Matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 4, 241–254

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149516

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Ve dnech 17.–20. 3. 2013 se v Jihlavě uskutečnilo celostátní kolo 62. ročníku matematické olympiády kategorie A. Zveřejňujeme zadání a řešení úloh, seznam vítězů a úspěšných řešitelů. Současně zveřejňujeme úlohy prvního kola příštího ročníku Matematické olympiády, kategorií A, B, C pro školní rok 2013–2014.

Úlohy celostátního kola 62. ročníku matematické olympiády

Jihlava 17.–20. března 2013

1. Najděte všechny dvojice celých čísel a, b, pro něž platí rovnost

$$\frac{a^2+1}{2b^2-3}=\frac{a-1}{2b-1}.$$

(Pavel Novotný)

Řešení. Zřejmě $a \neq 1$, proto můžeme danou rovnost přepsat na tvar

$$\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{2b^2-3}{2b-1}. \tag{1}$$

Zatímco čitatel zlomku na levé straně je kladný, je čitatel druhého zlomku záporný jen pro $b \in \{-1, 0, 1\}$.

Přitom pro $b=-1$ dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici $3a^2-a+4=0$, která nemá nemá reálné řešení, a podobně i pro $b=0$: ani rovnice $a^2-3a+4=0$ nemá reálné řešení.

Pro $b=1$ dostaneme rovnici $a^2+a=a(a+1)=0$, která má dvě řešení $a \in \{0,-1\}$. Dostáváme tak dvě dvojice $(0,1)$ a $(-1,1)$, jež vyhovují dané rovnosti.

Předpokládejme dále, že $2b^2-3>0$, a zjistěme, kterými přirozenými čísly lze zlomky v (1) krátit.

Jestliže číslo n dělí a^2+1 a $a-1$, musí dělit i $a^2+1-(a+{}$ ${}+1)(a-1)=2$. Podobně jestliže číslo n dělí $2b^2-3$ a $2b-1$, musí dělit i $(2b-1)(2b+1)-2(2b^2-3)=5$. Vzhledem k tomu jsou právě čtyři možnosti, jak dosáhnout rovnosti zlomků v (1):

(i) $a^2+1=2b^2-3$ a $a-1=2b-1$; dosazením $a=2b$ do první rovnice dostaneme vztah $4b^2+1=2b^2-3$, který neplatí pro žádné reálné b.

(ii) $a^2+1=2(2b^2-3)$ a $a-1=2(2b-1)$; dosadíme $a=4b-1$ do první rovnice, po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $3b^2-2b+2=0$, která nemá reálná řešení.

(iii) $5(a^2+1)=2b^2-3$ a $5(a-1)=2b-1$; dosadíme $a=\frac{1}{5}(2b+4)$ do první rovnice, po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $3b^2-8b-28=0$, jež má celočíselné řešení $b=-2$. Tomu odpovídá $a=0$.

(iv) $5(a^2+1)=2(2b^2-3)$ a $5(a-1)=2(2b-1)$; dosadíme $a=\frac{1}{5}(4b+3)$ do první rovnice a dostaneme kvadratickou rovnici $b^2-6b-16=0$ se dvěma celočíselnými kořeny $b=-2$ a $b=8$, kterým odpovídají hodnoty $a=-1$ a $a=7$.

Úloze tedy vyhovuje celkem pět celočíselných dvojic (a,b):

$$(0,1),\ (-1,1),\ (0,-2),\ (-1,-2),\ (7,8).$$

Jiné řešení. Vyjdeme z upravené rovnosti (1), kterou napíšeme ve tvaru

$$a+1+\frac{2}{a-1}=b+\frac{b-3}{2b-1}. \tag{2}$$

Pro $a<-1$ a pro $a>3$ zřejmě platí $|a-1|>2$. Podobně pro $b<-2$ i pro $b>3$ platí

$$0<\frac{b-3}{2b-1}<1.$$

Proto napřed vypočítáme hodnoty obou zlomků v (1) pro $a\in$ $\in\{-1,0,2,3\}$ $(a\neq 1)$ a $b\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$:

a	-1	0	2	3
$\dfrac{a^2+1}{a-1}$	-1	-1	5	5

b	-2	-1	0	1	2	3
$\dfrac{2b^2-3}{2b-1}$	-1	$\frac{1}{3}$	3	-1	$\frac{5}{3}$	3

Porovnáním obou tabulek nacházíme čtyři řešení:

$$(-1,-2),(-1,1),(0,-2),(0,1).$$

Pro zbývající hodnoty a, b platí

$$-1 < \frac{b-3}{2b-1} - \frac{2}{a-1} = a + 1 - b < 2,$$

takže zbývají jen dvě možnosti: $a + 1 - b = 0$ nebo $a + 1 - b = 1$.

Jestliže $a = b - 1$, dostaneme dosazením do (2) kvadratickou rovnici $b^2 - 9b + 8 = 0$, která má dvě celočíselná řešení $b = 1$ a $b = 8$. Dostáváme tak další řešení $(7, 8)$.

Pro $a = b$ dostaneme dosazením do (2) kvadratickou rovnici $b^2 + 5b - 4 = 0$, která žádné celočíselné řešení nemá.

2. Každý ze zbojníků v n-členné družině ($n \geq 3$) naloupil určitý počet mincí. Všech naloupených mincí bylo $100n$. Zbojníci se rozhodli rozdělit kořist následujícím způsobem: v každém kroku dá jeden ze zbojníků po jedné minci jiným dvěma. Najděte všechna přirozená čísla $n \geq 3$, pro která po konečném počtu kroků může mít každý zbojník 100 mincí bez ohledu na to, kolik mincí jednotliví zbojníci naloupili. *(Ján Mazák)*

Řešení. Označme z_i počet mincí, které má i-tý zbojník (čísla z_i se v průběhu dělení budou měnit).

Nechť $n = 3$. Po libovolném kroku se nezmění zbytek čísla $z_1 - z_2$ při dělení třemi. Pokud tedy byly počáteční stavy například $z_1 = 101$, $z_2 = 100$, a $z_3 = 99$, nemůže nikdy nastat rovnost $z_1 = z_2$. Číslo $n = 3$ tedy úloze nevyhovuje.

Ukážeme, že pro každé $n \geq 4$ a libovolné počáteční hodnoty z_i dosáhneme po konečném počtu vhodných kroků stavu, v němž bude mít každý zbojník 100 mincí.

Označme $s = \sum |z_i - 100|$. Číslo s budeme zmenšovat, dokud to bude možné, tak, že v každém kroku některý ze zbojníků, kteří mají nejvíce, dá po jedné minci některým dvěma, kteří mají nejméně. Nechť už se takovým způsobem číslo s nedá zmenšit. Pokud $s = 0$, skončili jsme.

Pokud $s \neq 0$, má některý zbojník $100 - k$ mincí ($k > 0$), k zbojníků má po 101 minci a všichni ostatní mají po 100 mincí. Pokud $k \geq 2$, zmenšíme hodnotu s ve dvou krocích:

$$100-k, 101, 101 \longrightarrow 100-k+1, 102, 99 \longrightarrow 100-k+2, 100, 100.$$

Je-li k sudé, bude mít po $\frac{1}{2}k$ takých dvojkrocích každý zbojník 100 mincí. Pokud je k liché, dostaneme se do stavu, v němž má jeden zbojník 99 mincí, jeden jich má 101 a všichni ostatní mají po 100. Pak už dělení snadno dokončíme:

$$99, 100, 100, 101 \longrightarrow 99, 101, 101, 99 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow 99, 102, 99, 100 \longrightarrow 100, 100, 100, 100.$$

Jiné řešení. Pro neprázdnou množinu Z zbojníků označme $r(\mathsf{Z})$ rozdíl mezi počty mincí nejbohatšího a nejchudšího člena množiny Z. Na počátku vybereme některého nejbohatšího zbojníka A (libovolného z těch, kteří naloupili nejvíce mincí) a označíme Z množinu zbývajících zbojníků. Pokud $r(\mathsf{Z}) \geq 2$, dá jeden z nejbohatších zbojníků ze Z minci nejchudšímu a minci zbojníkovi A. Takto pokračujeme, dokud platí $r(\mathsf{Z}) \geq 2$. Protože počet mincí zbojníka A stále roste a mincí je jen konečný počet, po konečném počtu kroků bude $r(\mathsf{Z}) \leq 1$.

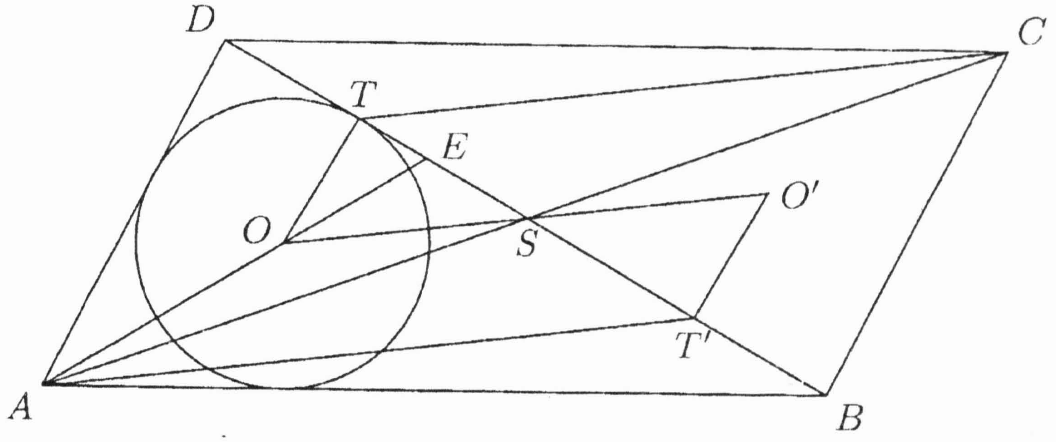
Od tohoto okamžiku v každém dalším kroku začne dávat zbojník A, dokud má aspoň 102 mince, po jedné minci dvěma nejchudším. Nerovnost $r(\mathsf{Z}) \leq 1$ přitom zůstává zachována. Jakmile nastane situace, že zbojník A má méně než 102 mince, jsou dvě možnosti: Buď má zbojník A právě 100 mincí a dělení je skončeno; anebo má 101 mincí, takže jeden ze zbojníků musí mít 99 mincí a všichni ostatní ze Z po 100. Dělení pak skončíme stejně jako v prvním řešení.

3. V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné.

(Jaromír Šimša)

Řešení. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ a $c = |BD|$. Případ $a = b$ je triviální (tehdy obě přímky OS a CT splývají s přímkou AC), budeme proto dále předpokládat, že $a > b$ (v případě $a < b$ stačí vyměnit označení vrcholů B a D).

Označme T' obraz bodu T v souměrnosti podle středu S (v níž A je obrazem bodu C). Protože $CT \parallel AT'$, je naším cílem dokázat, že $OS \parallel AT'$. Dosáhneme toho ověřením stejnolehlosti trojúhelníků $AT'E$ a OSE, kde E je průsečík polopřímky AO s úhlopříčkou BD (obr. 1). Díky předpokladu $a > b$ a tomu, že AE je osa úhlu BAD, leží bod E mezi body S a D stejně jako bod T (ten jakožto kolmý průmět bodu O leží mezi body E a D), zatímco bod T' leží mezi body S a B.



Obr. 1

Potřebnou (i postačující) rovnost poměrů

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|T'S|}{|SE|} \tag{1}$$

dokážeme tak, že je vyjádříme pomocí délek a, b, c. Jak je známo,

$$|DT| = \frac{b+c-a}{2}, \quad \text{a proto}$$

$$|T'S| = |TS| = \frac{c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Z vlastností os úhlů v trojúhelnících ABD a AED plynou rovnosti

$$|BE| : |ED| = |AB| : |AD| \quad \text{a} \quad |AO| : |OE| = |AD| : |DE|,$$

z nichž postupně dostaneme

$$|BE| = \frac{ac}{a+b} \quad \text{a} \quad |DE| = \frac{bc}{a+b},$$

$$|SE| = |BE| - |BS| = \frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)},$$

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Posledním zlomkem jsme vyjádřili hodnotu levé strany (1). Ukažme, že stejnou hodnotu má i pravá strana:

$$\frac{|T'S|}{|SE|} = \frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{c(a-b)}{2(a+b)}} = \frac{a+b}{c}.$$

Tím je důkaz tvrzení úlohy uzavřen.

Jiné řešení. Označme T' bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku DBC se stranou BD. To je, jak je známo, současně bod, v němž se strany BD dotýká kružnice k' připsaná trojúhelníku ABD. Označme ρ poloměr kružnice k vepsané trojúhelníku ABD a ρ' poloměr kružnice k'. Bod E leží na spojnici středů kružnic k a k' i na jejich společné tečně, je tedy středem stejnolehlosti obou kružnic. Proto platí rovnost

$$\frac{|ET'|}{|ET|} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

Označíme-li $|ST'| = |ST| = x$ a $|SE| = y$, máme

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b+c}{a+b-c} \quad \text{a odtud} \quad \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c},$$

takže

$$\frac{|ET'|}{|ES|} = \frac{x+y}{y} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Označíme-li v velikost výšky trojúhelníku ABD z vrcholu A, platí

$$\frac{|EA|}{|EO|} = \frac{v}{\rho} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{|ET'|}{|ES|}.$$

Tím je stejnolehlost trojúhelníků EAT' a EOS, a tedy i rovnoběžnost přímek AT' a OS dokázána.

Analytické řešení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $D = [a,b]$. Potom $C = [a+1, b]$, $S = \left[\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}b\right]$. Bod O má stejnou vzdálenost od stran trojúhelníku ABD, proto jeho souřadnice vyhovují soustavě rovnic

$$y = \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-bx + (a-1)y + b}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}.$$

Označíme-li $c = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$, $d = \sqrt{a^2+b^2}$, dostaneme

$$O = \left[\frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{c+d+1}\right].$$

Dále

$$T = B + \left(1 - \frac{a+d}{c+d+1}\right)\frac{D-B}{c} =$$
$$= \frac{1}{c+d+1}\left[c+d+a - \frac{(1-a)^2}{c}, b\left(\frac{1-a}{c}+1\right)\right].$$

Ověření lineární závislosti vektorů

$$S - O = \left[\frac{a+1}{2} - \frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{2}\left(1 - \frac{2}{c+d+1}\right)\right]$$

a

$$C - T = \left[a + 1 - \frac{c + d + a - \frac{(1-a)^2}{c}}{c + d + 1}, b\left(1 - \frac{\frac{1-a}{c+1}}{c + d + 1}\right)\right]$$

čili rovnosti

$$[(a + 1)(c + d + 1) - 2a - 2d]\left(c + d - \frac{1 - a}{c}\right) =$$
$$= \left[(a + 1)(c + d + 1) - c - d - a + \frac{(1 - a)^2}{c}\right](c + d - 1)$$

je už rutinní záležitostí.

4. Na tabuli je napsáno v desítkové soustavě celé kladné číslo N. Není-li jednomístné, smažeme jeho poslední číslici c a číslo m, které na tabuli zůstane, nahradíme číslem $|m - 3c|$. (Například bylo-li na tabuli číslo $N = 1\,204$, po úpravě tam bude $120 - 3 \cdot 4 = 108$.) Najděte všechna přirozená čísla N, z nichž opakováním popsané úpravy nakonec dostaneme číslo 0. *(Peter Novotný)*

Řešení. Nejdříve zjistíme, pro která čísla N dostaneme rovnou nulu. Zřejmě $|m - 3c| = 0$, právě když $m = 3c$ neboli $N = 10m + c = 31c$. Všechny násobky $N = 31c$ pro $c \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ tudíž úloze vyhovují.

Dokážeme, že úloze vyhovují právě všechny přirozené násobky čísla 31. Protože $c = N - 10m$, je $m - 3c = 31m - 3N$, takže popsaná operace zachovává dělitelnost číslem 31. Stačí tedy ukázat, že z libovolného násobku $N = 31k$, kde $k \geq 10$, dostaneme popsanou úpravou vždy menší násobek čísla 31. Pro takové N je ovšem $m \geq 31$, $m - 3c > 0$, tudíž $|m - 3c| = 31m - 3N < 4N - 3N = N$. Znamená to, že po konečném počtu kroků dostaneme popsanou úpravou některý z devíti nejmenších násobků čísla 31 a následně nulu. Tím je úloha vyřešena.

Poznámka. Dá se dokonce ukázat, že nerovnost $|m - 3c| < N$ platí už pro každé $N \geq 20$.

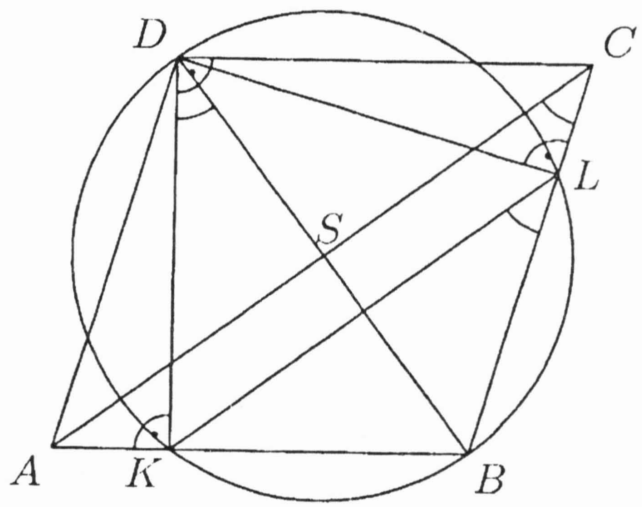
5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ takový, že paty K, L kolmic z bodu D po řadě ke stranám AB, BC jsou jejich vnitřními body. Dokažte, že $KL \parallel AC$, právě když

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|.$$

(Ján Mazák)

Řešení. Střídavé úhly ABD a CDB jsou shodné (obr. 2), proto $|\sphericalangle BCA|+|\sphericalangle ABD|+|\sphericalangle BDA|+|\sphericalangle ACD| = 180°$. Rovnost $|\sphericalangle BCA|+ + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|$ tedy platí, právě když

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = 90°. \tag{1}$$



Obr. 2

Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem BD. Obvodový úhel BDK je tedy shodný s úhlem BLK, a proto (vzhledem k rovnosti střídavých úhlů ABD a CDB)

$$|\sphericalangle BLK| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDK| + |\sphericalangle CDB| = 90°.$$

Přímky KL a AC jsou ovšem rovnoběžné, právě když $|\sphericalangle BLK| = = |\sphericalangle BCA|$, což je podle předchozí rovnosti ekvivalentní rovnosti (1). Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.

6. Najděte všechna kladná reálná čísla p taková, že nerovnost

$$\sqrt{a^2 + pb^2} + \sqrt{b^2 + pa^2} \geq a + b + (p-1)\sqrt{ab}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel a, b.

(Jaromír Šimša)

Řešení. Pro dvojici $a = b = 1$ dostaneme pro parametr $p > 0$ nerovnici, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{p+1} &\geq p+1, \\ 2 &\geq \sqrt{p+1}, \\ p &\leq 3. \end{aligned}$$

Ukážeme nyní, že požadovanou vlastnost má každé $p \in (0, 3\rangle$. Pro $p \in (0, 1\rangle$ je zadaná nerovnost splněna triviálně, neboť

$$\sqrt{a^2 + pb^2} > a, \quad \sqrt{b^2 + pa^2} > b \quad \text{a} \quad (p-1)\sqrt{ab} \leq 0.$$

Zabývejme se proto dále pouze případem $p \in (1, 3\rangle$. Levou stranu L dokazované nerovnosti můžeme chápat jako velikost dvou vektorů $(a, b\sqrt{p})$, $(b, a\sqrt{p}) \in \mathbb{R}^2$, proto podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} L = \sqrt{a^2 + pb^2} + \sqrt{b^2 + pa^2} &= |(a, b\sqrt{p})| + |(b, a\sqrt{p})| \geq \\ &\geq |(a+b, (a+b)\sqrt{p})| = (a+b)\sqrt{1+p}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pro pravou stranu P pomocí nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem naopak dostáváme horní odhad

$$P = a + b + (p-1)\sqrt{ab} \leq a + b + (p-1)\frac{a+b}{2} = \frac{(p+1)(a+b)}{2}.$$

Nerovnost $L \geq P$ je tak dokázána, neboť silnější nerovnost

$$(a+b)\sqrt{p+1} \geq \frac{(p+1)(a+b)}{2}$$

je ekvivalentní s nerovností $\sqrt{p+1} \leq 2$, jež je pro každé $p \in (1, 3\rangle$ zřejmě splněna.

Poznámka.
Odhad (1) dostaneme též použitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pro dvojice $(a, b\sqrt{p})$ a $(1, \sqrt{p})$: z nerovnosti

$$a + pb \leq \sqrt{a^2 + pb^2} \cdot \sqrt{1 + p},$$

plyne první z nerovností

$$\sqrt{a^2 + pb^2} \geq \frac{a + pb}{\sqrt{1 + p}}, \qquad \sqrt{b^2 + pa^2} \geq \frac{b + pa}{\sqrt{1 + p}},$$

druhou odvodíme analogicky.

Výsledková listina celostátního kola 62. ročníku MO kategorie A

Vítězové:

1.	Štěpán Šimsa	8/8 GJJ Litoměřice, Svojsíkova	**41**
2.	Radovan Švarc	2/4 G Česká Třebová	**38**
3.	Josef Svoboda	6/6 G Frýdlant n. O.	**37**
4.	David Hruška	8/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	**36**
5.	Tomáš Jareš	6/8 PORG Praha, Lindnerova	**35**
6.	Martin Hora	7/8 G Plzeň, Mikulášské nám.	**30**
7.	Michal Buráň	8/8 GJAK Uherský Brod	**30**
8.	Hana Dlouhá	8/8 GJK Praha 6, Parléřova	**29**

Další úspěšní řešitelé:

9.	Martin Karpilovskij	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	**28**
10.	Martin Raszyk	3/4 G Karviná	**28**
11.	Matěj Konečmý	4/4 G České Budějovice, Jírovcova	**27**
12.	Pavel Turek	4/8 G Olomouc-Hejčín	**27**
13.	Lubomír Grund	8/8 GChD Praha 5, Zborovská	**26**
14.	Tomáš Pavlín	4/4 GJK Praha 6, Parléřova	**26**
15.	Dominik Teiml	6/6 English College in Prague	**26**

ZADÁNÍ PRO ŠKOLNÍ ROK 2013–2014

Kategorie A

A-I-1. Číslo n je součinem tří (ne nutně různých) prvočísel. Zvětšíme-li každé z nich o 1, zvětší se jejich součin o 963. Určete původní číslo n. *(Pavel Novotný)*

A-I-2. Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq m^2, \quad \text{kde } m = \min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Zjistěte rovněž, kdy v dokázané nerovnosti nastane rovnost. *(Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša)*

A-I-3. Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé. *(Pavel Novotný)*

A-I-4. Označme $l(n)$ největšího lichého dělitele čísla n. Určete hodnotu součtu

$$l(1) + l(2) + l(3) + \cdots + l(2^{2013}).$$

(Michal Rolínek)

A-I-5. Kolika různými způsoby můžeme vydláždit plochu 3×10 dlaždicemi 2×1, lze-li je pokládat v obou navzájem kolmých směrech? *(Stanislava Sojáková)*

A-I-6. V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. *(Pavel Calábek)*

KATEGORIE B

B-I-1. Každému vrcholu pravidelného 63úhelníku přiřadíme jedno z čísel 1 nebo -1. Ke každé jeho straně připíšeme součin čísel v jejích vrcholech a všechna čísla u jednotlivých stran sečteme. Najděte nejmenší možnou nezápornou hodnotu takového součtu.

(Pavel Calábek)

B-I-2. Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují nerovnici

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2.$$

(Jaroslav Švrček)

B-I-3. Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici. *(Jaroslav Švrček)*

B-I-4. Dana napsala na papír trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 2. Přehozením prvních dvou číslic vzniklo trojmístné číslo, které při dělení sedmi dává zbytek 3. Číslo vzniklé přehozením posledních dvou číslic původního čísla dává při dělení sedmi zbytek 5. Jaký zbytek při dělení sedmi bude mít číslo, které vznikne přehozením první a poslední číslice Danina čísla?

(Pavel Novotný)

B-I-5. V rovině jsou dány body A, T, U tak, že úhel ATU je tupý. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém T, U jsou po řadě body dotyku strany BC s kružnicí trojúhelníku vepsanou a připsanou. (Kružnicí připsanou tu rozumíme kružnici, která se kromě strany BC dotýká i polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.) *(Šárka Gergelitsová)*

B-I-6. Najděte nejmenší reálné číslo r takové, že tyč o délce 1 lze rozlomit na čtyři části délky nejvýše r tak, aby ze žádných tří těchto částí nešlo složit trojúhelník. *(Ján Mazák)*

KATEGORIE C

C-I-1. Určete, jaké nejmenší hodnoty může nabýt výraz $V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$, splňují-li reálná čísla a, b, c dvojici podmínek

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 6, \\ -a + b - c &= 2. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček)

C-I-2. V rovině jsou dány body A, P, T neležící v přímce. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby P byla pata jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicí mu vepsanou. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k poloze daných bodů.

(Pavel Leischner)

C-I-3. Číslo n je součinem tří různých prvočísel. Zvětšíme-li dvě menší z nich o 1 a největší ponecháme nezměněno, zvětší se jejich součin o 915. Určete číslo n. *(Pavel Novotný)*

C-I-4. Ve čtverci $ABCD$ označme K střed strany AB a L střed strany AD. Úsečky KD a LC se protínají v bodě M a rozdělují čtverec na dva trojúhelníky a dva čtyřúhelníky. Vypočtěte jejich obsahy, jestliže úsečka LM má délku 1 cm. *(Leo Boček)*

C-I-5. Dokažte, že pro každé liché přirozené číslo n je součet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ dělitelný číslem 96. *(Jaromír Šimša)*

C-I-6. Šachového turnaje se zúčastnilo 8 hráčů a každý s každým odehrál jednu partii. Za vítězství získal hráč 1 bod, za remízu půl bodu, za prohru žádný bod. Na konci turnaje měli všichni účastníci různé počty bodů. Hráč, který skončil na 2. místě, získal stejný počet bodů jako poslední čtyři dohromady. Určete výsledek partie mezi 4. a 6. hráčem v celkovém pořadí. *(Vojtech Bálint)*