Zkuste si napsat polskou maturitní písemku z matematiky

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 3, 162–183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149506

ZKUSTE SI NAPSAT POLSKOU MATURITNÍ PÍSEMKU Z MATEMATIKY

Úvod

V následujícím textu je přeloženo[11] zadání, řešení i hodnocení maturitní písemné práce z matematiky v základní úrovni, která se konala 8.5.2013 v Polsku.

Máte-li chuť si písemku, která je v Polsku povinná pro všechny studenty středních škol, vyzkoušet, připravte si pravítko, kružítko, jednoduchou kalkulačku umožňující jen sčítání, odčítání, násobení, dělení, odmocňování a matematické vzorce [3]. Během maximálně 170 minut budete řešit 34 úloh, za něž lze získat až 50 bodů.

Podrobnosti k maturitě z matematiky v Polsku uvedeme v některém z dalších čísel. Na tomto místě alespoň poznamenejme, že autory úloh jsou pracovníci ústřední zkušební komise CKE (Centralna Komisja Egzaminacyjna).

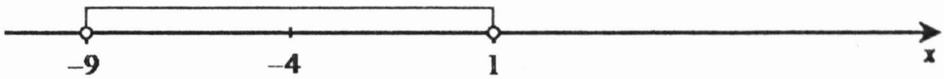
Maturitní zkouška z matematiky
základní úroveň

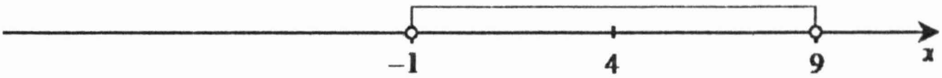
UZAVŘENÉ ÚLOHY

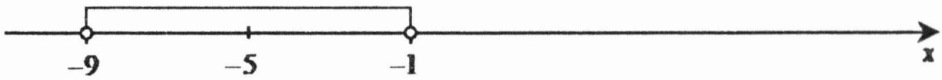
V úlohách 1–25 vyberte a označte na záznamovém archu správnou odpověď.

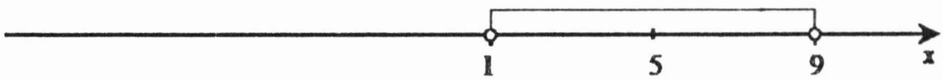
Úloha 1. ***(1 bod)***
Vyberte obrázek, na kterém je vyznačen soubor všech reálných čísel, která vyhovují nerovnici $|x + 4| < 5$.

[11] Z polských originálů [1] a [2] přeložila Martina Kašparová. Na rozdíl od původního textu byla vynechána prázdná místa určená pro poznámky, řešení úloh a pro tabulky s hodnocením.

A. 

B. 

C. 

D. 

Úloha 2. ***(1 bod)***
Čísla a a b jsou kladná a 12% čísla a je rovno 15% čísla b. Z toho plyne, že a je rovno

A. 103% čísla b **B.** 125% čísla b **C.** 150% čísla b **D.** 153% čísla b

Úloha 3. ***(1 bod)***
Číslo $log\,100 - log_2 8$ je rovno

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 1

Úloha 4. ***(1 bod)***

Řešením soustavy rovnic $\begin{cases} 5x + 3y = 3 \\ 8x - 6y = 48 \end{cases}$ je dvojice čísel.

A. $x = -3$ a $y = 4$ **B.** $x = -3$ a $y = 6$
C. $x = 3$ a $y = -4$ **D.** $x = 9$ a $y = 4$

Úloha 5. ***(1 bod)***
Bod $A = (0, 1)$ leží na grafu lineární funkce $f(x) = (m-2)x+m-3$. Z toho vyplývá, že

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 4$

Úloha 6. ***(1 bod)***
Vrcholem paraboly o rovnici $y = -3(x-2)^2 + 4$ je bod o souřadnicích

A. $[-2, -4]$ **B.** $[-2, 4]$ **C.** $[2, -4]$ **D.** $[2, 4]$

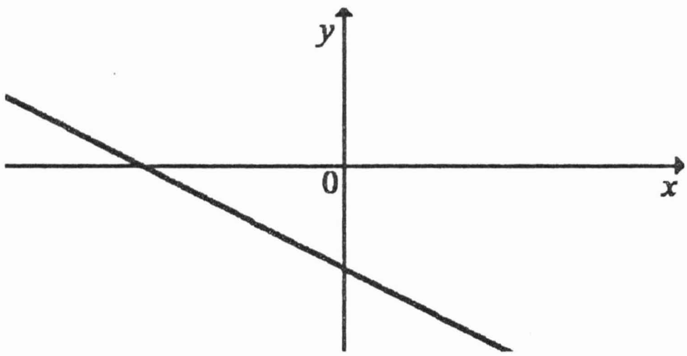
Úloha 7. ***(1 bod)***
Pro každé reálné číslo x je výraz $4x^2 - 12x + 9$ roven

A. $(4x + 3)(x + 3)$ **B.** $(2x - 3)(2x + 3)$
C. $(2x - 3)(2x - 3)$ **D.** $(x - 3)(4x - 3)$

Úloha 8. *(1 bod)*
Přímka o rovnici $y = \frac{2}{m}x + 1$ je kolmá na přímku o rovnici $y = -\frac{3}{2}x - 1$. Z toho vyplývá, že

A. $m = -3$ B. $m = \frac{2}{3}$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = 3$

Úloha 9. *(1 bod)*
Na obrázku je znázorněna část lineární funkce $y = ax + b$.



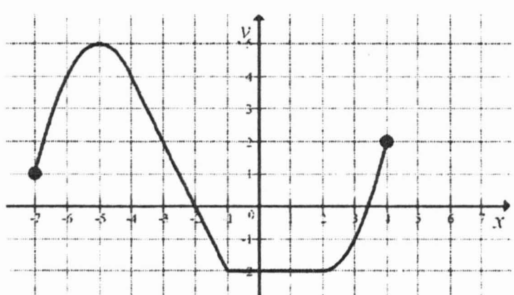
Jakou hodnotu mají koeficienty a a b?

A. $a < 0$ a $b < 0$ B. $a < 0$ a $b > 0$
C. $a > 0$ a $b < 0$ D. $a > 0$ a $b > 0$

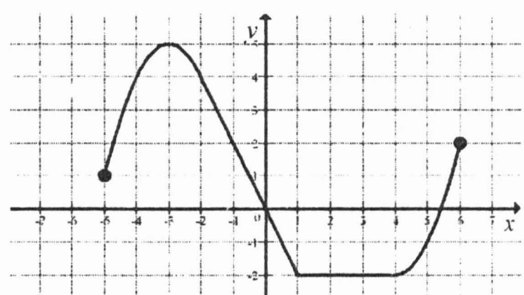
Úloha 10. *(1 bod)*
Nejmenší celé číslo splňující nerovnost $\frac{x}{2} \leq \frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$ je

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

Úloha 11. *(1 bod)*
Na obrázku 1 je graf funkce $y = f(x)$ definované pro $x \in \langle -7, 4 \rangle$.



Obr. 1



Obr. 2

Obrázek 2 představuje graf funkce

A. $y = f(x+2)$ B. $y = f(x) - 2$
C. $y = f(x-2)$ D. $y = f(x) + 2$

Úloha 12. ***(1 bod)***
Posloupnost $\{27, 18, x+5\}$ je geometrická. Pak

A. $x = 4$ **B.** $x = 5$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 9$

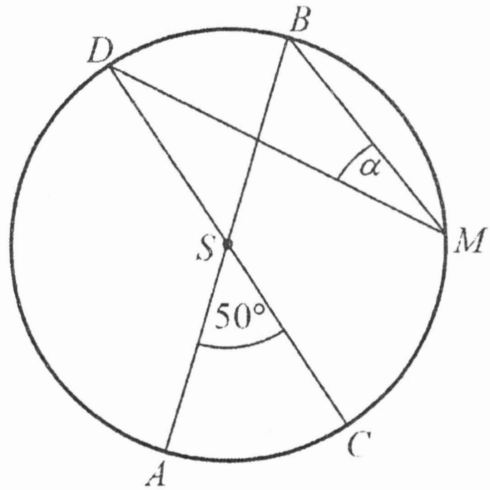
Úloha 13. ***(1 bod)***
Posloupnost (a_n) definovaná pro $n \geq 1$ je aritmetická, přičemž $a_3 = 10$ a $a_4 = 14$. První člen je

A. $a_1 = -2$ **B.** $a_1 = 2$ **C.** $a_1 = 6$ **D.** $a_1 = 12$

Úloha 14. ***(1 bod)***
Úhel α je ostrý a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Hodnota výrazu $\cos^2\alpha - 2$ je rovna

A. $-\frac{7}{4}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Úloha 15. ***(1 bod)***
Průměry AB a CD kružnice se středem S se protínají pod úhlem $50°$ (viz obrázek)



Velikost úhlu α je rovna

A. $25°$ **B.** $30°$ **C.** $40°$ **D.** $50°$

Úloha 16. ***(1 bod)***
Počet reálných čísel, které řeší rovnici $(x+1)(x+2)(x^2+3) = 0$ je roven

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

Úloha 17. ***(1 bod)***
Body $A = (-1, 2)$ a $B = (5, -2)$ jsou dva sousední vrcholy kosočtverce $ABCD$. Obvod kosočtverce je roven

A. $\sqrt{13}$ **B.** 13 **C.** 676 **D.** $8\sqrt{13}$

Úloha 18. ***(1 bod)***
Bod $S = [-4, 7]$ je středem úsečky PQ, kde $Q = [17, 12]$. To znamená, že bod P má souřadnice

A. $P = [2, -25]$ **B.** $P = [38, 17]$
C. $P = [-25, 2]$ **D.** $P = [-12, 4]$

Úloha 19. ***(1 bod)***
Vzdálenost mezi středy kružnic o rovnicích $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ a $x^2 + y^2 = 10$ je rovna

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{10} - 3$ **C.** 3 **D.** 5

Úloha 20. ***(1 bod)***
Celkový počet hran hranolu je o 10 větší než počet všech jeho bočních stěn. Z toho vyplývá, že podstava tohoto hranolu je

A. čtyřúhelník **B.** pětiúhelník **C.** šestiúhelník **D.** desetiúhelník

Úloha 21. ***(1 bod)***
Plocha pláště kužele o výšce 4 a poloměru podstavy 3 je rovna

A. 9π **B.** 12π **C.** 15π **D.** 16π

Úloha 22. ***(1 bod)***
Dvakrát hodíme symetrickými krychlový kostkami. Nechť p je pravděpodobnost, že součin počtu oček je roven 5. Pak

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $p = \frac{1}{18}$ **C.** $p = \frac{1}{12}$ **D.** $p = \frac{1}{9}$

Úloha 23. ***(1 bod)***
Číslo $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ je rovno

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $\sqrt{10} - \sqrt{6}$

Úloha 24. ***(1 bod)***
Medián uspořádaného neklesajícího souboru šesti čísel: 1, 2, 3, x, 5, 8 je roven 4. Pak

A. $x = 2$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 5$

Úloha 25. ***(1 bod)***
Objem pravidelného trojbokého hranolu o výšce 7 je roven $28\sqrt{3}$. Délka hrany podstavy takového hranolu je rovna

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16

OTEVŘENÉ ÚLOHY

Řešení problémů 26–34 musí být provedeno na vyznačených místech pod textem úlohy.

Úloha 26. ***(2 body)***
Řešte rovnici $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$.

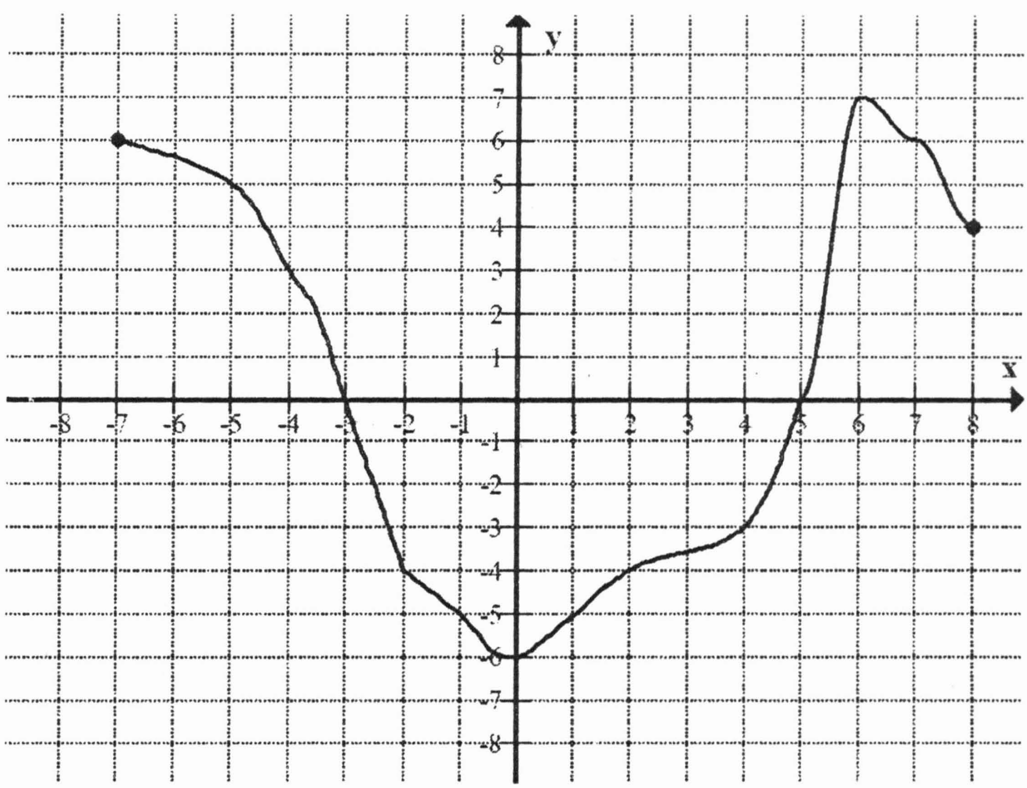
Úloha 27. ***(2 body)***
Úhel α je ostrý a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vypočtěte hodnotu výrazu

$$\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha.$$

Úloha 28. ***(2 body)***
Dokažte, že pro všechna reálná čísla x, y, z taková, že $x+y+z = 0$, platí nerovnost $xy + yz + zx \leq 0$.

Můžete použít identitu $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

Úloha 29. ***(2 body)***
Na obrázku je graf funkce $f(x)$ definované pro $x \in \langle -7, 8\rangle$.

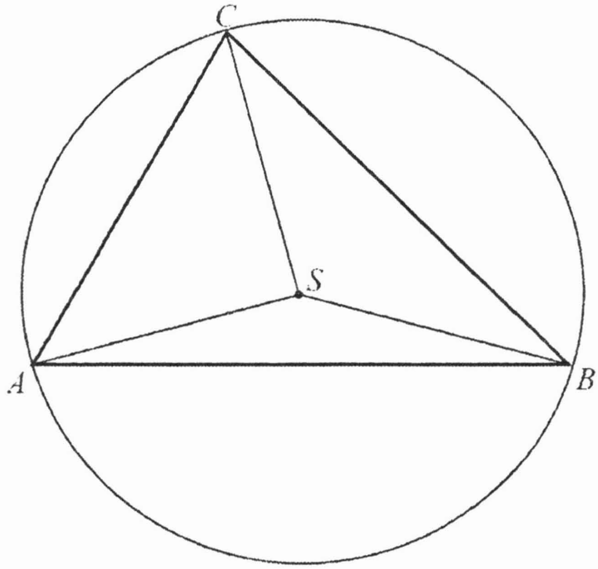


Vyčtěte z grafu a zapište:
a) maximální hodnotu funkce f,
b) množinu řešení nerovnice $f(x) < 0$.

Úloha 30. ***(2 body)***
Vyřešte nerovnici $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Úloha 31. ***(2 body)***
Dokažte, že číslo $6^{100} - 2.6^{99} + 10.6^{98}$ je dělitelné 17.

Úloha 32. ***(4 body)***
Bod S je středem kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC. Úhel ACS je třikrát větší než úhel BAS a úhel CBS je dvakrát větší než úhel BAS. Určete velikosti úhlů trojúhelníku ABC.



Úloha 33. ***(4 body)***
Obsah podstavy pravidelného čtyřbokého jehlanu je roven 100 cm^2 a obsah pláště je roven 260 cm^2. Vypočítejte objem tohoto jehlanu.

Úloha 34. ***(5 bodů)***
Délka železniční trati spojující dvě města je 336 kilometrů. První vlak projel tuto trasu v čase o 40 minut kratším než druhý vlak. Průměrná rychlost prvního vlaku na trase byla o 9 km/h vyšší než průměrná rychlost druhého vlaku. Vypočtěte průměrné rychlosti obou vlaků na této trase.

Kritéria pro posuzování odpovědí[12]

UZAVŘENÉ ÚLOHY

1. A, **2.** B, **3.** B, **4.** C, **5.** D, **6.** D, **7.** C, **8.** D, **9.** A, **10.** B, **11.** C, **12.** C, **13.** B, **14.** A, **15.** A, **16.** C, **17.** D, **18.** C, **19.** A, **20.** B, **21.** C, **22.** B, **23.** B, **24.** D, **25.** B

OTEVŘENÉ ÚLOHY

Úloha 26.

I. metoda řešení (úprava na součin)
Levá strana rovnice se vyjádří jako součin výrazů

$$x(x^2-8)+2(x-8)=0 \quad \text{nebo} \quad x^2(x+2)-8(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2-8)$$

Odtud $x=-2$ nebo $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$ nebo $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Hodnocení I. metody řešení
Uchazeč získá **1 bod**, zapíše-li levou stranu rovnice ve tvaru součinu, např. $(x+2)(x^2-8)$, $(x+2)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})$, přičemž tvar musí být uveden správně. Dále úlohu neřeší nebo ji řeší špatně.
Student získá **2 body**, když správně určí všechna řešení rovnice: $x=-2$, $x=-\sqrt{8}$, $x=\sqrt{8}$.

II. metoda řešení (dělení polynomů)
Dojdeme k dílčímu výsledku, že číslo -2 je nulovým bodem polynomu $x^3+2x^2-8x-16$. Tento polynom dělíme dvojčlenem $(x+2)$. Dostaneme podíl (x^2-8). Rovnici zapíšeme ve tvaru $(x+2)(x^2-8)=0$. Odtud $(x+2)(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})=0$ a $x=-2$ nebo $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$ nebo $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Hodnocení II. metody řešení
Uchazeč získá **1 bod**, když vydělí polynom $x^3+2x^2-8x-16$ dvojčlenem $x+2$, čímž dostane podíl x^2-8. Tím řešení skončí nebo pokračuje chybně.

---

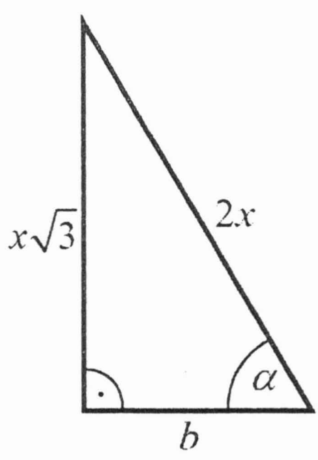
[12] Z prostorových důvodů vynecháváme v překladu „Kritérií“ zadání úloh, která jsou součástí polského textu. Rovněž je vynecháno přiřazení úloh ke vzdělávacím standardům, tematickým okruhům a dílčím dovednostem. Zájemci tyto údaje mohou najít v polském originále [2].

Student dostane **2 body**, když správně uvede všechna řešení rovnice: $x = -2$, $x = -\sqrt{8}$, $x = \sqrt{8}$.

Úloha 27.
I. metoda řešení (užití známých hodnot goniometrických funkcí)
Protože α je ostrý úhel a $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tak $\alpha = 60°$. Je proto $\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Odtud $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 3(\frac{1}{2})^2 = 0$.
Hodnocení I. metody řešení
Udělí se **1 bod**, když student napíše hodnotu kosinu úhlu α: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ a tím skončí řešení nebo pokračuje nesprávně.
Uchazeč získá **2 body**, vypočte-li, že $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

II. metoda řešení (užití vztahů mezi goniometrickými funkcemi)
Vypočteme $\sin^2\alpha = \sin(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$, následně se pomocí identity $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ vypočte $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$, odtud $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$ nebo užitím $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ změníme výraz $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$ na tvar $4\sin^2\alpha - 3$ a pak určíme jeho hodnotu: $4\sin^2\alpha - 3 = 0$.
Hodnocení II. metody řešení
Student dostane **1 bod**, když vypočte $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$ nebo zapíše výraz ve tvaru $\sin^2\alpha - 3(1 - \sin^2\alpha)$.
Uchazeč získá **2 body**, když vypočte $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

III. metoda řešení (pravoúhlý trojúhelník)



Z Pythagorovy věty vypočteme

$$b^2 = (2x)^2 - (\sqrt{3}x)^2,$$

pak $b = x$. Odtud

$$\cos\alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2},$$

takže

$$\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 3(\frac{1}{2})^2 = 0.$$

Hodnocení III. metody řešení
Uchazeč získá **1 bod**, když

- narýsuje pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou délky $\sqrt{3}$ a přeponou délky 2 (nebo jejich násobky), vypočte délku druhé odvěsny, správně vyznačí v trojúhelníku úhel, určí jeho kosinus a dále úlohu neřeší nebo ji řeší špatně.

nebo

- určí délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku o odvěsně délky $\sqrt{3}$ a přeponě délky 2 (nebo jejich násobky) s případnou matematickou chybou, stanoví kosinus tohoto úhlu $\cos\alpha$ (pokud je vypočtená hodnota kladná a menší než 1) a následně určí hodnotu výrazu $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Uchazeč získá **2 body**, když stanoví hodnotu $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$.

Úloha 28.
I. metoda řešení
Obě strany rovnosti $x + y + z = 0$ umocníme na druhou a získáme rovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0.$$

Odtud je

$$xy + xz + yz = -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Vzhledem k tomu, že součet čtverců čísel x, y, z je nezáporný, tak platí

$$-\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \le 0,$$

a tedy

$$xy + xz + yz \le 0,$$

čímž je důkaz dokončen.

Hodnocení I. metody řešení
Student obdrží **1 bod**, pokud umocní obě strany a zapíše např.

$$xy + xz + yz = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}z^2$$

nebo

$$2xy + 2xz + 2yz = -x^2 - y^2 - z^2$$

a ukončí důkaz bez zdůvodnění znaménka výrazu $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2$ nebo $-x^2 - y^2 - z^2$.

Uchazeč získá **2 body**, když provede úplný důkaz.

II. metoda řešení

Z rovnosti $x+y+z=0$ vyjádříme jedno z čísel, např. $z=-x-y$. Obdržíme

$$xy+xz+yz = xy+x(-x-y)+y(-x-y) = xy-x^2-xy-xy-y^2 = \\ = -x^2-xy-y^2 = -(x^2+xy+y^2)$$

S výrazem x^2+xy+y^2 zacházíme jako s kvadratickým trojčlenem v proměnné x. Pro jeho diskriminant platí $\Delta = y^2-4\cdot 1\cdot y^2 = -3y^2 \leq 0$. Tato skutečnost spolu se znaménkem koeficientu u x^2 znamená, že trojčlen nabývá jen nezáporných hodnot, tj. $x^2+xy+y^2 \geq 0$. Odtud $xy+xz+yz = -(x^2+xy+y^2) \leq 0$.

Lze si též všimnout, že $x^2+xy+y^2 = (x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2$. To je součet dvou nezáporných čísel, a tak je také nezáporný. Odtud $xy+xz+yz = -(x^2+xy+y^2) \leq 0$.

Můžeme také zjistit, že $x^2+xy+y^2 = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}y^2$, což je součet tří nezáporných čísel a je tudíž nezáporný. Proto $xy+xz+yz = -(x^2+xy+y^2) \leq 0$. Tím je důkaz dokončen.

Hodnocení II. metody řešení

Uchazeč získá **1 bod**, jestliže z rovnosti $x+y+z=0$ vyjádří jedno z čísel a zapíše výraz $xy+xz+yz$ v závislosti na dvou proměnných, např. na x a y: $xy+xz+yz=-x^2-xy-y^2$, a takto zakončí důkaz, aniž by zdůvodnil znaménko výrazu $-x^2-xy-y^2$.

Student dostane **2 body**, když provede úplný důkaz.

Úloha 29.

Z grafu se vyčte maximální hodnota funkce f. Ta je rovna 7. Zjistíme soubor všech hodnot proměnné x, pro něž funkce f nabývá záporné hodnoty: $(-3, 5)$.

Hodnocení

Uchazeč získá **1 bod**, pokud

- najde maximální hodnotu funkce f: 7 a neuvede množinu všech prvků definičního oboru, pro které funkce f nabývá záporných hodnot.

nebo

- uvede soubor všech hodnot argumentu x, pro něž má funkce f záporné hodnoty: $(-3, 5)$ a neuvede maximum funkce f.
  Poznámka: Akceptují se zápisy: $x \in (-3, 5)$ nebo $-3 < x < 5$ nebo $x > -3$ a $x < 5$ nebo $x > -3$, $x < 5$.

Student dostane **2 body**, když uvede maximum funkce a množinu všech x, pro která nabývá funkce záporných hodnot: 7, $(-3, 5)$.

Kritéria hodnocení při zohlednění specifických poruch učení v matematice

V řešení části b) jsou přípustné i zápisy: $x \in (5, -3)$, $x \in (3, 5)$, $x \in (3, -5)$.

Úloha 30.

Řešení kvadratické nerovnice sestává ze dvou kroků.

První krok řešení:

Najdeme kořeny kvadratického trojčlenu $2x^2 - 7x + 5$.

- vypočteme diskriminant trojčlenu:

$$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9, \text{ a tedy } x_1 = \frac{7-3}{4} = 1, x_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{5}{2}$$

nebo

- použijeme Viètovy vzorce:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \quad \text{a} \quad x_1 + x_2 = \frac{7}{2}, \quad \text{odtud} \quad x_1 = 1 \text{ a } x_2 = \frac{5}{2}$$

nebo

- uvedeme je přímo, např. zapíšeme kořeny trojčlenu nebo zapíšeme trojčlem ve tvaru součinu nebo vyznačením na grafu, tj.

$$x_1 = 1, \ x_2 = 2\tfrac{1}{2} \quad \text{nebo} \quad 2(x-1)(x-\tfrac{5}{2})$$

Druhá etapa řešení:

Uvedeme množinu řešení nerovnice: $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle\frac{5}{2}, +\infty)$ nebo $(-\infty, 1\rangle \cup \langle\frac{5}{2}, +\infty)$ nebo ($x \leq 1$ nebo $x \geq \frac{5}{2}$).

Hodnocení

Uchazeč získá **1 bod**, jestliže

- provede první krok řešení a tím řešení skončí nebo chybně zapíše množinu řešení nerovnice, např.

- vypočte nebo uvede kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ kvadratického trojčlenu a dále v řešení nepokračuje nebo chybně zapíše množinu řešení nerovnice,
- vyznačí na grafu nulové body funkce $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$, řešení úlohy ukončí nebo chybně zapíše množinu řešení nerovnice,
- rozloží trojčlen na lineární činitele, např. $2(x - \frac{10}{4})(x - \frac{4}{4})$ a řešení skončí nebo špatně zapíše množinu řešení nerovnice,
- zapíše nerovnici $|x - \frac{7}{4}| \geq \frac{3}{4}$ a dále v řešení nepokračuje nebo chybně zapíše množinu řešení nerovnice,

nebo

- v prvním kroku provede chybu (ale získá dva různé kořeny) a následně vyřeší nerovnici, např.
- provede početní chybu při výpočtu diskriminantu nebo kořenů kvadratického trojčlenu a následně vyřeší nerovnici se špatnými výsledky,
- špatně zapíše rovnice vyplývající z Viètových vztahů, například $x_1 x_2 = -\frac{5}{2}$ a $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, následně vyřeší nerovnici se špatnými výsledky z prvního kroku,
- špatně zapíše nerovnici, např. $|x + \frac{7}{4}| \geq \frac{3}{4}$, kterou však správně vyřeší.

Uchazeč získá **2 body**, jestliže

- uvede množinu řešení nerovnice: $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty)$ nebo $(-\infty, 1\rangle \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty)$ nebo ($x \leq 1$ nebo $x \geq \frac{5}{2}$)

nebo

- provede geometrické znázornění (číselná osa, graf) a zapíše řešení nerovnice ve tvaru: $x \leq 1$, $x \geq \frac{5}{2}$

nebo

- uvede graficky znázorněnou množinu řešení nerovnice se správně vyznačenými konci intervalů

Kritéria hodnocení při zohlednění specifických poruch učení v matematice

1. Je přípustné, když student správně vypočte kořeny trojčlenu $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{2}$ a zapíše např. $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle\frac{2}{5}, +\infty)$, spáchá stejnou chybu při přepisu jednoho z kořenů, pak získá **2 body**.
2. Pokud uchazeč splete pořadí čísel na číselné ose, např. zapíše soubor řešení nerovnice ve tvaru $x \in (-\infty, \frac{5}{2}\rangle \cup \langle 1, +\infty)$, obdrží **2 body**.

Úloha 31.
Vytkneme společný člen před závorku, $6^{98} \cdot (6^2 - 2 \cdot 6 + 10)$, a převedeme na tvar $6^{98} \cdot 2 \cdot 17$.

Hodnocení
Student dostane **1 bod**, zapíše-li číslo $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ ve tvaru součinu, v němž je jeden ze členů mocnina 6^k, kde $80 \le k \le 98$, např. $6^{98}(6^2 - 2 \cdot 6 + 10)$, a takto řešení zakončí nebo dále řeší chybně.
Uchazeč obdrží **2 body**, zapíše-li číslo ve tvaru, z něhož je zřejmá dělitelnost 17 nebo provede-li úvahu odůvodňující dělitelnost 17.

Úloha 32.
I. metoda řešení
Jelikož je trojúhelník ABC ostroúhlý, tak je střed kružnice jemu opsané uvnitř tohoto trojúhelníku. Nechť α je velikost úhlu BAS. Potom

$$|\sphericalangle CBS| = 2\alpha \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ACS| = 3\alpha.$$

Každý z trojúhelníků ABS, BCS a CAS je rovnoramenný, proto

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = \alpha, \qquad |\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS| = 2\alpha.$$

$$|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS| = 3\alpha.$$

Velikosti úhlů trojúhelníku ABC jsou proto rovny

$$|\sphericalangle BAC| = 4\alpha, \qquad |\sphericalangle CBA| = 3\alpha, \qquad |\sphericalangle ACB| = 5\alpha.$$

Součet velikostí úhlu trojúhelníku je roven 180°, tedy

$$\begin{aligned} 4\alpha + 3\alpha + 5\alpha &= 180^\circ \\ 12\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 15^\circ. \end{aligned}$$

Takže $|\sphericalangle BAC| = 4\alpha = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 3\alpha = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 5\alpha = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$.

Hodnocení I. metody řešení

Řešení, ve kterém je postup neúplný, ale obsahuje krok nezbytný pro úplné vyřešení, je oceněno **1 bodem**.

- Zápis velikostí úhlů BAS, ACS a CBS v závislosti na jedné proměnné, např. $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

nebo

- vyvození faktu, že aspoň dva z trojúhelníků ABS, BCS a CAS jsou rovnoramenné, například $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Řešení, v němž jsou uveden zásadní kroky, získá **2 body**.

- Zápis velikostí úhlů BAS, ACS a CBS v závislosti na jedné proměnné, např. $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

a

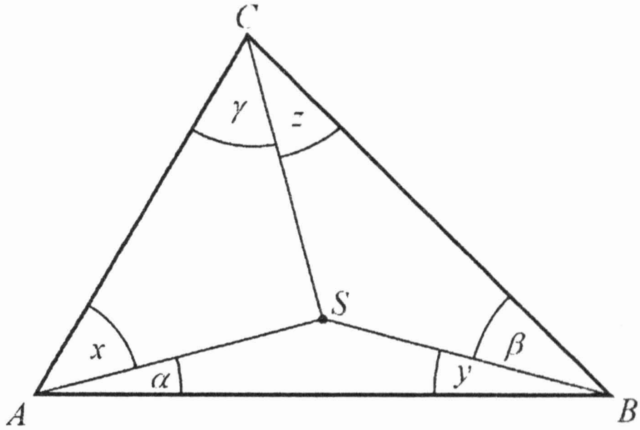
- vyvození vlastnosti, že aspoň dva z trojúhelníků ABS, BCS a CAS jsou rovnoramenné, např. $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS|$, $|\sphericalangle BCS| = |\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle ACS|$.

Řešení, v němž jsou překonány hlavní obtíže úlohy, obdrží **3 body**. Zápis rovnice o jedné neznámé umožní vypočítat velikost vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, např. $4\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$.

Za úplné řešení se udělí **4 body**. Výpočet velikostí úhlů trojúhelníku ABC: $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 45^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 75^\circ$.

II. metoda řešení

Označme úhly v trojúhelníku jako na obrázku.



Protože je trojúhelník ABC ostroúhlý, tak je střed kružnice jemu opsané uvnitř tohoto trojúhelníku. Z věty o středovém a obvodovém úhlu získáme

$$|\sphericalangle ASB| = 2\gamma + 2z, \quad |\sphericalangle BSC| = 2\alpha + 2x, \quad |\sphericalangle CSA| = 2\beta + 2y.$$

Součet úhlů v každém z trojúhelníků ABS, BCS a CAS je roven $180°$, proto dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha + y + (2\gamma + 2z) &= 180° \\ \beta + z + (2\alpha + 2x) &= 180° \\ \gamma + x + (2\beta + 2y) &= 180° \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\beta = 2\alpha$ a $\gamma = 3\alpha$, můžeme soustavu zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \alpha + y + (6\alpha + 2z) &= 180°, \\ 2\alpha + z + (2\alpha + 2x) &= 180°, \\ 3\alpha + x + (4\alpha + 2y) &= 180°, \end{aligned} \qquad \text{tj.} \qquad \begin{aligned} 7\alpha + y + 2z &= 180°, \\ 4\alpha + 2x + z &= 180°, \\ 7\alpha + x + 2y &= 180°. \end{aligned}$$

Obě strany první, resp. druhé rovnice se vynásobí -2, resp. 4, pak

$$-14\alpha - 2y - 4z = -360°, 16\alpha + 8x + 4z = 720°, 7\alpha + x + 2y = 180°.$$

Sečtením odpovídajících si stran všech rovnic získáme

$$9\alpha + 9x = 360° \quad \text{a} \quad \alpha + x = 60°,$$

tj. $|\sphericalangle ABC| = 60°$, proto $|\sphericalangle BSC| = 120°$.

Trojúhelník BSC je rovnoramenný, takže $|\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB| = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$, pak $2\alpha = 30°$, tj. $\alpha = 15°$. Odtud $|\sphericalangle CBA| = 45°$, $|\sphericalangle ACB| = 75°$.

Hodnocení II. metody řešení

Řešení, v němž je postup neúplný, ale nutný pro úplné vyřešení, se ohodnotí **1 bodem**.

- Zápis velikostí úhlů BAS, ACS a CBS v závislosti na jedné proměnné, např. $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

nebo

- vyvození závislosti mezi úhly středovými ASB, BSC a ASC a odpovídajícími úhly obvodovými a zápis soustavy nejméně tří rovnic, např.:

  $$\alpha + y + (2\gamma + 2z) = \beta + z + (2\alpha + 2x) = \gamma + x + (2\beta + 2y) = 180°,$$

  kde $x = |\sphericalangle CAS|$, $y = |\sphericalangle ABS|$, $z = |\sphericalangle BCS|$, $\beta = |\sphericalangle CBS|$, $\gamma = |\sphericalangle ACS|$.

Za řešení, ve kterém jsou obsaženy hlavní kroky, se udělí **2 body**.

- Zápis velikostí úhlů BAS, ACS a CBS v závislosti na jedné proměnné, např. $|\sphericalangle BAS| = \alpha$, $|\sphericalangle CBS| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ACS| = 3\alpha$

a

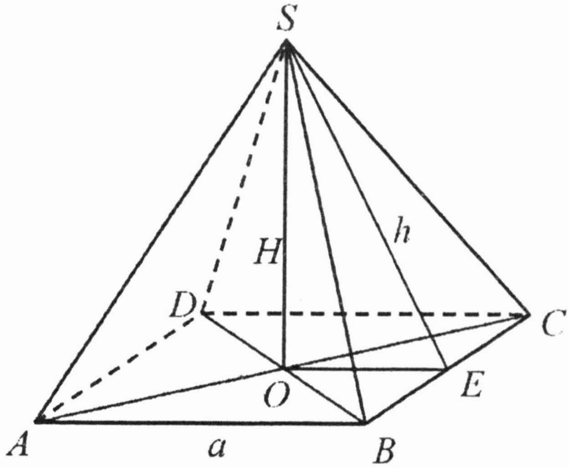
- vyvození závislosti mezi úhly středovými ASB, BSC a ASC a odpovídajícími úhly obvodovými a zápis soustavy nejméně tří rovnic o čtyřech neznámých, např.:

  $$\begin{aligned} \alpha + y + (6\alpha + 2z) &= 180° \\ 2\alpha + z + (2\alpha + 2x) &= 180° \\ 3\alpha + x + (4\alpha + 2y) &= 180° \end{aligned}$$

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **3 body**. Výpočet velikosti úhlu CAB: $\alpha + x = 60°$.

Úplné řešení – **4 body**. Výpočet velikostí úhlů trojúhelníku ABC: $|\sphericalangle BAC| = 60°$, $|\sphericalangle CBA| = 45°$, $|\sphericalangle ABC| = 75°$.

Úloha 33.
Předpokládejme takové označení jehlanu, jako je na obrázku.



Obsah plochy podstavy jehlanu je roven 100, tedy $a^2 = 100$, proto $a = 10$. Obsah plochy pláště je roven 260, takže $4 \cdot \frac{1}{2}ah = 260$. Odtud a z předchozího důsledku

$$2 \cdot 10h = 260, \quad \text{a tak} \quad h = 13.$$

Jelikož je trojúhelník EOS pravoúhlý, tak

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2}a)^2 + H^2 &= h^2 \\ 5^2 + H^2 &= 13^2 \\ H^2 &= 144 \\ H &= 12. \end{aligned}$$

Objem jehlanu je roven

$$V = \tfrac{1}{3}P_pH = \tfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400.$$

Odpověď: Objem jehlanu je roven 400 cm^3.

Hodnocení

Řešení, ve kterém je postup neúplný, ale obsahuje krok nezbytný pro úplné vyřešení, je oceněno **1 bodem**. Student vypočte délku hrany podstavy jehlanu: $a = 10$.

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **3 body**. Student vypočte výšku jehlanu: $H = 12$.

Poznámka: Pokud uchazeč řešení skončí výpočtem výšky boční stěny $h = 13$ a nezachází s ní jako s výškou jehlanu, dostane **2 body**. Když však nalezenou výšku boční stěny použije jako výšku jehlanu, získá nejvíce **1 bod** za celé řešení.

Úplné řešení – **4 body**. Uchazeč určí objem jehlanu: $V = 400\,\mathrm{cm}^3$.

Poznámky:

1. Nebereme ohled na jednotky (uchazeč je může vynechat).
2. Jestliže uchazeč považuje, že obsah plochy pláště jehlanu je celkový obsah povrchu jehlanu, může získat maximálně **1 bod** za celé řešení.
3. Pokud uchazeč předpokládá, že obsah plochy pláště jehlanu je obsahem plochy jedné boční stěny a následně s touto chybou vypočte objem jehlanu, může získat maximálně **2 body** za celé řešení.

Úloha 34.

Nechť v je průměrná rychlost (v km/h) prvního vlaku a t doba jízdy prvního vlaku (v hodinách) na trase. Potom $v-9$ je průměrná rychlost druhého vlaku a $t+\frac{2}{3}$ jeho doba jízdy. Zapíšeme soustavu rovnic

$$\begin{cases} v \cdot t = 336 \\ (v-9)(t+\frac{2}{3}) = 336. \end{cases}$$

Z první rovnice vyjádříme $t = \frac{336}{v}$ a dosadíme do druhé rovnice. Získáme rovnici s neznámou v, kterou upravujeme ekvivalentními úpravami:

$$(v-9)(\tfrac{336}{v} + \tfrac{2}{3}) = 336,$$

$$\tfrac{2}{3}v - \tfrac{9\cdot 336}{v} - 6 = 0,$$

$$\tfrac{2}{3}v^2 - 6v - 9 \cdot 336 = 0$$

(nebo $2v^2 - 18v - 9\,072 = 0$ nebo $v^2 - 9v - 4536 = 0$). Tato rovnice má dva kořeny

$$v_1 = 72, \qquad v_2 = -63 < 0.$$

Druhé z řešení zamítneme (rychlost nemůže být záporná). Když je $v = 72$, pak $v - 9 = 63$. Odpověď: Průměrná rychlost prvního vlaku je rovna 72 km/h, průměrná rychlost druhého vlaku je rovna 63 km/h.

Hodnocení

V níže uvedeném hodnocení používáme neznámé v, t označující postupně rychlost a čas. V maturitních pracích mohou být neznámé veličiny označeny samozřejmě jinak. Není nutné, aby neznámé byly jasně popsány na začátku řešení, z tvaru rovnice vyplývá jejich význam.

Řešení, ve kterém je postup neúplný, ale obsahuje krok nezbytný pro úplné vyřešení, je ohodnoceno **1 bodem**. Uchazeč zapíše rovnici, v níž je aspoň jedna z veličin (rychlost, čas) závislá na zvolené neznámé, např.:

$$(v-9)(t+\tfrac{2}{3}) = 336 \quad \text{nebo} \quad (v+9)(t-\tfrac{2}{3}) = 336.$$

Řešení, v němž je uveden hlavní postup, se ohodnotí **2 body**. Student zapíše soustavu rovnic s neznámými v, t, např.:

$$\begin{aligned} v\cdot t &= 336, \\ (v-9)(t+\tfrac{2}{3}) &= 336 \end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{aligned} v\cdot t &= 336, \\ (v+9)(t-\tfrac{2}{3}) &= 336. \end{aligned}$$

Vyřešení hlavních kroků úlohy – **3 body**. Uchazeč zapíše rovnici o jedné neznámé v nebo t.

$$(v-9)(\tfrac{336}{v}+\tfrac{2}{3}) = 336 \quad \text{nebo} \quad (\tfrac{336}{t}-9)(t+\tfrac{2}{3}) = 336$$

nebo

$$(v+9)(\tfrac{336}{v}-\tfrac{2}{3}) = 336 \quad \text{nebo} \quad (\tfrac{336}{t}+9)(t-\tfrac{2}{3}) = 336.$$

Poznámka: Uchazeč nemusí nezbytně psát soustavu rovnic, může přímo uvést rovnici o jedné neznámé.

Řešení provedené do konce, ale s chybami, které nevedou ke správnému řešení (např. drobné početní chyby nebo chybné přepisy), je ohodnoceno **4 body**.

- uchazeč vyřeší rovnici s neznámou v nebo t s početní chybou a následně zapíše rychlosti obou vlaků s touto chybou.
- uchazeč vyřeší kvadratickou rovnici a zapíše rychlost jen jednoho vlaku.

Úplné řešení – **5 bodů**. Uchazeč vypočte průměrné rychlosti obou vlaků: průměrná rychlost prvního vlaku je rovna 72 km/h, průměrná rychlost druhého vlaku je rovna 63 km/h.

Poznámky:

1. **0 body** jsou hodnocena řešení, ve kterých jsou do rovnosti položeny veličiny různého typu: na jedné straně rychlost, na druhé čas nebo se neshodují jednotky: rychlost v kilometrech za hodinu, čas v minutách, pokud nejsou tyto jednotky zapsány.
2. Když uchazeč označí průměrnou rychlost prvního vlaku v km/h a t dobu jízdy prvního vlaku a také zapíše, že rychlost druhého vlaku je rovna $v+9$ a doba jízdy druhého vlaku na stejné trase je rovna $t-\frac{2}{3}$,[13] následně zapíše soustavu rovnic $v \cdot t = 336$ a $(v+9)(t-\frac{2}{3}) = 336$ a převede ji na rovnici o jedné neznámé, obdrží **1 bod**. Pokud tuto rovnici vyřeší, dostane **2 body**. Jestliže dořeší soustavu při zvoleném označení, získá **3 body** (získá se $v = 63$ a $v+9 = 72$ nebo $v = 63$ a $v-9 = 54$.)

Kritéria hodnocení při zohlednění specifických poruch učení v matematice

Příklad 1.

Pokud uchazeč předvede následující řešení: v – rychlost prvního vlaku, t – doba v hodinách, za niž první vlak překoná celou trasu

$$v - 9 = \frac{336}{t+\frac{2}{3}} \qquad \begin{cases} 336 = v \cdot t \\ 336 = (v-9)t + \frac{2}{3} \end{cases}$$

a dále v řešení nepokračuje, je takové řešení zařazeno do kategorie „řešení obsahující hlavní kroky“ a udělíme **2 body**, i když v druhé rovnici soustavy uchazeč neuvedl výraz $t+\frac{2}{3}$ v závorkách. Zápis rovnice $v-9 = \frac{336}{t+\frac{2}{3}}$ signalizuje správnou závislost mezi veličinami.

[13] Tj. student chybně vyjádří, že první rychlejší vlak s rychlostí v je pomalejší než druhý vlak, neboť uvažuje $v+9$ jako rychlost druhého vlaku.

Příklad 2.
Jestliže student provede následující řešení: v – rychlost prvního vlaku, t – doba v hodinách, za niž první vlak překoná celou trasu

$$v-9=\frac{336}{t+\frac{2}{3}} \qquad \begin{cases} v=\frac{336}{t} \\ v-9=\frac{336}{t+\frac{2}{3}} \end{cases} \qquad \frac{363}{t}-9=\frac{336}{t+}$$

a tím řešení skončí, pak takové řešení řadíme do kategorie „vyřešení hlavních kroků úlohy“ a udělíme **3 body**, přestože v rovnici $\frac{363}{t}-9=\frac{336}{t+}$ vyměnil cifry v čísle 336 a vynechal $\frac{2}{3}$ ve jmenovateli.

Příklad 3.
Když uchazeč obdrží jinou rovnici, např. $v^2+9v-4\,536=0$ místo rovnice $v^2-9v-4\,536=0$ (např. v důsledku chybného přepisu znaménka nebo čísla), následně vyřeší získanou kvadratickou rovnici, zamítne záporné řešení a ponechá výsledek, který může být rychlostí jednoho z vlaků, pak se takové řešení řadí do kategorie „úplné řešení“ a ohodnotí se **5 body**.

Zdroje

[1] Centralna Komisja Egzaminacyjna. *Egzamin maturalny z matematyki.* Poziom podstawowy. Maj 2013 [online]. Warszawa: CKE, 2013. [Cit. 28. 6. 2013]. Dostupné z http://www.cke.edu.pl/files/file/Arkusze-2013/Matura-2013/matematyka_PP_A.pdf

[2] Centralna Komisja Egzaminacyjna. *Egzamin maturalny 2013. Matematyka.* Poziom podstawowy. Kryteria oceniania odpowiedzi. Maj 2013 [online]. Warszawa: CKE, 2013. [Cit. 28. 6. 2013]. Dostupné z http://www.cke.edu.pl/files/file/Arkusze-2013/Matura-2013/Kryteria-Oceniania/matematyka-PP.pdf

[3] Centralna Komisja Egzaminacyjna. Wybrane wzory matematyczne [online]. Warszawa: CKE, 2013. [Cit. 28. 6. 2013]. ISBN 978-83-7400-263-9. Dostupné z http://www.cke.edu.pl/images/stories/Tablice/tablice_matematyczne.pdf