$

$$= \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)\cdot[(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot \ldots \cdot 2n)]} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}\cdot\frac{3}{n+3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$$

takže pro tato čísla n platí:

$$0 \leq \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!} \leq \frac{1}{n+1}$$

A protože limity posloupností (u_n) s n-tým členem $u_n = 0$ a (v_n) s n-tým členem $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ jsou rovny nule, pro limitu posloupnosti (b_n) platí:

$$\lim \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!} = 0.$$

V následujícím důležitém příkladu **dokážeme, že limita posloupnosti** (c_n) **s n-tým členem** $c_n = \sqrt[n]{n}$**, je rovna jedné.**

K tomu, abychom dokázali, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, ukážeme, že pro všechna $n > 2$ platí

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}};$$

v tomto případě má totiž posloupnost (u_n) s n-tým členem $u_n = 0$ i posloupnost (v_n) s n-tým členem $v_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ limitu rovnou nule, takže je také $\lim\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$, a tedy $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Využijeme toho, že pro všechna $n > 2$ je $\sqrt[n]{n} > 1$ neboli $\sqrt[n]{n} - 1 > 0$, a zavedeme označení $r = \sqrt[n]{n} - 1$, takže je $r > 0$ a $(r+1)^n = n$.

Z binomické věty

$$n = 1 + nr + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r^2 + \cdots + r^n$$

dostaneme

$$n > \frac{n \cdot (n-1) \cdot r^2}{2}$$

neboli

$$r^2 < \frac{2}{n-1}.$$

Protože pro všechna $n > 2$ je

$$2 \cdot (n-1) > n$$

neboli

$$\frac{2}{n} > \frac{1}{n-1}$$

a tedy

$$\frac{4}{n} > \frac{2}{n-1},$$

platí

$$r^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{4}{n},$$

což znamená, že pro $n > 2$ je

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Jak bylo řečeno výše, tyto nerovnosti znamenají, že pro limitu posloupnosti (c_n) platí:

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Z předcházejících řádků je – jak doufám – vidět, že věta o sevření by na střední škole mohla rozšířit spektrum příkladů na určování limit posloupností; netvrdím ovšem, že by měla být do povinného učiva zařazena.

Literatura

[1] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, Prometheus, Praha, 1996

[2] Jarník, V., *Úvod do počtu diferenciálního*, nakladatelství ČSAV, Praha, 1953

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz