Vlastimil Dlab
Obsah obecného mnohoúhelníku

Učitel matematiky, Vol. 20 (2012), No. 2, 105–108

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149540`

OBSAH OBECNÉHO MNOHOÚHELNÍKU

Vlastimil Dlab

Obvyklá definice popisuje v elementární matematice **mnohoúhelník** jako omezenou část roviny, která je ohraničena uzavřenou lomenou čarou. Je jím tedy myšlena část roviny omezená konečným počtem úseček, které se neprotínají (jejich počet musí být alespoň tři). Tyto úsečky jsou **strany** a jejich koncové body jsou **vrcholy** mnohoúhelníku. Je-li jejich počet n, mluvíme o n-**úhelníku**. Mám samozřejmě na mysli obecný mnohoúhelník a podotýkám, že „obecný" mnohoúhelník zahrnuje v matematice i „pravidelný" či jinak „speciální" mnohoúhelník.

Pokud se týče obsahu mnohoúhelníku, v běžných učebnicích nalezneme nanejvýš výpočet obsahu **pravidelných** mnohoúhelníků, tj. n-úhelníků, jejichž vrcholy lze popsat n-tými odmocninami kladného reálného čísla. Přitom se jistě mnohým učitelům přihodilo, že byli čas od času dotázáni zvídavými studenty, jak jednoduše vypočítat obsah **obecného** mnohoúhelníku.

Následující věta uvádí jednoduchý vzorec pro výpočet obsahu n-úhelníku, jehož vrcholy jsou postupně označeny $A_1, \dots, A_t, \dots, \dots, A_n$ a zadány souřadnicemi (a_t, b_t), $1 \leq t \leq n$; bod A_t je tedy popsán komplexním číslem $z_t = a_t + b_t\mathrm{i}$.

Věta. *Nechť je mnohoúhelník* $\mathbf{P} = A_1A_2 \dots A_n$ *orientován proti směru hodinových ručiček a jeho vrcholy* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *nechť jsou popsány komplexními čísly* $z_1, z_2, \dots, z_n$. *Potom obsah* $A(\mathbf{P})$ *mnohoúhelníku* $\mathbf{P}$ *je dán vzorcem*

$$A(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\Im\left(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \dots + \overline{z}_n z_1\right) = \frac{1}{2}\Im\Big(\sum_{t=1}^{n} \overline{z}_t z_{t+1}\Big). \quad (*)$$

Zde je $z_{n+1} = z_1$, $\overline{z}_t$ je číslo komplexně sdružené s číslem z_t ($1 \leq \leq t \leq n$) a $\Im(z)$ značí imaginární část komplexního čísla z.

Důkaz. Nejprve dokážeme vzorec (*) pro trojúhelník $\Delta = A_1A_2A_3$ orientovaný proti směru hodinových ručiček a popsaný komplexními čísly z_1, z_2, z_3. Důkaz provedeme ve třech krocích. Využijeme toho, že **translace** roviny $\tau_w : z \mapsto z + w$ ve směru w a **rotace** roviny $\varrho_{0,\varphi} : z \mapsto ze^{\mathrm{i}\varphi} = z(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ kolem počátku 0 o úhel φ proti směru hodinových ručiček zachovávají vzdálenosti mezi dvojicemi bodů, tj. jsou **izometriemi** roviny.

1. krok. Číslo $z = \overline{z}_1z_2 + \overline{z}_2z_3 + \overline{z}_3z_1$ se nezmění, otočíme-li rovinu kolem počátku 0 (tj. z je invariantem rotace kolem bodu 0). To je téměř triviální:

$$\overline{\varrho_{0,\varphi}(z_1)}\varrho_{0,\varphi}(z_2) + \overline{\varrho_{0,\varphi}(z_2)}\varrho_{0,\varphi}(z_3) + \overline{\varrho_{0,\varphi}(z_3)}\varrho_{0,\varphi}(z_1) =$$

$$= \overline{z_1}e^{-\mathrm{i}\varphi}z_2e^{\mathrm{i}\varphi} + \overline{z_2}e^{-\mathrm{i}\varphi}z_3e^{\mathrm{i}\varphi} + \overline{z_3}e^{-\mathrm{i}\varphi}z_1e^{\mathrm{i}\varphi} = \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + $$
$$+ \overline{z_3}z_1 = z.$$

2. krok. Reálné číslo $\Im z$ se nezmění, jestliže libovolně posuneme rovinu, tj. $\Im z$ je invariantem každé translace τ_w. Vypočtěme výraz

$$\overline{\tau_w(z_1)}\tau_w(z_2) + \overline{\tau_w(z_2)}\tau_w(z_3) + \overline{\tau_w(z_3)}\tau_w(z_1) =$$
$$= \overline{(z_1 + w)}(z_2 + w) + \overline{(z_2 + w)}(z_3 + w) + \overline{(z_3 + w)}(z_1 + w) =$$
$$= \overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1 + r = z + r,$$

kde $r = \overline{z_1}w + z_1\overline{w} + \overline{z_2}w + z_2\overline{w} + \overline{z_3}w + z_3\overline{w} + 3w\overline{w}$. Jelikož je $r = \overline{r}$, je číslo r reálné a číslo $\Im(z)$ se tedy translací nezmění.

3. krok. Vhodnou translací a rotací kolem počátku zobrazme daný trojúhelník do polohy, kdy $z_1 = 0$, $z_2 = a$, $z_3 = b + c\mathrm{i}$, kde a, b, c jsou reálná čísla, přičemž $a > 0$, $c > 0$. Obsah tohoto trojúhelníku je tedy roven $\frac{1}{2}ac$. Dále je

$$\frac{1}{2}\Im\left(\overline{z}_1z_2 + \overline{z}_2z_3 + \overline{z}_3z_1\right) = \frac{1}{2}\Im\left(ab + ac\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2}ac.$$

Pro uvažovaný trojúhelník tedy vzorec (*) platí.

Dále budeme postupovat indukcí.

Využijeme vhodné triangulace mnohoúhelníku **P**. Vždy existuje takový bod A_t, že obsah n-úhelníku **P** se rovná součtu obsahu trojúhelníku $\Delta = A_{t-1}A_tA_{t+1}$ a obsahu $(n-1)$-úhelníku **P'** $= A_1A_2 \dots A_{t-1}A_{t+1} \dots A_n$, které jsou orientovány proti směru hodinových ručiček. Je tedy

$$A(\mathbf{P}) = A(\Delta) + A(\mathbf{P'})$$

Podle indukčního předpokladu – vzorec (*) platí jak pro trojúhelník Δ, tak pro $(n-1)$-úhelník **P'** – dostáváme

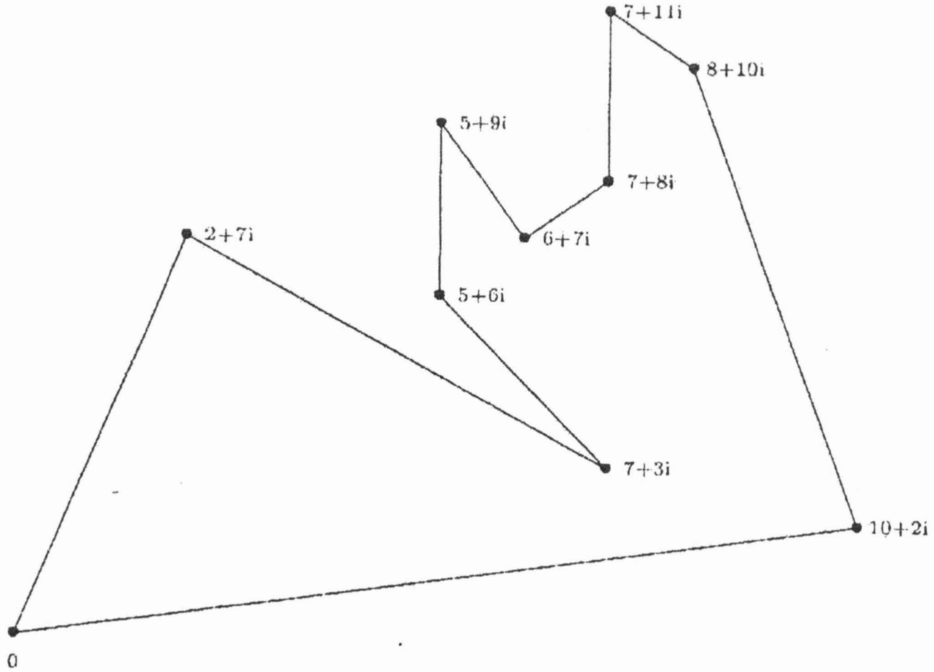
$$\begin{aligned} A(\mathbf{P}) &= \frac{1}{2}\Im\left[\overline{z}_{t-1}z_t + \overline{z}_t z_{t+1} + \overline{z}_{t+1}z_{t-1})\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\Im\left[(\overline{z}_1 z_2 + \dots + \overline{z}_{t-2}z_{t-1} + \overline{z}_{t-1}z_{t+1} + \right. \\ &\qquad \left. + \overline{z}_{t+1}z_{t+2} + \dots + \overline{z}_n z_1)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\Im\,(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \dots + \overline{z}_n z_1), \end{aligned}$$

neboť číslo $\overline{z}_{t+1}z_{t-1} + \overline{z}_{t-1}z_{t+1}$ je reálné. Tím je důkaz dokončen.

Poznámka. Číslo $z = \overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \overline{z}_3 z_1$ spjaté s trojúhelníkem $A_1A_2A_3$ závisí na jeho orientaci. Při orientaci téhož trojúhelníka ve směru hodinových ručiček dostáváme výraz $z' = \overline{z}_1 z_3 + \overline{z}_3 z_2 + \overline{z}_2 z_1$. Ihned vidíme, že $z' = \overline{z}$, tj. čísla z' a z jsou komplexně sdružená, tedy $\Im z' = -\Im z$. Totéž evidentně platí pro libovolný mnohoúhelník. Jeho obsah, nezávisle na orientaci, se tedy rovná polovině absolutní hodnoty imaginární části komplexního čísla

$$\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \dots + \overline{z}_n z_1.$$

Nakonec uveďme jednoduchou ilustraci použití vzorce (*). Nechť **P** je desetiúhelník popsaný na následujícím obrázku:



Potom je

$$A(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}\Im\big[(10-2i)(8+10i)+(8-10i)(7+11i)+$$
$$+(7-11i)(7+8i)+(7-8i)(6+7i)+(6-7i)(5+9i)+$$
$$+(5-9i)(5+6i)+(5-6i)(7+3i)+(7-3i)(2+7i)\big] =$$
$$=\frac{1}{2}\big(100-16+88-70+56-77+49-48+54-$$
$$-35+30-45+15-42+49-6\big)=51.$$

Prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc., FRSC
School of Mathematics and Statistics
Carleton University
Ottawa, Ontario, K1S 5B6
Canada
e-mail: vdlab@math.carleton.ca