František Kuřina

Číslo pět jako inspirace

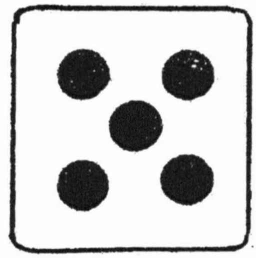
*Učitel matematiky*, Vol. 20 (2012), No. 3, 135–148

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149549`

# ČÍSLO PĚT JAKO INSPIRACE

FRANTIŠEK KUŘINA

Nadpisem tohoto příspěvku chci připomenout, že jde o volné pokračování článku *Laťkový plot jako inspirace* ([1]). Oba příspěvky jsou částí zamyšlení nad matematikou a kulturou. Vyslovíme-li slovo **pět** (anglicky *five*, německy „fünf", francozsky „cinq", rusky „пjать", latinsky „quinque", řecky „pénto",...), vybaví se nám patrně skupina pěti teček na hrací kostce (obr. 1) a spojení typu: *pětidenní pracovní týden, páté kolo u vozu, pět smyslů (sluch, zrak, čich, chuť, hmat), volání křepelky o žních: Pět peněz, pět peněz, ..., mít všech pět pohromadě (rozum, představivost, fantazie, odhad, paměť), koupit něco za pět prstů....*



Obr. 1

Literárně založený čtenář si možná vybaví Poláčkovu knihu *Bylo nás pět*, či Vonnegutovu zprávu o zkáze Drážďan *Jatka č. 5*, půvabnou knihu o rozvoji dětské řeči ruského básníka Čukovského *Od dvou do pěti*, klasicky orientovaní čtenáři si vzpomenou na významné pentalogie české literatury, např. Jiráskova *F. L. Věka*, Holečkovu jihočeskou kroniku *Naši* nebo pražskou Neffovu ságu. Učitelé si vzpomenou na některou ze školních perliček, třeba $5 \cdot 0 = 0$, *protože pětkrát si nemůžu vzít vůbec nic. Jedna polovina z pěti je dvě a druhá tři. Dnes jsem připravený na všechno. I na pětku* [2].

# 1. Číslo pět a matematika

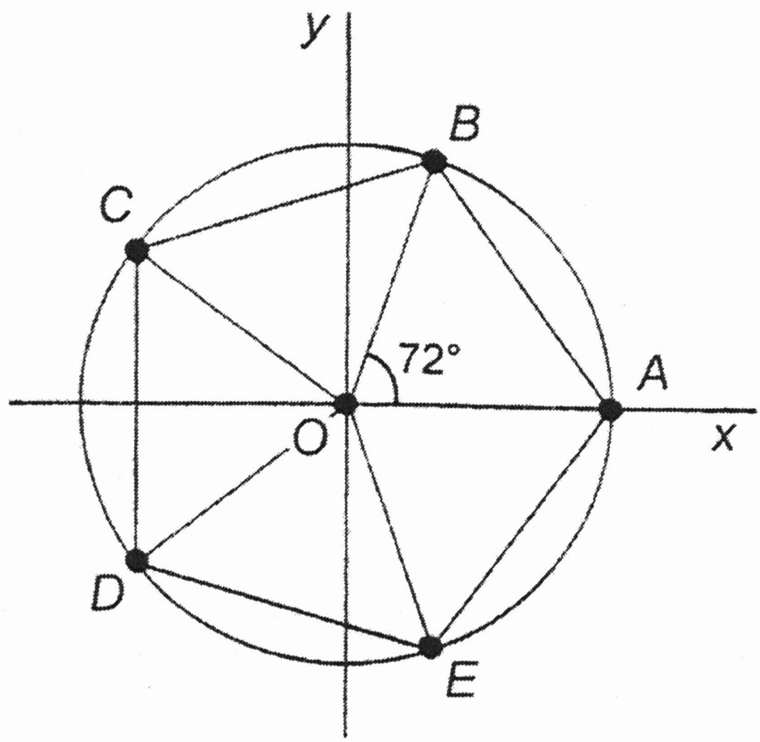
Binomická rovnice

$$x^5 = 1$$

má, jak známo, právě 5 kořenů

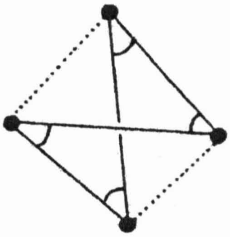
$$\mathsf{K} = \{1;\ \cos 72^\circ + \mathrm{i}\sin 72^\circ;\ \cos 144^\circ + \mathrm{i}\sin 144^\circ;\\ \cos 216^\circ + \mathrm{i}\sin 216^\circ;\ \cos 288^\circ + \mathrm{i}\sin 288^\circ\}\,.$$

Znázorníme-li tato čísla v Gaussově rovině, dostaneme vrcholy pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ (obr. 2).

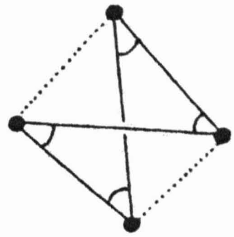



Obr. 2

Připomeňme při této příležitosti, že pojem pravidelný $n$-úhelník můžeme chápat i obecněji než jak je to obvyklé ve školské matematice ([3], s. 43), totiž jako uzavřenou lomenou čáru složenou z $n$ shodných úseček takových, že každé dvě sousední svírají stejný úhel. Takto chápaný $n$-úhelník nemusí ležet v rovině.

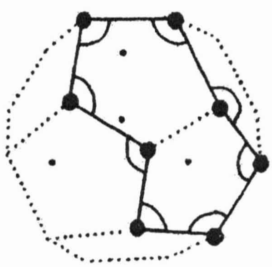


Obr. 3

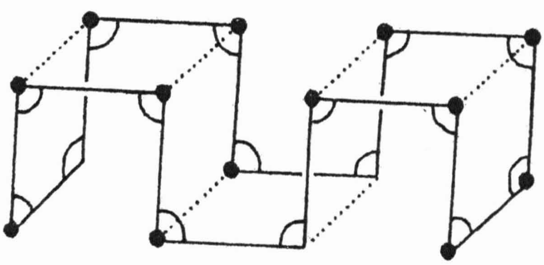


Obr. 4

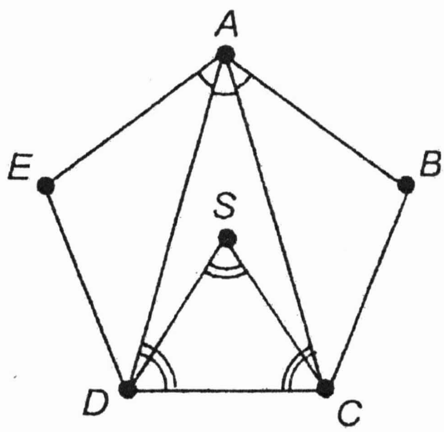
Rovnostranný trojúhelník přirozeně v rovině ležet musí, ale např. pro $n = 4, 6, 8$ mohou existovat podle obr. 3, 4, 5 pravidelné $n$-úhelníky, které nejsou částí žádné roviny. Můžeme je získat např. „odoperováním“ od pravidelných mnohostěnů, ale i jinými konstrukcemi. Na obr. 6 je sestrojen např. pravidelný šestnáctiúhelník. Překvapivý výsledek, že každý pravidelný pětiúhelník je rovinný, objevili v r. 1969 chemici při zkoumání molekulárních struktur. Doložili tak nečekanou souvislost mezi elementární geometrií a chemií.



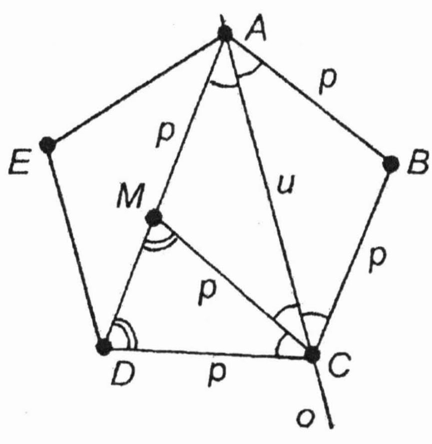
Obr. 5



Obr. 6




Obr. 7




Obr. 8

Připomeňme si známé vlastnosti pravidelného pětiúhelníku. Protože úhly vyznačené na obr. 7 a 8 jedním obloučkem jsou shodné a mají velikost 36° a úhly vyznačené dvěma obloučky mají velikost 72°, přejde v osové souměrnosti s osou $o = AC$ trojúhelník $ABC$ do trojúhelníku $AMC$, kde $M$ leží na úhlopříčce $AD$ (obr. 8). Trojúhelník $ADC$ je podobný trojúhelníku $CDM$ a platí (označíme-li velikost strany pětiúhelníku $p$ a velikost jeho úhlopříčky $u$):

$$\frac{p}{u} = \frac{u-p}{p} \tag{1}$$

neboli

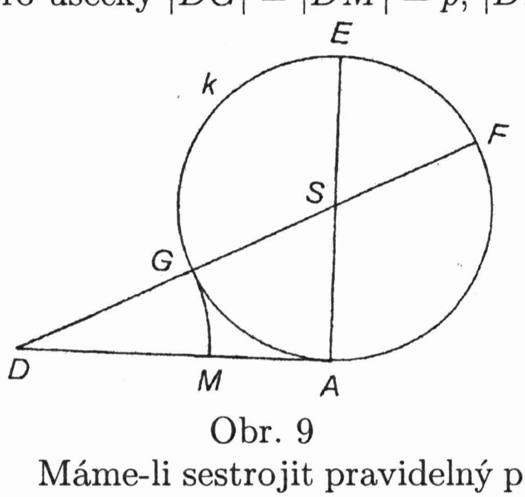
$$u^2 = p \cdot (p+u). \tag{2}$$

Protože $u - p < p$ (v trojúhelníku $DCM$ leží proti menšímu úhlu menší strana), můžeme poměr (1) interpretovat takto:

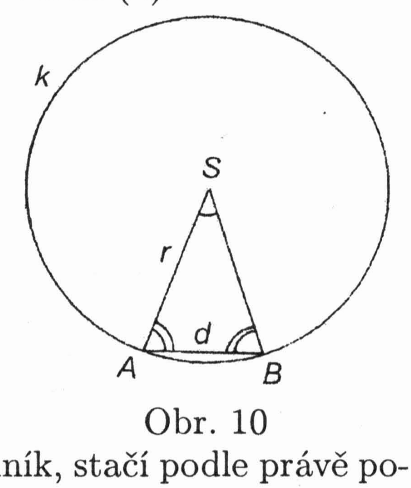
*větší díl úhlopříčky má se ku celé úhlopříčce jako její menší díl ku většímu.*

Takovémuto dělení úsečky se říká *dělení v poměru zlatého řezu.*

Rozdělit úsečku $u = DA$ v poměru zlatého řezu můžeme např. pomocí konstrukce na obr. 9, kde $DAE$ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s odvěsnami délky $u$, $k$ je kružnice s průměrem $u$. Podle věty o mocnosti bodu $D$ ke kružnici $k$ totiž platí pro úsečky $|DG| = |DM| = p$, $|DA| = u$ vztah (2).




Obr. 9




Obr. 10

Máme-li sestrojit pravidelný pětiúhelník, stačí podle právě popsané konstrukce sestrojit k úsečce velikosti $u$ úsečku velikosti $p$. Pak můžeme sestrojit trojúhelník $DCA$ a zbývající vrcholy $E$,

$B$. Tuto konstrukci uvádí Euklides ve svých *Základech*. Je to konstrukce výhodná, neboť ji můžeme použít, je-li dán libovolný „lineární" element pravidelného pětiúhelníku (strana, úhlopříčka, poloměr kružnice opsané, vepsané, ...). Stačí popsanou konstrukci vhodně zvětšit nebo zmenšit.

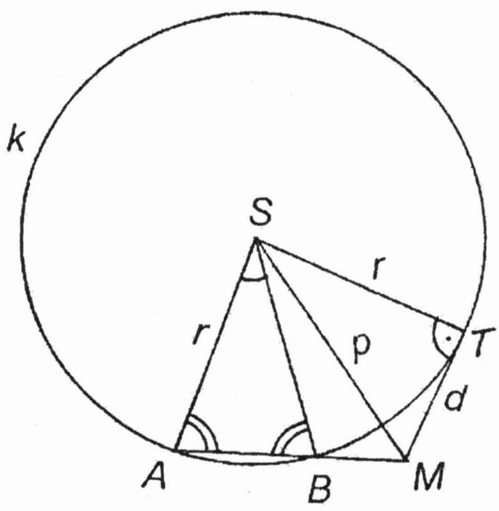
Protože v pravidelném desetiúhelníku je trojúhelník $ABS$ na obr. 10 podobný trojúhelníku $DCA$ na obr. 8, platí: strana $d$ pravidelného desetiúhelníku je větším dílem poloměru $r$ kružnice desetiúhelníku opsané rozděleného zlatým řezem.

