Učitel matematiky

Emil Calda

Jak se také dá poznat pravoúhlý trojúhelník

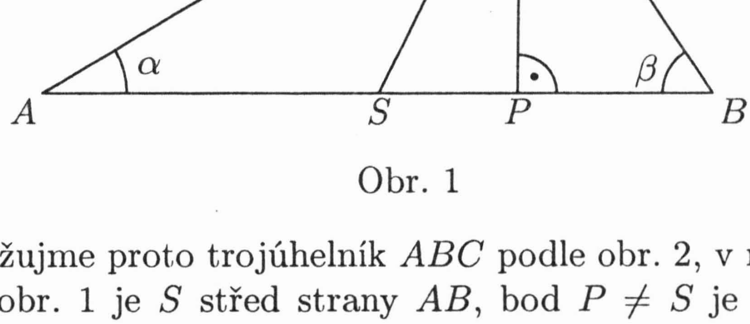
Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 3, 159–161

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149505

JAK SE TAKÉ DÁ POZNAT PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

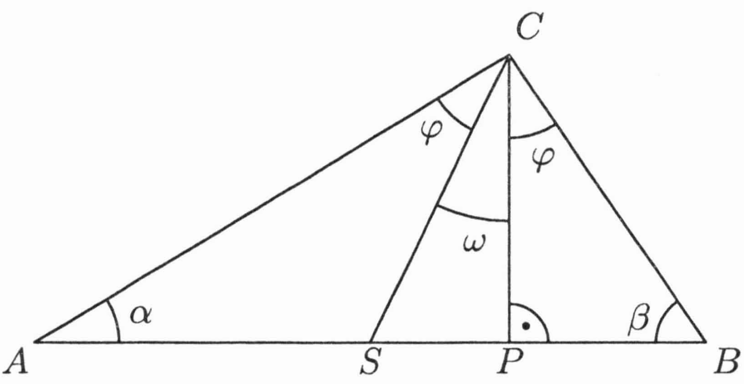
EMIL CALDA

Na obr. 1 je sestrojen trojúhelník ABC, v němž S je střed strany AB a bod $P \neq S$ je pata výšky spuštěné z bodu C na stranu AB; dále jsou v něm kromě úhlů α, β vyznačeny úhly ε, ω a φ. Je-li tento trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, leží tento vrchol na kružnici s průměrem AB, takže trojúhelník ASC je rovnoramenný a platí $\alpha = \varepsilon$. Protože ostré úhly φ, α mají ramena navzájem kolmá, je $\varphi = \alpha$, a tedy také $\varphi = \varepsilon$. Je-li tedy úhel BCA pravý, jsou úhly φ a ε shodné. Co když ale o trojúhelníku na obrázku není známo, že při vrcholu C je pravý úhel, ale víme přitom, že úhly φ a ε jsou shodné – plyne z toho, že úhel BCA je pravý? Ukážeme, že ano.



Obr. 1

Uvažujme proto trojúhelník ABC podle obr. 2, v němž stejně jako v obr. 1 je S střed strany AB, bod $P \neq S$ je pata výšky z vrcholu C na stranu AB a úhly ACS a PCB mají velikost φ; úhel SCP, tj. úhel ω, je nenulový, neboť předpokládáme, že body S, P jsou různé.



Obr. 2

Nejprve vyjádříme velikosti úhlů α, β pomocí úhlů φ, ω. Protože velikost úhlu CSP je $90° - \omega$ a velikost vedlejšího úhlu CSP je $180° - (90° - \omega) = 90° + \omega$, platí:

$$\alpha = 180° - \varphi - (90° + \omega) = 90° - \varphi - \omega, \qquad \beta = 90° - \varphi.$$

Vzhledem k tomu, že S je střed strany AB, je poměr $\frac{|SC|}{|AS|}$ roven poměru $\frac{|SC|}{|BS|}$, dostáváme podle sinové věty:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{\sin\beta}{\sin(\varphi+\omega)}$$

neboli

$$\frac{\sin(90° - \varphi - \omega)}{\sin\varphi} = \frac{\sin(90° - \varphi)}{\sin(\varphi + \omega)},$$

takže je

$$\cos(\varphi+\omega)\cdot\sin(\varphi+\omega) = \cos\varphi\cdot\sin\varphi$$

Vynásobíme-li tuto rovnost dvěma, podle vzorce pro dvojnásobný úhel platí

$$\sin 2(\varphi+\omega) = \sin 2\varphi$$

a protože se jedná o ostré úhly, platí

$$\varphi + \omega = \varphi \qquad \text{nebo} \qquad 2(\varphi+\omega) = 180° - 2\varphi$$

Z první z těchto rovností dostáváme $\omega = 0$, kterýžto úhel nevyhovuje výše uvedenému předpokladu; podle druhé je

$$\varphi + \omega = 90° - \varphi \qquad \text{neboli} \qquad 2\varphi + \omega = 90°$$

Tento výsledek znamená, že úhel BCA v uvažovaném trojúhelníku je pravý, což jsme chtěli dokázat.

Doufám, že tento pozoruhodný výsledek se nejednomu čtenáři zalíbí stejně jako se líbí i mně.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz

ABSTRACT

The author presents a proof that when given triangle ABC, point $P \neq S$ is a foot of a perpendicular from C on AB, and S is the middle of AB, then if angle ACS equals angle PCB, then angle BCA is a right one.