

Učitel matematiky

Katarína Bachratá; Hynek Bachratý

Budovanie matematických predstáv pomocou manipulácií

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 2, 65–75

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149495>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2013

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

BUDOVANIE MATEMATICKÝCH PREDSTÁV POMOCOU MANIPULÁCIÍ

KATARÍNA A HYNEK BACHRATÝ

Úvod

Tento článok je pokračovaním článku *Prirodzené tempo budovania matematických predstáv* (viz [1]). Oba články nadväzujú na prednášku autorov „Ručné práce v matematike“ zo 17.2.2012 na konferencii *Dva dny s didaktikou matematiky* na Pedagogickej fakulte Karlovej Univerzity v Prahe. Chceme prezentovať a analyzovať ďalšie situácie, v ktorých zvoľnenie tempa práce prinieslo zaujímavé výsledky. Podľa nášho názoru bolo v prvom rade prínosom pre vzdelávanie žiakov, ďalej nám pomohlo potvrdiť a uvedomiť si platnosť viacerých didaktických zákonitostí a postrehnúť aj niektoré nové myšlienky a nápady. Pri výbere situácií opísaných v tomto texte aj naďalej spoločným motívom zostáva niekedy úmyselne a niekedy šťastnou náhodou zaradená etapa manuálnej práce a experimentovania.

LEGO Technik

Manipulácia a tvorivá hra so stavebnicou LEGO podporila priestorovú predstavivosť už u niekoľkých generácií detí. My sme si pri príprave tohto textu spomenuli na situáciu, v ktorej sa náš, vtedy asi 4-ročný syn Martin hral so stavebnicou LEGO Technik. Hračka, poskladaná z LEGA bola autíčko s volantom. Otáčanie volantu spôsobovalo otáčanie kolies. Hračka vlastne nepatrila Martinovi, dostal ju pod stromček jeho otec. Mama totiž videla, že kým otec nebude mať svoju vlastnú stavebnicu, nepustí vlastné deti k ich LEGU a budú navždy odkázané byť podávačmi kociek a obdivovateľmi jeho majstrovských stavieb. Autíčko bolo

pod stromčekom slávnostne poskladané a uložené na miesto, kam malý Martin nedosiahol.

Martin si často autíčko vypýtal na hranie a pozoroval, ako sa otáčanie volantu prenáša na otáčanie kolies. Neskôr sa s autíčkom začal schovávať. Tajne odpojil jednu dve kocky, pozrel sa, ako vlastne funguje prevod z volantu na kolesá, potom kocky vrátil na miesto a autíčko vrátil. Postupom času bolo odpojených kociek viac a pomaly už bolo rozobraté celé auto. Kocky boli naukladané na stôl v poradí, ako ich odpájajal z auta. A potom, sám si nebol istý, ako to skončí, začal skladať auto naspäť. Bol to veľký stres, auto muselo nielen vyzeráť tak ako predtým, ale aj fungovať. Nakoniec bol schopný sám, bez návodu, rozobrať a poskladať celé auto.

Keď sa raz auto pri utieraní poličky rozsypalo na jednotlivé diely, ponúkla mu mamina, aby ho poskladal sám podľa návodu. Prehlásil, že to nevie. A až po dvoch troch rokoch bol ochotný začať skladať stavby z LEGA aj podľa návodu. Skladanie podľa návodu sa neučil, zrazu „to vedel“. A v druhej triede vedel na požiadanie aj napísať „návod“ na stavbu, ktorú si sám vymyslel. Najprv bol návod obrázkový, neskôr vymyslel pre diely LEGA slovné pomenovania a celý postup zapísal slovami. Hoci nie všetky slová boli spisovné, podľa jeho návodu sa dala postaviť presne taká stavba ako tá, podľa ktorej návod napísal.

Martinko sa najskôr naučil rozoberať auto, potom ho skladať a až nakoniec sa naučil skladať auto podľa napísaného návodu. Vtedy sa nám to zdalo zábavné, že si takto obrátil poradie. Teraz už veríme, že si zvolil veľmi prirodzenú cestu. Najskôr s autíčkom manipuloval, až potom, omnoho neskôr, formálne zapísal svoj postup. Koniec koncov, koľko z nás si prečíta celý návod, kým začne používať nový spotrebič ...

Na druhej strane si spomeňme, ako rozšírené, akceptované a populárne je také vyučovanie matematiky, v ktorom žiakom povieme návod a následne chceme, aby presne zopakovali postup. Bez toho, aby poznali prostredie a mali základné skúsenosti s jednoduchšími situáciami, predvedieme im matematiku v celej jej hotovej a formálnej podobe. Potom sa trápia žiaci, kým sa naučia predvedené postupy zopakovať, a trápia sa aj učitelia, keď zistia,

že miesto poznania vznikla len jeho imitácia.

Konstrukčná geometria

Siedmaci a rysovanie

V lete 2011 sme na letnom sústreďení riešiteľov matematického korešpondenčného seminára SEZAM uskutočnili experiment, ktorý bol v mnohom podnetný až prekvapujúci a otvoril pred nami nové oblasti skúmania a záujmu. Jeho podrobnejší popis nájde čitateľ v [1]. Tu zhrnieme jeho obsah a pridáme ďalšie, nadväzujúce skúsenosti. Aj keď pochádzajú z oblasti záujmovej matematiky, veríme, že sú využiteľné všeobecne, teda aj v školskom prostredí.

V roku 2011 sme sa v súťaži SEZAM rozhodli zmeniť svoj prístup k práci so žiakmi v oblasti geometrie. Dôvodov bolo viacero. Prvým signálom bolo, že niektoré populárne a osvedčené geometrické úlohy, ktoré sa v našich zadaniach objavujú pravidelne, sa zrazu stali pre deti z rôznych dôvodov ťažké a nevhodné. Nepoužili predpokladaný geometrický aparát (napr. Thalesovu vetu), neboli schopné zvládnuť a previazať viac etáp riešenia, objaviť viac typov riešení atď. To nás viedlo k presnejšiemu uvedomeniu si situácie vo vyučovaní geometrie v školách. Geometria postupne a dlhodobo strácala obľúbenosť a postavenie. Aj keď z hľadiska fylogénzy je pre žiakov druhého stupňa mimoriadne vhodnou a primeranou oblasťou matematiky, zdá sa, že geometria kladie stále silnejší odpor voči transmisívnym, formálnym (v prípade Slovenska aj „atraktívnym elektronickým“) metódam vyučovania. Jednoduchšie povedané, kauzálny, „grécky“ spôsob myslenia sa nedobre znáša s predkauzálnymi, „egyptskými“ metódami vyučovania. V rokoch 2006–2010, v rámci školskej reformy na slovenských školách, došlo aj na ďalší logický krok: redukciu záväzného obsahu učiva geometrie a posunutiu toho, čo ostalo, do vyšších ročníkov. Po pravde, vzhľadom na potreby a schopnosti veľkej časti našich žiakov (a učiteľov) v tejto oblasti išlo o jeden z rozumnejších krokov reformy (aj keď je stále dosť tých žiakov a učiteľov, ktorých oprávnené zarmútil).

V oblasti záujmovej matematiky nás táto zmena nezarmútila, ale inšpirovala. Na rozdiel od napríklad kombinatoriky alebo lo-

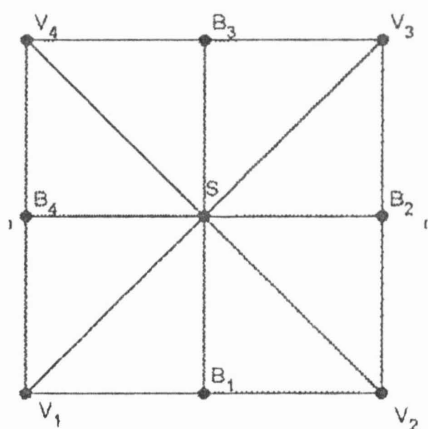
giky, kde sme sa vždy mohli venovať v prvom rade propedeutike pojmov v duchu teórie generických modelov (ukážky pozri [2], [3], TGM pozri [4], [5]), v geometrii sme dlhé roky pracovali skôr reedukačne. Hľadali sme zaujímavé témy a úlohy na skutočné využitie a pochopenie rozsiahlych, ale predčasných až nadbytočných školských znalostí rôznych vzorcov, viet a postupov. Na jar roku 2011 sme sa na základe vyššie spomenutých zmien osnov a výraznej redukcie ich geometrického obsahu rozhodli aj v tejto oblasti pokúsiť o dôsledný konštruktivistický prístup a postup „od základov“. Predpokladali sme len základnú, z vlastných skúseností žiakov vychádzajúcu znalosť najjednoduchších geometrických objektov a schopnosť práce s rovnou čiarou a vzdialenosťami, previazanú na používanie lineára a kružidla. Všetko ďalšie malo byť výsledkom objaviteľskej práce žiakov.

Na letnom sústreďení našich úspešných riešiteľov sme k tomuto objavovaniu mali priestor štyroch hodinových stretnutí (s dvojdňovým rozstupom) so stabilnou skupinou detí. Čas sme plánovali naplniť riešením kaskády prevažne konštrukčných úloh zo štyroch oblastí: práca so štvorcem, s trojuholníkom, s kružnicou a s obdĺžnikom. Časovo aj významovo sa nakoniec stala ťažiskom práca so štvorcem, ktorú budeme ďalej popisovať. Pre úspešný priebeh aktivity mal veľký význam návrh vhodného (didaktického) prostredia, ktoré pôsobilo motivačne na žiakov a umožnilo vhodnú formuláciu plánovaných (a neskôr skutočným priebehom modifikovaných) úloh. Pre jeho popis použijem krátený citát z [1]: *Príbeh bol o matematikoch pomáhajúcich archeológom v hľadaní v púšti stratených civilizácií. Každá z nich žila v mestách určitého geometrického tvaru. Archeológom sa občas podarilo v piesku objaviť niektoré časti miest a zaniest ich do mapy. Od geometrov potrebovali, aby na základe tejto informácie v mape vyznačili pôdorys celého mesta. Keďže v púšti sme ďaleko od vymožeností nášho storočia, na prácu s mapou nemáme digitálne technológie, ale len starodávne rysovacie pomôcky.*

Príbeh bol zvolený veľmi šťastne, bol ozaj dôveryhodný a prirodzený. Predstava množstva horúceho piesku, ktorým by sme sa pri zlom určení pôdorysu zbytočne prehrabávali, podvedome mo-

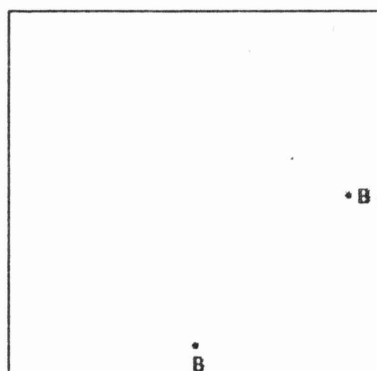
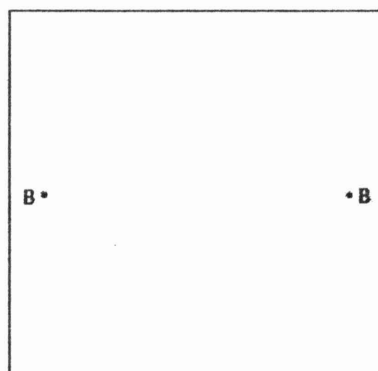
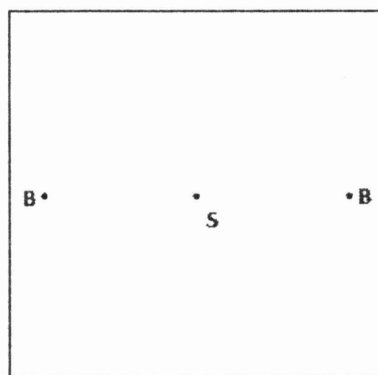
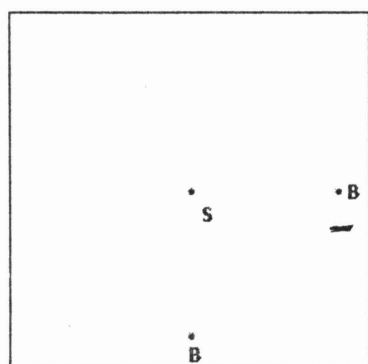
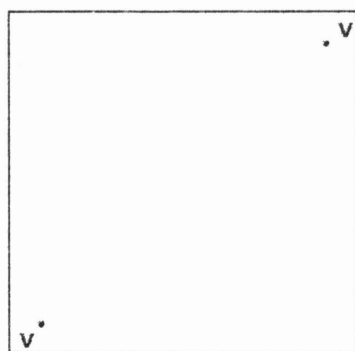
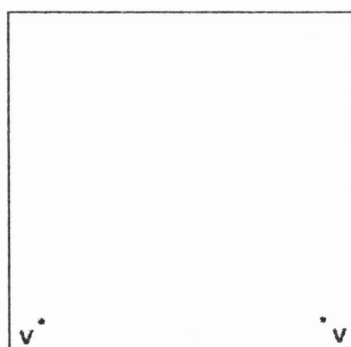
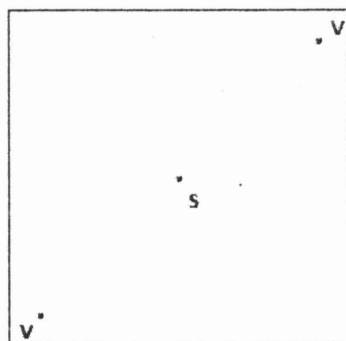
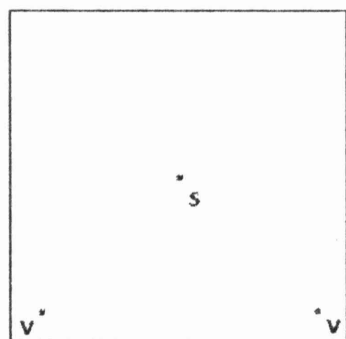
tivovala deti k presnému a zodpovednému riešeniu každej úlohy. Po zvládnutí každej úlohy nám piesočná búrka „zotrela tabuľu“, umožnila objavenie nových zrúcanín a otvorila ďalší problém. Archeologická rozprávka v prípade potreby umožnila povolať na scénu Indianu Jonesa, ktorý niekedy odniesol pravítka s ryskou, inokedy požičal uhloмеры atď. Mohli sme tiež pracovať s mapami púšte: keďže je pustá, vierohodne ju zastupovali čisté papiere s niekoľkými vyznačenými bodmi.

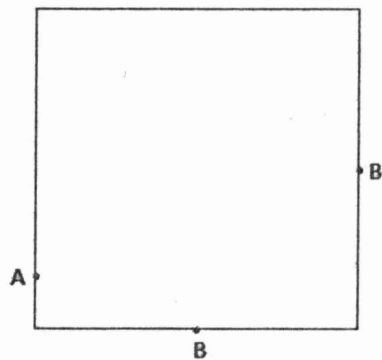
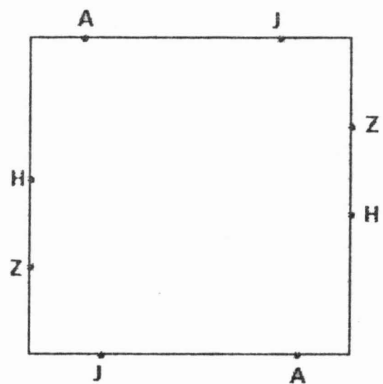
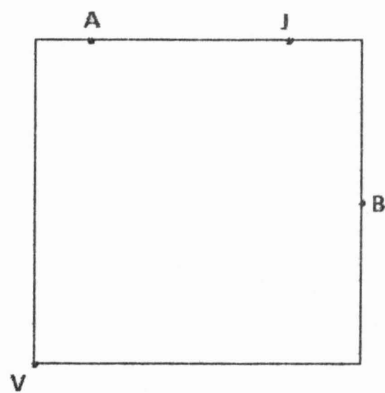
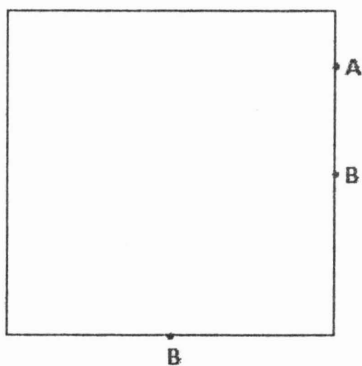
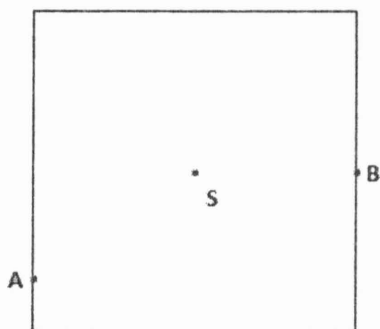
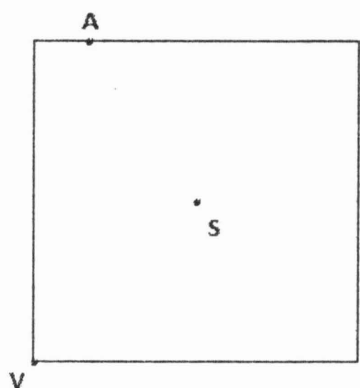
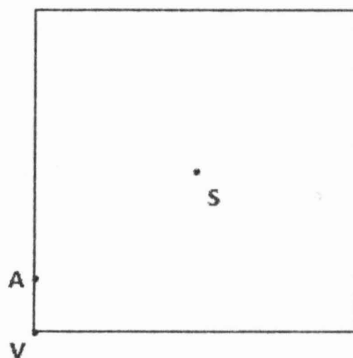
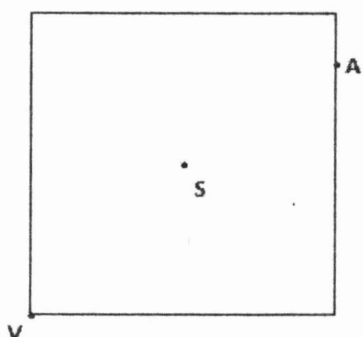
Úlohy o štvorci boli v duchu rozprávky motivované pátraním po mestách kmeňa Kvadrónov. Tie mali tvar štvorca, v ktorého strede bola studňa a vo vrcholoch strážne veže. Neskôr boli archeológmi objavené a do úloh zakomponované aj brány v stredoch strán a nakoniec aj sochy



(Atény, Jupitera, Dia ...) na ľubovoľnom mieste hradieb, ktoré sa ale vždy stavali v stredovo súmerných dvojiciach. Dôležité pre prácu detí boli aj cestičky vychodené od veží (neskôr aj od brán) ku studni. Pre žiakov sme pripravili postupnosť úloh, v ktorých bolo vždy potrebné na základe niekoľkých vykopaných objektov zrekonštruovať pôvodný tvar mesta, teda objaviť zvyšné, zatiaľ nevyhrabané objekty (hlavne veže) a na záver zakresliť pôdorys mesta. Tri skupiny úloh (veže, brány, veže aj brány aj sochy) vidíme na obrázkoch. Deti zadania dostávali v podobe pracovných listov, t.j. čistých papierov formátu A4 alebo A3, na ktorých boli zakreslené polohy „vykopaných“ bodov a na ktorých pokračovali vo vlastnej práci.

Sada úloh o štvorcoch mala byť náplňou prvého, hodinového stretnutia. V skutočnosti nám zabrala hodiny takmer tri. Na takúto zmenu časového plánu sme ale zvyčajne pripravení a zvyknutí a v podmienkach mimoškolskej matematiky nie je problém prispôbiť sa tempu detí. Na téme navyše pracovali zhodou okolností iba žiaci 7. ročníka, ktorí sú na sústreďení najmladšou a teda aj





matematicky najmenej skúsenou skupinou.

Omnoho zásadnejšie a kľúčové boli zmeny v predpokladanom priebehu a spôsobe práce detí. Kaskáda úloh bola pripravená tak, že každá využívala znalosti získané z riešenia predchádzajúcich úloh. Očakávali sme, že v princípe žiaci po objavení určitého konštrukčného postupu budú tento vedieť použiť a používať v nasledujúcich úlohách. Inak povedané, po zvládnutí novej „komplikačie“ v zadaní prevedú úlohu na niektorú z predchádzajúcich situácií a riešenie ľahko dokončia už objaveným spôsobom. To, ako prebieha samotné objavovanie, nás zaujímalo najviac a pozorovanie tohto procesu malo byť hlavným prínosom experimentu. Predpokladali sme, že vzhľadom na jednoduchosť prvých úloh a ich dobrú nadväznosť v kaskádach budú žiaci jednotlivé konštrukcie hlavne „vymýšľať“, prípadne si ich určitým neformálnym spôsobom zapisovať alebo inak evidovať. Keďže vo výbave sústredení máme aj rysovacie pomôcky, chceli sme v primeranej miere pri niektorých úlohách objavené konštrukčné postupy aj reálne vykonať.

Skutočný priebeh práce bol úplne odlišný. Už pri riešení prvej úlohy deti okamžite začali pracovať s rysovacími pomôckami. K fáze „vymýšľania“ a prípadného „zapisovania postupu“ nikdy nedošlo, žiaci ju nepotrebovali a nedospeli k nej. Naopak manipulácia s nástrojmi sa ukázala ako úplne zásadná a ťažisková. V prvých okamihoch sme sa potešili, že sa nám pomocou nej vizualizuje inak skrytý proces a postup myslenia detí. Veľmi rýchlo sa ale ukázalo, že táto manipulácia nie je akýmsi vonkajším prejavom duševných pohybov, ale skutočnou podstatou a jadrom objaviteľského postupu. Nápady detí sa nerodili primárne v ich hlave, ale v podstate metódou pokus - omyl vznikali z manipulácie s rysovacími pomôckami. Ruky detí striedavo brali a odkladali ceruzku, pravítko, kružidlo, prikladali a zamerali ich na rôzne dvojice bodov, postupne a vytrvalo skúmali a zamietali rôzne možné cesty riešenia úlohy. Tak isto v manipulatívnej podobe prebiehali aj objavy správnych krokov: väčšinou už pri prvom správnom a potrebnom „priložení“ pomôcok sa tápavé pokusy zmenili na razantné vykreslenie čiary, oblúku alebo priesečníku. Tento postup viedol tiež k tomu, že po skončení práce a nakreslení poslednej čiary

pôdorysu bolo jasné, že úloha je vyriešená, a to správne. Splnili sme požiadavku archeológov a nikto necítil potrebu vracat' sa ku konštrukcii, dokazovať jej správnosť alebo si zapisovať jej postup. Myslíme si, že sme tu na vlastné oči videli ilustráciu štandardného tvrdenia, že historicky geometria vznikla zo zememeračstva.

Ale videli sme omnoho viac. Nepotvrdil sa napríklad náš predpoklad spôsobu riešenia nadväzujúcich úloh. Očakávali sme, že už objavené postupy (napr. zostrojenie stredu úsečky, osi úsečky, trochu zložitejšia a tiež často sa opakujúca konštrukcia polohy veže pomocou zadaných dvoch s ňou susedných brán) budú deti pri ďalších úlohách bez problémov používať, v prípade potreby schopné popísať a možno ako „známe“ aj preskakovať pri rozbore riešenia zložitejších úloh. V skutočnosti (podľa [1]): *Pri prvých opakovaníach bol celý postup objavovaný nanovo. Pri ďalších bolo možné postupne pozorovať najskôr nárast odhodlania, potom dôvery a napokon istoty dieťaťa vo vlastnú schopnosť zopakovať tento objav. Priebeh konštrukcie pritom stále zostával na objaviteľskej úrovni, mierne sa len znižoval počet „testovaných“ nesprávnych krokov. Až po tomto štádiu bolo možné pozorovať, že v určitých okamžikoch dieťa namiesto objavovania spomína a niektoré časti konštrukcie (nie celú) vykonáva na základe určitého pamäťového záznamu. Aj po mnohých opakovaníach a takmer istom zvládnutí konštrukcie bola táto vždy a precízne vykonaná znovu.*

Pre skúmanie spôsobov prvotného ukladania objavených konštrukcií do vedomia žiakov a zrejme aj stimuláciu tejto schopnosti je dôležitý aj ďalší postreh. Vo viacerých prípadoch sme do kaskády zaradili skupinu úloh, postupne sa líšiacich vždy len pridaním jedného „novo vyhrabaného“ bodu. Očakávali sme, že deti pri riešení nadväzujúcich úloh zopakujú postup riešenia predchádzajúcej, pričom vo vhodnom okamihu využijú nový bod pre zjednodušenie a skrátenie svojho postupu. Opäť citujeme [1]: *Pri prvých úlohách deti doplnený bod ignorovali a sústredili sa na znovobjavenie pôvodnej konštrukcie. V ďalšom štádiu chvíľami prerušovali hľadanie konštrukcie a venovali novému bodu krátky pohľad, zdalo sa ale, že ich skôr vyrušuje a prekáža im pri práci. Po niekoľkých úlohách došlo k ďalšiemu posunu, stratila sa negatívna*

emócia a bodu boli venované krátke chvíle premýšľania. Zrejme na ich základe nakoniec došlo k očakávanému využívaniu bodov pre zjednodušenie konštrukcií. Zdá sa nám, že takéto dopĺňanie zadání umožní na základe reakcie dieťaťa diagnostikovať mieru osvojenia si pôvodnej konštrukcie. Druhým efektom je najskôr odvádzaním pozornosti a neskôr zvažovaním možnosti využitia tejto informácie, podporovať pamäťový a konceptuálny záznam priebehu konštrukcie.

(Dokončení v ďalšom čísle)

Literatúra

- [1] Bachratý H., Bohiníková A., Vykopaná geometria: ako nás školská reforma vrátila o 2500 rokov do minulosti, *Zborník celostátní konference „Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let“* Litomyšl, 29–43
- [2] Bachratý H., Ako si z kociek postaví pekný hrad a ešte krajšiu matematiku, *Zborník celostátní konference „Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 str.“* Litomyšl, 61–72
- [3] Bachratý H., Logika nápisov a tabuliek (Úlohy o autoreferenčných sústavách výrokov a viet), *Zborník příspěvků z letnej školy z teórie vyučovania matematiky PYTAGORAS 2003*
- [4] Hejný, M. at al., *Creative teaching in mathematics*, Charles University in Prague, Czech Republic, Kassel University, Germany, Aristotle University, Thessaloniki, Greece, University of Derby, United Kingdom. 2006.
- [5] Hejný M., Schéma – pilíř matematické znalosti, *Zborník příspěvků z letnej školy z vyučovania matematiky PYTAGORAS 2007* Hronec, 2007
- [6] Krnáč J., Siláči J., Šuch O., Využitie jazyka python vo výučbe, *In: DidInfo 2011, 17. ročník národnej konferencie* Banská Bystrica,

- [7] Hanč J., Hančová M., Moderné didaktické metódy vo výučbe a popularizácii matematiky, 43. konferencia slovenských matematikov Jasná pod Chopkom, EDIS-Vydavateľstvo Žilinskej univerzity, Žilina, 2011

Doc. RNDr. Katarína Bachratá, PhD.

RNDr. Hynek Bachratý, PhD.

Katedra informačných sietí

Fakulta riadenia a informatiky Žilinskej univerzity

Univerzitná 1, 010 26 Žilina

Slovensko

e-mail: Katarina.Bachrata@fri.uniza.sk

e-mail: Hynek.Bachraty@fri.uniza.sk

ABSTRACT

The article is a continuation from the previous issue. It focuses on activities which aim at building new mathematical knowledge via manipulation and experimenting. One activity is a Logo construction set which can be used for developing spatial imagery. The main part of the article aims at geometric constructions with constructing tools – it consists of stories which motivate pupils to construct shapes using the knowledge of some of their properties. It is shown that the stage of constructing the shape is indispensable and that the constructing itself is a part of the discovery process. It is documented that in the teaching process, the phase of experimenting and making hypotheses is underestimated and unnecessarily accelerated. The third part of the article concerns university students. It is shown how land surveying can be used for motivating them for mathematics and developing their geometric knowledge. The authors support the constructivist approaches to the teaching of mathematics.