Je tedy

$$r^2 = d \cdot (d + r) \tag{3}$$

neboli

$$r \cdot (r - d) = d^2 \tag{4}$$




Obr. 11

Z obr. 11 můžeme určit souvislost mezi délkou $r$ strany pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru $r$, délkou $p$ strany pravidelného pětiúhelníku a délkou $d$ strany pravidelného desetiúhelníku, které jsou rovněž této kružnici vepsány. Sestrojíme-li na prodloužení strany $AB$ pravidelného desetiúhelníku bod $M$ tak, že $|AM| = r$, je $|SM| = p$ délka strany pravidelného pětiúhelníku. Protože mocnost bodu $M$ ke kružnici $k$

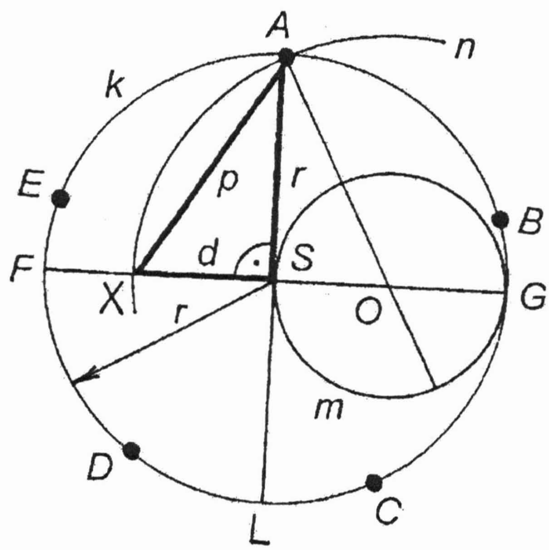
můžeme vyjádřit jako součin $r \cdot (r - d)$ a tento součin je podle (4) roven $d^2$, je $d = |MT|$ délka tečny sestrojené z bodu $M$ ke kružnici $k$. Hledaná souvislost je tedy vyjádřena Pythagorovou větou pro trojúhelník $STM$:

$$p^2 = d^2 + r^2 \tag{5}$$

Délku $p$ strany pravidelného pětiúhelníku a délky $d$ strany pravidelného desetiúhelníku, které jsou vepsány do kružnice $k(S, r)$ můžeme určit takto (obr. 12):

V kružnici $k$ sestrojíme k sobě kolmé průměry $AL$, $GF$, střed $O$ úsečky $SG$ a soustředné kružnice $m\left(O; \frac{1}{2}r\right)$, $n(O, |OA|)$. Podle věty o mocnosti bodu $A$ ke kružnici $m$ platí (3).

Označíme-li $X$ průsečík kružnice $n$ s průměrem $GF$, je podle (5) $|AX| = p$, $|XS| = d$.

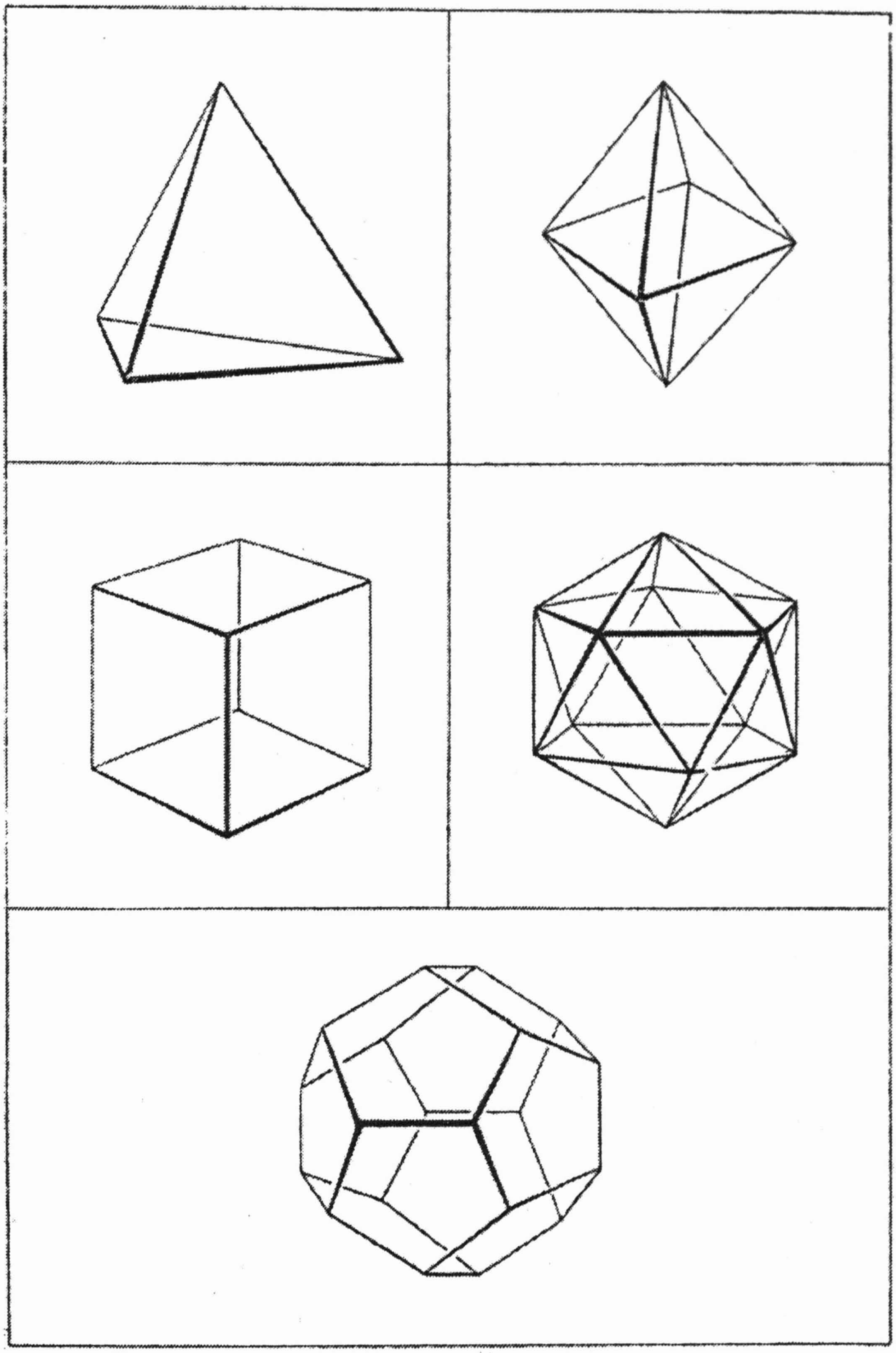



Obr. 12

Pěknou historicky fundovanou monografii o pravidelném pětiúhelníku (patrně jedinou v Čechách – nebo snad na světě?) vydal *Jiří Fabián* [4].

V několika matematických větách hraje číslo 5 významnou roli. Uveďme aspoň čtyři příklady.

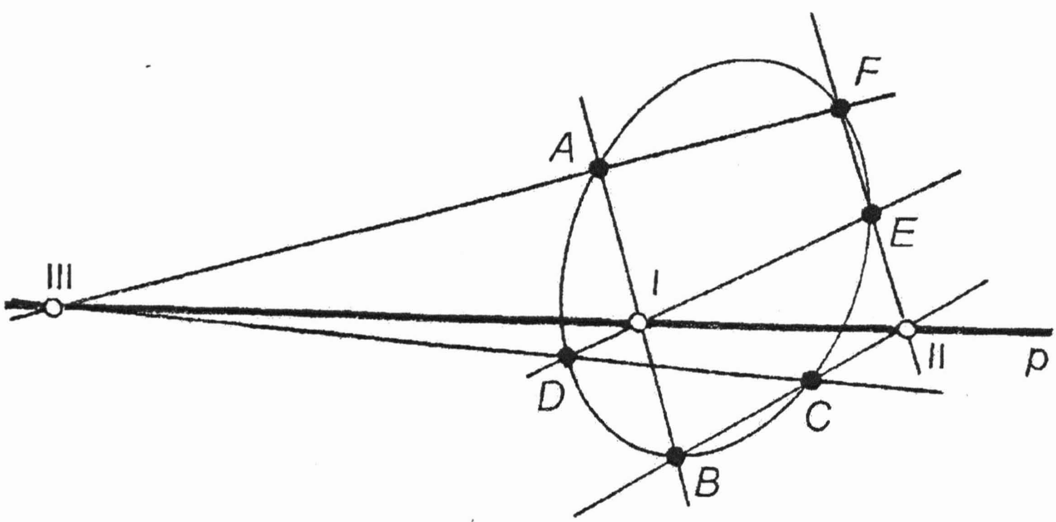
*Existuje právě pět typů pravidelných mnohostěnů* (čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn, obr. 13). Jsou to tzv. *Platónova tělesa.*



Obr. 13

*Existuje právě pět druhů shodných zobrazení roviny (identita, posunutí, rotace, osová souměrnost a posunutá souměrnost).* Důkaz této věty lze nalézt např. v knize [5].
Pomocí analytické geometrie snadno nahlédneme, že platí: *Kuželosečka je určena libovolnými pěti různými body roviny.*

S touto větou je spjata jedna z nejkrásnějších pouček elementární geometrie, věta Pascalova: *Šest bodů $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ leží na kuželosečce, právě když průsečíky přímek $AB$ a $ED$, $BC$ a $FE$, $CD$ a $AF$ leží v přímce* (obr. 14). Důkaz této věty lze najít např. v knize [6]. Objevil ji r. 1640 šestnáctiletý genius Blais Pascal (1623–1662).




Obr. 14

Poslední výsledek, který uvedeme, našel jiný genius, dvaadvacetiletý Niels Abel (1802–1829): *Obecná algebraická rovnice stupně aspoň pátého není algebraicky řešitelná.*

Na závěr této části připomeňme dvě drobnosti: Sečteme-li prvních $n$ členů aritmetické posloupnosti s prvním členem 1 a diferencí 3, dostaneme $n$-té tzv. pětiúhelníkové číslo. K aritmetické posloupnosti

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

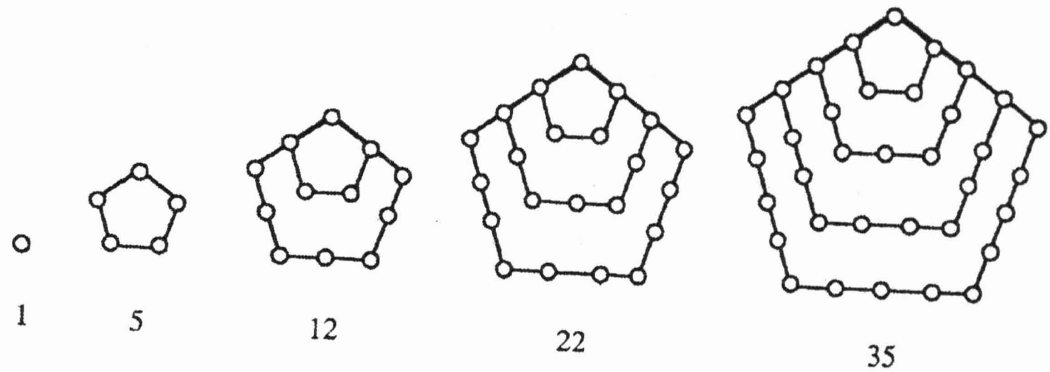
tak sestrojíme posloupnost pětiúhelníkových čísel

$$1, 5, 12, 22, 35, \ldots \tag{6}$$

Tato čísla můžeme znázornit např. schématem na obr. 15. Dostáváme tak pěkné geometrické znázornění posloupnosti (6).

Tzv. polygonální čísla byla předmětem řecké matematiky asi v 6. století př. Kr., v níž abstraktní svět čísel byl ztotožněn s reálným světem „kaménků“, pomocí nichž se tehdy počítalo.

Kdybychom měli na levé ruce 2 prsty, na pravé 3, počítali bychom patrně v pětkové soustavě. Takže letošní rok by měl letopočet 31 022, a letopočet 2012 by měla tato civilizace v roce 257 podle naší soustavy.




Obr. 15

## 2. Číslo pět a příroda

Mnohé pětice můžeme najít v naší přírodě. Doložme to výběrem několika květů a listů z rozsáhlého díla *Květena České republiky* ([7], obr. 16).

Věky před Platónem „sestrojilo“ např. dvacetistěn pětiúhelníkový a různé péticípé hvězdy moře (obr. 17, 18 – [8], [9]).

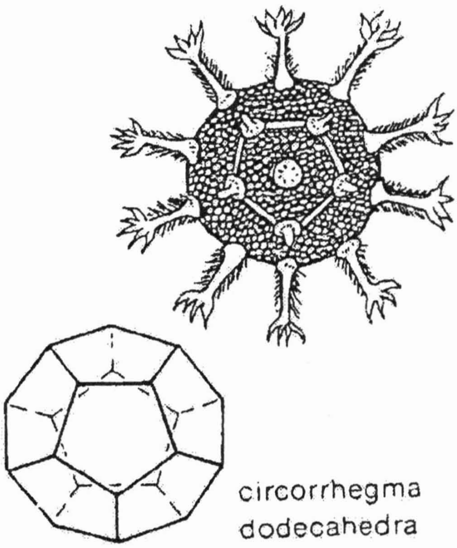
## 3. Číslo pět a výtvory člověka

Všimněme si zde několika příkladů z výtvarné tvorby a z techniky.

Jan Bouzek uvádí v knize *Umění a myšlení* příklad minojské keramiky z rané doby bronzové (2. tisíciletí př. Kr.), na níž

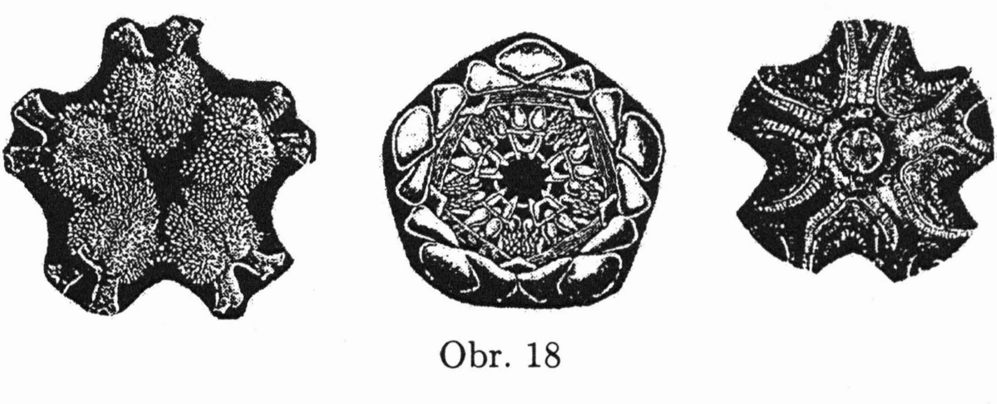
Obr. 16

je *vše jakoby v pohybu a na hranici mezi geometrickým a naturalistickým viděním reality* (obr. 19, [10], s. 42). C. W. Ceram předkládá čtenářům knihy *Bohové, hroby* a učenci nerozluštěnou záhadu, zda *bronzový předmět ve tvaru pentagonálního dvanáctistěnu* (obr. 20) je hračka, hrací kostka, svícen nebo pomůcka k měření válcovitých těles ([11], s. 25). V nové době se uplatňuje symbol ve tvaru pěticípé hvězdy nejen v USA (bílá hvězda) a v SSSR (rudá hvězda), ale např. i v Alžírsku, Číně, Ghaně, Chile, Iráku, Kamerunu, Kubě, Libérii, Panamě, Senegalu, Somálsku, Sýrii, Turecku a Vietnamu. Od pěticípé hvězdy odvozují symboly např. svobodní zednáři (obr. 21, Homo novus), pětilistou růži mají ve znaku Rožmberkové (obr. 22).

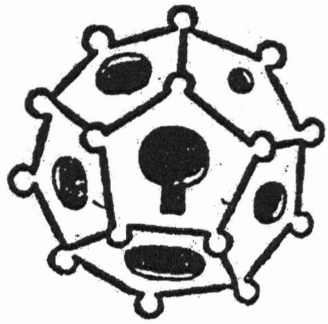



Obr. 17

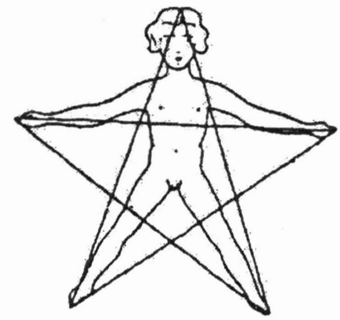
Obr. 19



Obr. 18

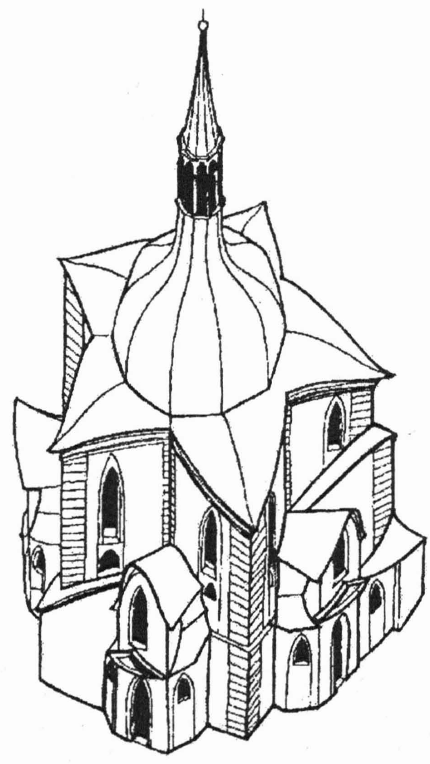


Obr. 20



Obr. 21

Obr. 22

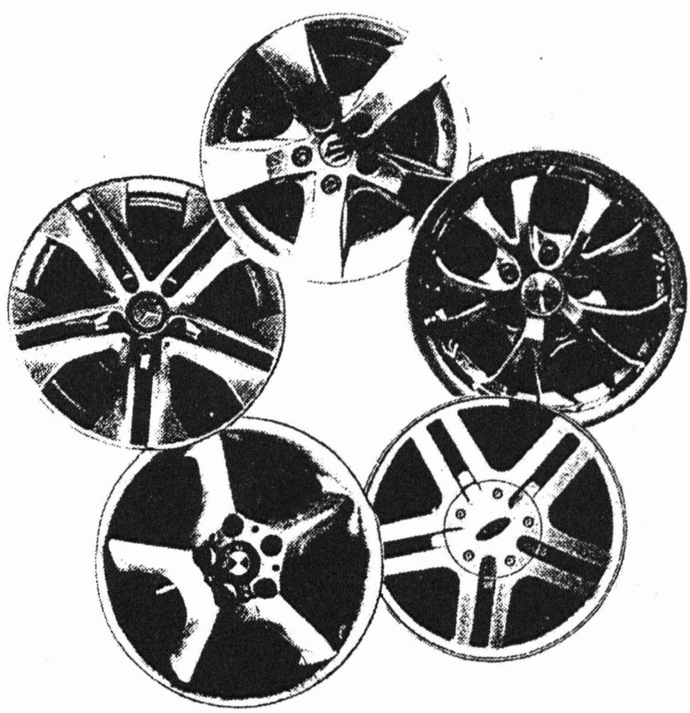


Obr. 23

Z pěti kruhů jako symbolů Evropy, Afriky, Ameriky a Austrálie se skládá jak známo symbol olympijských her. Pravidelné pětiúhelníky se vyskytují ve stavebnictví, např. budova Pentagonu, amerického ministerstva obrany nebo pětiúhelníková kompozice budovy chrámu na Zelené hoře v Žďáru nad Sázavou (obr. 23).

Bohatou sbírku pravidelných „mnohoúhelníků" můžeme vidět na discích automobilů. Několik pětiúhelníkových motivů z krátké procházky po Hradci Králové reprodukuji na obr. 24. Zde pentagonální tvary vykazují spíše estetická než technická zdůvodnění. S technickou aplikací pravidelného pětiúhelníku jsem se kupodivu nesetkal. Recenzent však upozorňuje, že k znesnadnění přístupu laika k zařízení brzdy u vozů Citron, Renault a Peugeot se používají pětiúhelníkové matice.

Pravidelnými pětiúhelníky nelze pokrýt rovinu, je to ovšem možné např. pravidelnými pětiúhelníky a kosočtverci, jak ukázal již Albrecht Dürer (1471–1528).



Obr. 24

# 4. Závěr

Americká autorka čínského původu Liping Ma napsala: *Je lehké být učitelem. Je však velmi těžké být dobrým učitelem.* Dobrý učitel matematiky by měl zvládat umění rozvíjet u všech svých žáků těchto pět P matematického vzdělávání: **přemýšlet, porozumět, počítat, pamatovat si, použít.**

Vidět matematiku v přírodě, technice i v umění může v matematickém vzdělávání dobře pomoci.

# Literatura

[1] Kuřina, F., Laťkový plot jako inspirace, *Učitel matematiky* **82**(2012), 89–96.

[2] Richter, V., *Žákovské perličky*, Melantrich, Praha, 1984.

[3] Pomykalová, E., *Matematika pro gymnázia. Planimetrie*, Prometheus, Praha, 1999.

[4] Fabián, J., *Pětiúhelník*, Lupus, Hradec Králové, 2005.

[5] Kuřina, F., *Deset geometrických transformací*, Prometheus, Praha, 2002.

[6] Havlíček, K., *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956.

[7] Slavík, B., *Květena České republiky*, Academia, Praha, 1998–2000.

[8] D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge University Press, 1961.

[9] Haeckel, E., *Kunstformen der Natur*, Prestel, München, 2004.

[10] Bouzek, J., *Umění a myšlení*, Triton, Praha, 2009.

[11] Ceram, C., W., *Bohové, hroby a učenci*, SNKL, Praha 1965.

*Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.*
*Katedra matematiky*
*Přírodovědecká fakulty Univerzity Hradec Králové*
*Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové 3*
*e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz*