Emil Calda

Můj zdravý rozum a nekonečno

Učitel matematiky, Vol. 21 (2013), No. 1, 37–42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149484

MŮJ ZDRAVÝ ROZUM A NEKONEČNO

Emil Calda

Zůstane-li vám rozum nad něčím stát,
je to znamení, že ho stále ještě máte.

Uvedeným názvem bych rád naznačil, že zdravý rozum v současné době pořád ještě mám, i když o tom pochybuji stále častěji. Snad bych měl také podotknout, že k problematice mého zdravého rozumu se často vyjadřuje i má žena, ale pro následující úvahy není zapotřebí, abych zde její závěry reprodukoval.

S nekonečnem jsem měl potíže už v době, kdy jsem učil na střední škole. Na jedné mé vyučovací hodině, ve které jsme probírali limitu posloupnosti a na které byla jako hospitující přítomna zástupkyně ředitele (aprobace matematika, deskriptivní geometrie), jsem několikrát použil formulaci „n jde do nekonečna“. Při následném pohovoru jsem se dověděl, že bych to říkat neměl, protože nekonečno by mohlo v žácích vzbuzovat dojem, že existují věci nepoznatelné, které – jak jistě vím – neexistují. Taky by se prý mohli domnívat, že tam – nedej pánbu! – sídlí Bůh, a že bych měl proto raději říkat „n roste nade všechny meze“. Pomyslel jsem si, že Bůh by mohl sídlit i nade všemi mezemi, ale vzmohl jsem se jen na námitku, že je to obvyklé rčení, a to i v matematice socialistické. Dovolil jsem si dokonce oponovat, že si nemyslím, že když o něčem nebudeme mluvit, tak že to nebude existovat. Byl jsem tenkrát ještě mladý a myslel jsem si, že argumenty mohou někoho přesvědčit. Nicméně však od této doby vždy, když byla ve třídě hospitace, „rostlo n nade všechny meze“ a do nekonečna chodívalo jindy.

V současné době jsem se s nekonečnem vyrovnal – jedním z důvodů je, že se tam asi brzy odeberu. Nicméně však můj zdravý rozum se s některými nepochybnými fakty, která se nekonečna týkají, vyrovnat nedokázal a stále se jim diví. Některé z nich se pokusím ukázat navzdory tomu, že jde o matematické výsledky dobře známé.

První ukázkou je těleso, které má konečný objem a nekonečný povrch. Představme si válec s poloměrem podstavy rovným $\frac{1}{2}$ a výškou 2, na jehož horní podstavu postavíme druhý s poloměrem podstavy $\frac{1}{4}$ a výškou 4 tak, že osy obou válců splývají. Stejným způsobem připojíme k těmto dvěma válcům třetí, jehož poloměr podstavy je $\frac{1}{8}$ a výška 8, na tyto tři postavíme čtvrtý s poloměrem podstavy $\frac{1}{16}$ a výškou 16 a tímto způsobem pokračujeme tak, aby poloměr podstavy n-téhoválečku byl $\frac{1}{2n}$ a jeho výška byla rovna $2n$. Pro objem V_n a obsah S_n pláště n-tého válce zřejmě platí

$$V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot 2^n = \frac{\pi}{2^n}$$

$$S_n = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot 2^n = 2\pi.$$

Je zřejmé, že pro objem V a obsah S pláště tělesa tvořeného nekonečně mnoha těmito válečky dostaneme:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = \pi$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = 2\pi \cdot (1 + 1 + \cdots + 1 + \ldots) = \infty$$

Zjistili jsme, že objem vzniklého tělesa je roven π a je tedy konečný, zatímco obsah jeho pláště konečný není. Každému, kdo něco ví o nekonečné geometrické řadě, je to naprosto jasné, ale můj zdravý rozum, který se mi pořád nedaří potlačit, se proti tomu vzpouzí.

Představ si, povídá, *že poloměr podstavy i výška každého válečku jsou dány v centimetrech a že máme plechovku, ve které je π cm^3 barvy. Představ si dále, že všechny válečky jsou duté a že v jejich podstavách jsou otvory, kterými jsou propojeny, takže barva, kterou přelejeme z plechovky s objemem π cm^3 do uvažovaného tělesa, vyplní celý jeho objem. Neobarví však celou jeho vnitřní plochu, neboť její obsah je nekonečný. Není to divné? Je možné, aby kapalina zcela vyplňující duté těleso nesmáčela celý jeho vnitřek?!*

Chcete-li tuto úvahu zpochybnit argumentem, že uvedené těleso je konstruovatelné pouze myšlenkově a že se nedá realizovat, takže tato situace vůbec nemůže nastat, zdravý rozum vám namítne, že ani v myšlenkových experimentech by žádný rozpor být neměl. A tak se chvíli dohadujete, až vás to oba přestane bavit a k žádnému sblížení rozdílných stanovisek nedojde. Zdravý rozum jen tak nepřesvědčíte, i když se může stát, že v ojedinělých případech úspěšní budete.

Mně se například podařilo dosáhnout toho, že můj zdravý rozum už se nediví tomu, že součet nekonečně mnoha kladných sčítanců nemusí být nekonečně velký, ale že může být roven určitému číslu. Pochopil to na příkladě nekonečné geometrické řady s kvocientem $|q| < 1$, tj. řady, pro jejíž členy a_n je $\lim a_n = 0$. To však mělo za následek, že se začal domnívat, že součet každé řady, jejíž členy konvergují k nule, je určité číslo a není tedy nekonečně velký. Chcete-li mu ukázat, že se mýlí, vezmete nejspíš harmonickou řadu a dokážete mu, že tato řada diverguje k nekonečnu. Pro zajímavost si důkaz tohoto tvrzení ukážeme, a to v jiné podobě, než bývá obvyklé.

Vyjdeme z toho, že víme, že posloupnost $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a že má za limitu číslo e. Znamená to, že pro všechna přirozená čísla n platí $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$, neboli $n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1$, to je $\dfrac{1}{n} > \ln(1 + 1/n)$. Z této poslední nerovnosti dostáváme, že pro všechna n platí:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} >$$
$$> \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \ln(n+1).$$

Tento výsledek znamená, že rostoucí posloupnost částečných součtů harmonické řady není shora omezená, takže tato řada diverguje k plus nekonečnu.

Důkaz jste zdárně dokončili, ale už se o slovo hlásí zdravý rozum. *Představ si, praví, že z tvrdého papíru vystřihneme čtverečky, jejichž obsah v dm*^{2} *je postupně* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, *a že těmito čtverečky budeme pokrývat plochu strahovského stadionu. Vzhledem k tomu, že posloupnost částečných součtů harmonické řady je rostoucí a není shora omezená, po jisté době celou plochu pokryjeme. To bych tedy rád viděl*, řekne s ironickým úsměvem, a čeká, co vy na to. A můžete mu vykládat, co chcete, stejně jeho pochybnosti nevyvrátíte.

K ukázce, že součet nekonečné řady může být nekonečný, i když její členy konvergují k nule, se harmonická řada používá velmi často. Nevýhodou je, že k důkazu tohoto tvrzení jsou zapotřebí znalosti překračující rámec střední školy. Existují však jiné řady tohoto typu, jejichž divergence se dokáže snadněji.

Vezmeme-li například řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$, jejíž členy konvergují k nule, ze vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

dostaneme, že pro její částečný součet s_n platí

$$s_n = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - 1$$

Rostoucí posloupnost částečných součtů této řady není tedy shora omezená, což znamená, že daná řada diverguje k plus nekonečnu.

Se součtem nekonečné řady se také setkáváme ve známém Zenónově paradoxu o Achillovi a želvě. Na začátku běžeckého utkání se Achilles nachází v bodě A, želva v bodě Z_1 ve vzdálenosti d od bodu A a oba se v daný okamžik dají do pohybu po přímce AZ_1 – Achilles za želvou rychlostí u, želva od Achilla rychlostí $v < u$. Achilles přiběhne do bodu Z_1 za dobu $t_1 = \frac{d}{u}$, ale želva už tam nebude, protože za tuto dobu se přemístila do bodu Z_2, jehož vzdálenost d_1 od bodu Z_1 je $v \cdot \frac{d}{u}$. Achilles pokračuje ve stíhání a z bodu Z_1 se přemístí do bodu Z_2 za dobu $t_2 = \frac{d_1}{u} = \frac{d}{u} \cdot \frac{v}{u}$. Tímto způsobem se Achilles želvě stále přibližuje, ale podle Zenóna ji nikdy nedohoní, protože vždy, když přiběhne do bodu, kde byla, už v něm nebude. Následující výpočet nám sice neřekne, kde je chyba v Zenónově úvaze, ale umožní nám dobu, za kterou Achilles želvu dohoní, určit. Pro tuto dobu T, která je rovna součtu následující nekonečné řady, platí

$$
\begin{aligned}
T &= t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \\
&= \frac{d}{u} + \frac{d}{u} \cdot \frac{v}{u} + \frac{d}{u} \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^2 + \frac{d}{u} \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^3 + \cdots = \\
&= d \cdot (u - v)
\end{aligned}
$$

neboť kvocient $\frac{v}{u}$ této geometrické řady je kladný a menší než jedna. Achilles tedy želvu dohoní, a to za dobu $T = \frac{d}{u - v}$. Poznamenejme, že ke stejnému výsledku bychom došli snadněji, kdybychom si představili, že želva stojí a Achilles se k ní přibližuje rychlostí $u - v$. Mně ani mému zdravému rozumu není jasné, proč někteří autoři považují tento výpočet za vyvrácení Zenónovy úvahy – tento výpočet pouze potvrzuje to, že Achilles želvu dohoní, a to víme i bez počítání. (Poučení o tom, jak se k tomuto problému staví patamatematika, mohou zájemci najít v [1].)

Doufám, že z řečeného výše bylo vidět, že zdravý rozum, který zde v některých případech zastupoval i názory středoškolských studentů, to při setkání s nekonečnem nemívá lehké. A to před ním skrývám poznatky o tom, že na různě dlouhých úsečkách je stejně bodů, a už vůbec se ho neodvažuji seznámit s paradoxem Banacha a Tarského, který praví, že dvě koule o **různých** poloměrech je možné rozložit na stejný konečný počet disjunktních částí, které jsou navzájem shodné! Zdravý rozum vznikl během historie při práci lidí s množinami konečnými – počet mamutů, které pásl pračlověk, byl vždy konečný a počet žen svedených Donem Juanem také nekonečný nebyl. Nechtějme proto na zdravém rozumu, aby nám radil, když jde o nekonečno, a buďme rádi – i když má řadu nedostatků – že ho máme!

Literatura

[1] Calda, E., *Základy patamatematiky*, Prometheus, Praha, 2005

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz