Emil Calda

Pravoúhlý trojúhelník trochu jinak

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 2, 119–120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149463

PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK TROCHU JINAK

Emil Calda

O vlastnostech pravoúhlého trojúhelníku pojednává mnoho matematických vět, o jedné jsem se však dozvěděl teprve nedávno. Hned na začátku si dovoluji upozornit, že není nijak důležitá, ale zdá se mi, že její odvození by mohlo „oživit" partii o logaritmech. Týká se vztahu mezi čísly $r = log_{c+b}\, a$, $s = log_{c-b}\, a$, kde a, b jsou velikosti odvěsen a c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku. Všimněme si, že vzhledem k tomu, že a, b, c jsou kladná čísla, existuje první z obou logaritmů vždy, u druhého je nutno navíc předpokládat, že jeho základ je větší než jedna, tj. že platí $c > b + 1$.

Než se do odvození tohoto vztahu mezi čísly r, s pustíme, připomeneme si, že pro logaritmy o různých základech platí

$$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a},$$

kde a, b jsou kladná čísla různá od jedné a x kladné; položíme-li v této rovnosti $x = b$, dostaneme rovnost

$$log_a b = \frac{1}{log_b a} \text{ neboli } log_a b \cdot log_b a = 1,$$

kterou zanedlouho použijeme.

K odvození výše zmíněného vztahu vyjdeme ze známé věty o pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou c, podle které platí

$$a^2 = (c - b) \cdot (c + b),$$

odkud dostaneme

$$2\, log_{c+b}\, a = log_{c+b}(c - b) + 1 \quad \text{a} \quad 2\, log_{c-b}\, a = log_{c-b}(c + b) + 1.$$

Protože součin levých stran těchto rovností se rovná součinu jejich pravých stran, platí:

$$\begin{aligned} 4\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = \log_{c+b}(c-b) \cdot \log_{c-b}(c+b) + \\ + \log_{c+b}(c-b) + \log_{c-b}(c+b) + 1. \end{aligned}$$

Vezmeme-li nyní v úvahu, že součin obou logaritmů na pravé straně této rovnosti je roven jedné a že je dále

$$\log_{c+b}(c-b) = \log_{c+b} \frac{a^2}{c+b} = 2\log_{c+b} a - 1,$$

$$\log_{c-b}(c+b) = \log_{c-b} \frac{a^2}{c-b} = 2\log_{c-b} a - 1,$$

dostáváme

$$4\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = 1 + \left(2\log_{c+b} a - 1\right) + \left(2\log_{c-b} a - 1\right) + 1$$

neboli

$$2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a = \log_{c+b} a + \log_{c-b} a.$$

Dokázali jsme tak větu:
V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou $c > b + 1$ platí:

$$2rs = r + s, \quad \text{kde } r = \log_{c+b} a,\ s = \log_{c-b} a.$$

Literatura

[1] Krečmar, V. A., *Zadačnik po algebre*, Izdatělstvo Nauka, Moskva, 1968.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz