

Učitel matematiky

Šárka Obrdlíková

Výuka matematiky v Norsku 2

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 2, 86–99

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/149459>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VÝUKA MATEMATIKY V NORSKU 2

ŠÁRKA OBRDLÍKOVÁ

Úvod

Tento článek navazuje na (1), kde byl popsán norský vzdělávací systém a také systém testování a hodnocení v Norsku. Nyní se zaměříme na výuku matematiky na gymnáziích v Norsku. V článku je uveden systém vzdělávání v matematice, stručný rozbor norských učebnic a také učivo ve vzdělávací oblasti matematika a kompetence v matematické analýze. Kompetence v ostatních oblastech matematiky, s ohledem na rozsah tohoto článku, uváděny záměrně nejsou (přestože tvoří podstatnou část náplně hodin matematiky).

System výuky matematiky na gymnáziích

Výuka matematiky na středních školách v Norsku je mnohem více diferencovaná, než jak je tomu v České republice. Následující text se týká diferenciaci na úrovni odpovídající našim gymnáziím. Jak již bylo řečeno v předchozím článku, středoškolské vzdělávání ukončené maturitou trvá v Norsku tři roky.

Důraz je kladen na možnost volby a prostupnost mezi jednotlivými stupni obtížnosti. Pro lepší názornost uvádíme tabulku, do které jsou zaneseny všechny možnosti volby pro jednotlivé ročníky uspořádané podle náročnosti, přitom nejnáročnější jsou předměty 1T, R1, R2 (tab. 1).

Studium matematiky je povinné pouze v prvních dvou ročnících gymnázia. V prvním ročníku mají studenti možnost volby mezi dvěma stupni obtížnosti. Těmi jsou Matematika 1P (více praktická varianta) a Matematika 1T (náročnější a více teoretická varianta). Názvy předmětů vychází z norských výrazů *Matematikk praktisk* (praktická matematika) a *Matematikk teoretisk* (teoretická matematika).

1. roč.	2. roč.	3. roč.
1T	R1	R2
1P	S1	S2
	2T	
	2P	

Tabulka 1: Možnosti volby úrovně v jednotlivých ročnících

Studenti si volí zcela dle svých zájmů a schopností. Nicméně vzhledem k tomu, jaký je systém přijímání studentů na vysoké školy, může tato volba zásadně ovlivnit jejich vstup na univerzitu. Například k přijetí na *Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet* (Technickou univerzitu v Trondheimu) je absolvování pouze nižší úrovně matematiky 1P v prvním ročníku nedostačující, neboť se od vyšší úrovně 1T liší skladbou učiva – viz tabulka .

Hodinová dotace je u obou variant stejná, 140 šedesátiminutových hodin, případně odpovídající počet hodin jiné délky, za rok (viz (2)).

Je třeba poznamenat, že ačkoliv jsou stanovené časové dotace předepsány v jednotkách šedesátiminutových hodin, každá škola si může tento celek rozdělit do vyučovacích hodin libovolné délky. V praxi tak většinou hodiny trvají, stejně jako v České republice, 45 minut. Hodiny jsou navíc obvykle spojovány do tzv. dvouhodinovy.

Ti, kteří si zvolí nejkratší, tedy dvouletou, variantu studia matematiky, si v druhém roce studia obvykle volí jednu z variant 2P, 2T. Tyto předměty přímo navazují na předměty 1P a 1T, jsou však méně náročné než předměty S1 a R1 určené těm, kteří se rozhodli ve studiu pokračovat i ve třetím ročníku.

Hodinová dotace předmětů 2P a 2T je shodná, 84 šedesátiminutových hodin (viz (2)). Varianta 2T je opět více teoretická, nicméně mnoho škol tento předmět z důvodu nedostatku zájmu vůbec neotvírá. Studenti, kteří se již nechtějí ve třetím ročníku matematikou zabývat, si totiž raději volí nejjednodušší možnou variantu 2P. Ostatní se rozdělí do skupin S1 a R1, kde je hodinová dotace 140 šedesátiminutových hodin (viz (3)). Vzhledem

k větší náročnosti těchto předmětů je pro studenty lepší před jejich studiem absolvovat předmět 1T. Není to však podmínkou.

Název S1 vychází z norského *Matematikk for samfunnsfag* (matematika pro sociální vědy). Tento předmět je proto zaměřen více prakticky a určen studentům, kteří se budou v budoucnu zaměřovat spíše na humanitní studia.

Varianta R1 (z norského *Matematikk for realfag*, tj. matematika pro přírodní vědy) je nejnáročnější možností ve druhém ročníku. V případě zájmu studentů může být dále doplněna volitelným předmětem Matematika X s dotací 84 šedesátiminutových hodin (viz (4)).

Na variantu R1 navazuje ve třetím ročníku předmět R2. Studentům je však umožněno absolvovat také jednodušší matematiku S2, která je koncipována jako navazující předmět k S1. Hodinová dotace obou variant třetího ročníku je stejná jako u předmětů R1 a S1 ve druhém ročníku.

Učivo ve vzdělávací oblasti matematika

Výuka matematiky je v Norsku koncipována tak, že jednotlivé oblasti matematiky jsou probírány ve více letech (viz (2) a (3)). Dochází tak k tomu, že učivo je prohlubováno opakovaně, s delší časovou prodlevou. Skladba učiva pro jednotlivé ročníky všeobecného studijního směru (tedy ekvivalentu českých gymnázií) je uvedena v tabulkách níže, a to pro všechny možné varianty obtížnosti matematiky.

1. ročník

1P	1T
Aritmetika a algebra	Aritmetika a algebra
Geometrie	Geometrie
Ekonomie	
Pravděpodobnost	Pravděpodobnost
Funkce	Funkce

Tabulka 2: Možnosti studia matematiky v prvním ročníku

2. a 3. ročník

- a) varianta pro ty, kteří si zvolili nejkratší možnou variantu studia matematiky, tj. pouze v prvním a druhém ročníku:
- *ve druhém ročníku mají studenti na výběr jednu z následujících dvou možností*

2P	2T
Arit. a algebra v praxi	Geometrie
Statistika	Kombinat. a pravděp.
Modelování	Kultura a modelování

- b) varianta pro ty, kteří se zaměřují spíše na humanitní vědy:
- *předmět Matematika 1S je vyučován ve druhém ročníku*
 - *předmět Matematika 2S je vyučován ve třetím ročníku*

S1 (2. roč.)	S2 (3. roč.)
Algebra	Algebra
Funkce	Funkce
Pravděpodobnost	Pravděpodobnost
Lineární optimalizace	Statistika

- c) varianta pro ty, kteří se zaměřují spíše na přírodovědné vědy:
- *předmět Matematika R1 je vyučován ve druhém ročníku*
 - *předmět Matematika R2 je vyučován ve třetím ročníku*

R1 (2. roč.)	R2 (3. roč.)
Geometrie	Geometrie
Algebra	Algebra
Funkce	Funkce
Kombinatorika a pravděp.	Diferenciální rovnice

- d) volitelný předmět „Matematika X“
- předmět je vyučován ve druhém ročníku

X (2. roč.)
Teorie čísel
Komplexní čísla
Pravděpodobnost a statistika

Kompetence v matematické analýze

Následující text umožňuje hlubší vhled do výuky partií matematické analýzy na gymnáziích v Norsku. Je zde uvedeno konkrétní učivo a očekávané výstupy pro jednotlivé úrovně matematiky ve všech třech ročnících (podrobněji viz (2) a (3)).

1. ročník

Matematikk 1P

Funkce – žák by měl být schopen

- vyšetřit průběh funkcí, které popisují situace z praxe (určením nulových bodů, průsečíků s osami, extrémů, gradientu) a interpretovat praktické výsledky
- pracovat s různými reprezentacemi funkce
- prakticky využívat lineární funkce (nárůst, pokles), a to i s pomocí počítačových programů

Matematikk 1T

Funkce – žák by měl být schopen

- nakreslit graf funkce s využitím základních znalostí funkcí
- určit nulové body, průsečíky s osami, gradient, nalézt přibližnou hodnotu derivace funkce v daném bodě a ukázat některé praktické příklady využití
- znát definici derivace funkce a dále ji použít při odvození pravidla pro derivaci polynomické funkce; toto pravidlo dále využít při vyšetření průběhu funkcí

- vytvořit a interpretovat funkce popisující praktické situace, analyzovat empirické funkce a aproximovat je lineární funkcí
- používat výpočetní techniku pro zjištění průběhu funkcí a jejich vlastností (polynomické, racionální lomené, exponenciální a mocninné funkce)

2. ročník

Matematikk 2P

Matematiské modelování – žák by měl být schopen

- provést měření v praktických experimentech a formulovat jednoduchý model na základě naměřených dat; využívat výpočetní techniku ke konstrukci tohoto modelu a posouzení jeho validity
- používat matematiku v praxi a posoudit a vysvětlit, kdy je možno daný matematický model použít a kdy naopak ne

Matematikk 2T

Kultura a matematické modelování – žák by měl být schopen

- vytvořit matematický model na základě zjištěných dat a dále s ním pracovat - tj. posoudit jeho platnost a v případě potřeby jej opravit
- využívat výpočetní techniku k zjištění a konstrukci vhodného matematického modelu
- pracovat s pojmy implikace a ekvivalence, znát základní typy matematických důkazů a argumentace a umět tyto matematické důkazy provést v praxi
- předložit příklady multikulturní historie matematiky a diskutovat o důležitosti matematiky v přírodních vědách, technologii, společenském životě a kultuře

Matematikk S1

Funkce – žák by měl být schopen

- nakreslit graf polynomické, exponenciální, mocninné a racionální lomené (s lineárním čitatelem i jmenovatelem) funkce s využitím výpočetní techniky i bez ní

- vytvořit a interpretovat funkce jako model a popis reálné situace v ekonomii a společenských vědách, analyzovat empirické funkce a využít regresi k nalezení polynomické aproximace funkce
- určit nulové body a průsečíky grafů s využitím výpočetní techniky i bez ní
- nalézt směrnici funkce aritmeticky a přibližnou hodnotu okamžitého růstu funkce v praktických situacích
- znát a rozumět definici derivace funkce, umět vypočítat derivaci polynomické funkce a využít tohoto k diskuzi polynomických funkcí

Lineární optimalizace – žák by měl být schopen

- modelovat praktické optimalizační problémy v ekonomii s využitím lineárních rovnic a inkongruencí
- interpretovat lineární optimalizační problém dvou proměnných geometricky
- řešit lineární optimalizační problémy graficky - s využitím výpočetní techniky i bez ní

Matematikk R1

Funkce – žák by měl

- mít představu o pojmech ohraničenost, spojitost a diferencovatelnost funkce a být schopen uvést konkrétní příklady funkcí, které nejsou spojité nebo diferencovatelné
- umět použít vzorce pro derivaci mocninných, exponenciálních a logaritmických funkcí a derivovat složené funkce, rozdíl, součet, součin a podíl funkcí (včetně různých kombinací těchto)
- být schopen používat první a druhou derivaci k vyšetření průběhu funkce a interpretovat derivace v příkladech praktických situací
- být schopen nakreslit graf funkce (s využitím výpočetní techniky i bez ní) a vysvětlit základní vlastnosti dané funkce s využitím grafu

- umět najít rovnici horizontálních a vertikálních asymptot racionálních lomených funkcí a tyto asymptoty zanést do grafu
- být schopen používat vektorové funkce za účelem parametrického vyjádření křivky v rovině, nakreslit tuto křivku a s využitím derivace dané funkce najít rychlost a zrychlení

3. ročník

Matematikk S2

Funkce – žák by měl být schopen

- derivovat polynomické, mocninné, exponenciální a logaritmické funkce a jejich součty, rozdíly, součiny a podíly; umět použít pravidlo pro derivaci složené funkce
- diskutovat graf funkce v praktických souvislostech s využitím první a druhé derivace
- interpretovat základní vlastnosti funkce s využitím grafu funkce
- řešit problémy optimalizace v ekonomii v závislosti na příjmech, výdajích a poptávce a vypočítat marginální výdaje a příjmy a využít je v jednoduchých modelech
- modelovat exponenciální a logistický růst s využitím exponenciálních a logaritmických funkcí
- vypočítat obsah plochy pod grafem s využitím výpočetní techniky a toto dále interpretovat v praktických situacích

Matematikk R2

Funkce – žák by měl být schopen

- derivovat elementární funkce a využívat první a druhou derivaci k jejich diskuzi
- převést trigonometrické výrazy tvaru $a \sin kx + b \cos kx$ a ukázat jejich periodicitu
- interpretovat definici určitého integrálu jakožto limity součtu a neurčitého integrálu jako primitivní funkce

- vypočítat integrály elementárních funkcí za pomoci primitivních funkcí, substituce, parciálních zlomků
- interpretovat určitý integrál v modelech praktických situací a využívat jej k výpočtu plochy a objemu rotačních těles
- vytvořit matematický model s pomocí elementárních funkcí na základě pozorovaných dat, diskutovat výsledek a použitou metodu

Diferenciální rovnice – žák by měl být schopen

- modelovat praktické situace pomocí diferenciálních rovnic, řešit je a interpretovat jejich výsledky
- řešit lineární diferenciální rovnice prvního řádu a rovnice se separovanými proměnnými; předložit příklady některých významných oblastí jejich využití
- řešit homogenní diferenciální rovnice druhého řádu a používat druhý Newtonův zákon k popisu volných kmitů pomocí periodických funkcí
- řešit diferenciální rovnice a nakreslit směrová pole a integrační křivky, interpretovat je s pomocí techniky

Norské učebnice matematiky

V této části se zaměříme na podporu výuky matematiky, kterou jsou především učebnice *SINUS Matematikk* nakladatelství *Cap-pelen*.

První kapitolu učebnice určené pro předmět Matematikk 1P lze nalézt na (5), druhou kapitolu knihy k předmětu Matematikk 1T na (6).

Tyto učebnice odpovídají požadavkům, které jsou stanoveny kurikulem pro studenty středních škol. To je znát hned na začátku každé kapitoly, která začíná výčtem očekávaných výstupů.

Graficky jsou velice pěkně zpracovány, doplněny o barevné ilustrace a zvýraznění důležitých částí textu (vzorce, poučky apod.). Stejně tak jsou odlišeny řešené příklady, které obsahuje každá z kapitol.

Kapitoly jsou dále rozčleněny na dílčí podkapitoly, což umožňuje lepší orientaci nejen v obsahu, ale také v celé učebnici. Každá z podkapitol začíná teoretickým úvodem, který však často bývá ilustrován pomocí konkrétního příkladu. Dále obsahuje vzorově vyřešený typový příklad s navazujícími příklady sloužícími k procvičení látky během výuky, případně v rámci domácího úkolu. Na konci každé kapitoly je uvedeno přehledné, barevně odlišené shrnutí učiva (norsky *Sammendrag*).

K dalšímu procvičení slouží zvláštní sbírka úloh. Tato sbírka má buď podobu samostatné knihy, nebo je začleněna přímo do učebnice, kdy jsou tyto příklady uvedeny na konci knihy. Příklady obsažené ve sbírce jsou rozděleny do tří kategorií podle náročnosti, případně typu úloh. Tyto kategorie jsou barevně odlišeny – viz (7). Kategorie 1 obsahuje základní úlohy, kategorie 2 náročnější a poslední kategorií jsou tzv. *blandede oppgaver*, tedy smíšené úlohy. Zatímco v prvních dvou kategoriích jsou příklady seřazeny přesně podle dílčích podkapitol v učebnici a k jejich řešení není třeba použít žádných jiných znalostí, smíšené příklady pokrývají několik podkapitol, případně kapitol současně.

Výsledky všech cvičení obsažených v učebnici, případně sbírce úloh, jsou uvedeny na konci knihy. Posledních několik stránek učebnice je navíc věnováno rejstříku pojmů. V případě, že se v učebnici vyskytují příklady, které je možné řešit s využitím kalkulátoru, může rejstříku předcházet ještě několik stránek s takovými řešenými příklady, u kterých je uveden přesný návod, jak kalkulátor (značky Casio a Texas) použít.

Další důležitou podporou jsou také stránky vydavatelství učebnic *Cappelen* (<http://sinus.cappelendamm.no/>). Zde je kromě řešených souhrnných cvičení, které jsou určeny k procvičení každé z kapitol, také množství odkazů na interaktivní cvičení a návody, jak pracovat s počítačovými programy při řešení matematických úloh a příkladů z učebnice. Viz například návod (8) k použití počítačového programu GeoGebra při řešení příkladů z učebnice *Matematikk 1P*.

Ukázka příkladů z národního testování

Jak jsme uvedli v (1), v Norsku je poměrně dlouhá tradice národního testování studentů středních škol, které probíhá každý rok a účastní se ho vybraná část studentů ze všech ročníků střední školy.

Následující příklady jsou další ukázkou příkladů, které byly zadány při testování na jaře roku 2011, viz (9) a (10). První byl zadán studentům v prvním ročníku gymnázia, a to jak studentům předmětu *Matematikk 1P*, který je jednodušší variantou, tak i předmětu *Matematikk 1T*. Na tomto příkladu je patrné, jak se učitelé i tvůrci kurikula a testů snaží přiblížit matematiku co nejvíce reálnému životu.

Příklad 2 je ukázkou zadání k nejnáročnější variantě matematiky za celé studium na gymnáziu. Tou je *Matematikk R2* v posledním ročníku.

Oba příklady byly zadány ve druhé části testu, což znamená, že studenti mohli k jejich řešení používat kalkulátor, počítač (bez přístupu k internetu) i učebnice. Jediné, co je v této druhé části zakázáno, je jakákoliv forma komunikace s ostatními.

Příklad 1

„Kámen-nůžky-papír“ je soutěž mezi dvěma lidmi. Každý z nich se rozhodne pro jednu z možností kámen, nůžky, či papír a svoji volbu ukáží oba současně pomocí jedné ruky.

Pravidla jsou:

- Nůžky vyhrávají nad papírem.
- Papír vyhrává nad kamenem.
- Kámen vyhrává nad nůžkami.

V případě, že oba ukáží stejně (např. kámen), je to remíza.

Bard a Lars budou hrát „Kámen-nůžky-papír“. Jedna z možných variant je, že například Bard ukáže kámen a Lars zvolí papír.

- a) Vypište všechny možnosti, které mohou nastat, pokud Bard a Lars hrají „Kámen-nůžky-papír“ jednou.

Nechť B znamená vítězství Barda, U znamená remízu (z norského *uavgjort*) a L značí výhru Larse.

b) Ukažte, že pravděpodobnost, že Bard vyhraje ($P(B)$) je $\frac{1}{3}$.

Bard a Lars budou nyní hrát „Kámen-nůžky-papír“ třikrát po sobě. Možný výsledek je BUL, což znamená, že Bard vyhraje poprvé, podruhé to bude remíza a Lars vyhraje ve třetím kole.

c) Kolik různých výsledku můžeme získat, pokud Bard a Lars budou hrát třikrát po sobě?

d) Jaká je pravděpodobnost, že Bard vyhraje minimálně dvě z těchto tří her?

Když dva lidé hrají „Kámen-nůžky-papír“, vítězem je ten, který vyhraje nejvíce ze těchto her. Pokud oba dva vyhrají stejný počet her, je to remíza.

e) Jaká je pravděpodobnost, že Bard vyhraje?

Příklad 2

Je dána funkce $f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x}$, $x > 0$.

a) Nakresli graf funkce $f(x)$.

b) 1. Ukaž, že $f'(x) = 5(2x - x^2) \cdot e^{-x}$.

Které pravidlo pro derivaci jsi použil/a?

2. Načrtni tabulku pro určování znaménka funkce $f'(x)$.

Použij tuto tabulku k nalezení intervalů, kde funkce roste a kde klesá. Urči případná minima a maxima grafu funkce $f(x)$.

c) Užitím derivace ukaž, že

$$\int f(x) \, dx = -5x^2 \cdot e^{-x} - 10x \cdot e^{-x} - 10e^{-x} + C.$$

d) Jestliže víte, že $\lim_{a \rightarrow \infty} (a^n \cdot e^{-a}) = 0$ pro $n \in \mathbb{R}$, vypočtěte

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \, dx.$$

Literatura

- [1] Obrdlíková, Š., Výuka matematiky v Norsku I., *Učitel matematiky* **22**(1) 38–50.
- [2] Mathematics Subject Curriculum and Curriculum for the common core subjects mathematics 2P and 2T in the Vg2 programme for general studies. *Ministry of Education and Research* [online]. 24.06.2010 [cit. 2013-08-14]. Dostupné z: http://www.udir.no/Stottemeny/English/Curriculum-in-English/_english/Upper-secondary-education/
- [3] Mathematics for the natural and social sciences – programme subject in programmes for specialization in general studies. *Ministry of Education and Research* [online]. 27.03.2006 [cit. 2013-08-14]. Dostupné z: http://www.udir.no/Stottemeny/English/Curriculum-in-English/_english/Upper-secondary-education/
- [4] Mathematics X – Programme subject in programmes for specialization in general studies. *Ministry of Education and Research* [online]. 22.05.2006 [cit. 2013-08-14]. Dostupné z: http://www.udir.no/Upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/english/Natural_science_mathematics/5/Mathematics_x.rtf
- [5] Matematikk 1P, 1 Geometri. *SINUS Matematikk* [online]. 20.07.2009 [cit. 2013-06-02]. Dostupné z: <http://sinus1p.cappelendamm.no/binfil/download.php?did=60934>
- [6] Matematikk 1T, 2 Tallregning og algebra. *SINUS Matematikk* [online]. 17.09.2010 [cit. 2013-06-02]. Dostupné z: <http://sinus1t.cappelendamm.no/binfil/download.php?did=62562>
- [7] 2 Tallregning og algebra. *SINUS Matematikk* [online]. 17.09.2010 [cit. 2013-06-02]. Dostupné z:

- <http://sinus1t.cappelendamm.no/binfil/download.php?did=62563>
- [8] GeoGebra 4.2 for Sinus 1P. *Sigbjorn Hals* [online]. 10.12.2012 [cit. 2013-06-02]. Dostupné z: <http://sinus1p.cappelendamm.no/c1056027/binfil/download.php?tid=997335>
- [9] Eksamen MAT1011 Matematikk 1P Varen 2011. *Utdanningsdirektoratet* [online]. 25.05.2011 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: http://www.udir.no/Upload/Eksamen/Videregående/Tidligere_gitte_eksoppg_Kunnska-psl/Fellesfag_vgs/V11/MAT1011_Matematikk_1P_V11.pdf
- [10] Eksamen REA3024 Matematikk R2 Varen 2011. *Utdanningsdirektoratet* [online]. 31.05.2011 [cit. 2013-05-11]. Dostupné z: http://www.udir.no/Upload/Eksamen/Videregående/Tidligere_gitte_eksoppg_Kunnska-psl/Programfag_studieforberedende/V11/REA3024_Matematikk_R2_V11.pdf
- [11] Obrdlíková, Šárka. *Výuka matematiky v Norsku*, Rigorózní práce. Masarykova univerzita, Brno, 2013.

RNDr. Šárka Obrdlíková

Ústav matematiky a statistiky

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Kotlářská 2

611 37 Brno

e-mail: 175612@mail.muni.cz

ABSTRACT

This article follows up the article *The teaching of mathematics in Norway 1* and describes mathematics education at grammar schools in Norway. It contains brief information about Norwegian mathematics textbooks, a list of the main subject areas and competence aims in calculus, as well as two particular examples of exam exercises.