Učitel matematiky

Václav Vlk
Jak to vlastně je?

Učitel matematiky, Vol. 22 (2014), No. 1, 51–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149453

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2014

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

JAK TO VLASTNĚ JE?

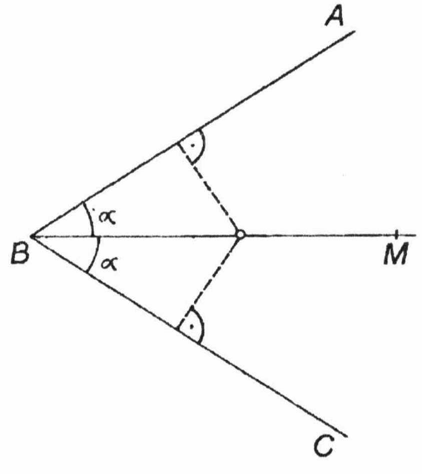
VÁCLAV VLK

Tímto příspěvkem zahajujeme sérii článků, v nichž odpovídáme na dotazy čtenářů (studentů či učitelů). Zajímá-li vás náš názor na problém, který vás trápí, napište redakci *Učitele matematiky*. Podle našich možností vám odpovíme.

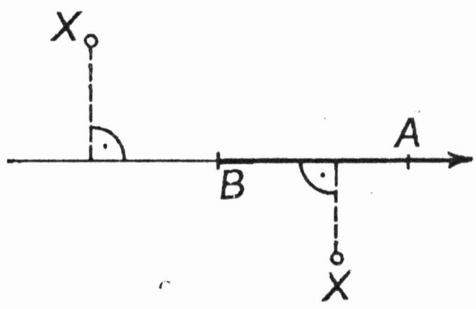
Dotaz *Filipa Bystrého*[3], žáka základní školy v N.

V deváté třídě jsme probírali větu:

Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od ramen úhlu ABC, je polopřímka BM, která je část osy úhlu ABC (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

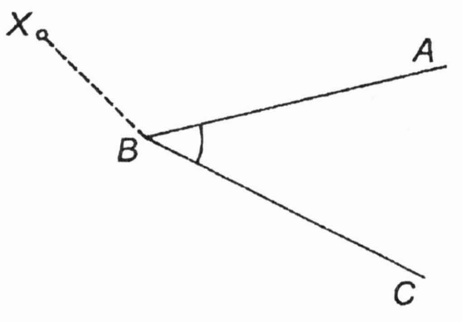
Na můj dotaz, zda i některé body vně úhlu mají od ramen tohoto úhlu stejnou vzdálenost, odpověděl můj učitel: *Ano, jsou to body celé osy úhlu ABC*, a vysvětlil, že přece vzdálenost bodu od polopřímky měříme na kolmici podle obr. 2.

[3]Žáci, kteří se ptají, jsou dnes fiktivní, avšak s položenými otázkami, se autor ve své praxi setkal.

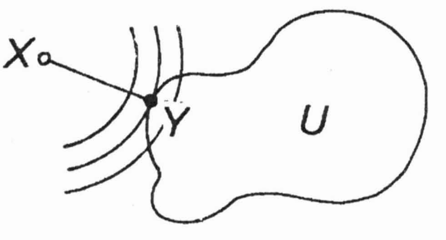
To mi nedalo spát. Kdybych bydlel v místě X a polopřímky BA, BC znázorňovaly např. železniční tratě, tak přece vzdálenost místa X od dráhy musím chápat jako velikost úsečky XB.

Při příští hodině matematiky mi pan učitel sdělil, že měl přece jen pravdu a doložil to učebnicí ([1], s. 73), v níž jsou věta i obrázek přesně takové, jak jsme se to učili.

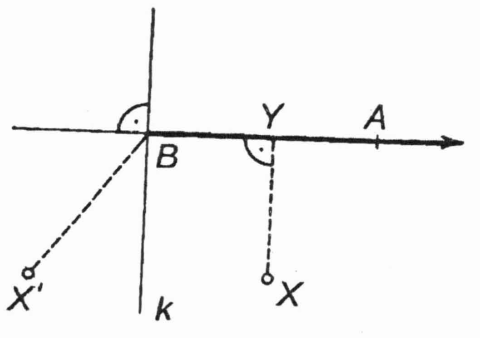
Prosím o vysvětlení, jak to tedy je?



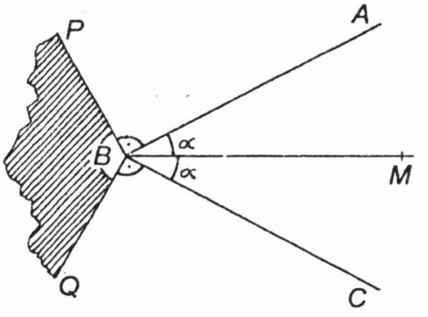
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Odpověď.

Milý Filipe.

O vzdálenosti bodu od ramen úhlu jsi uvažoval zcela správně. V matematice, podobně jako v reálném světě, chápeme vzdálenost bodu X od geometrického útvaru U jako nejmenší ze vzdáleností $|XY|$, kde Y je bod útvaru U (obr. 4). V souladu s tím musíme definovat vzdálenost bodu X od polopřímky BA „nadvakrát“: v polorovině kA (v označení podle obr. 5) jako vzdálenost $|XY|$ bodu od přímky BA, v polorovině opačné jako vzdálenost $|X'B|$.

Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od ramen úhlu ABC je sjednocením úhlu PBQ sestrojeného podle obr. 6 s osou BM úhlu ABC.

Podle definice vzdálenosti bodu od polopřímky vidíme z obr. 6, že každý bod tohoto sjednocení má stejnou vzdálenost od ramen úhlu ABC a žádný další bod od těchto ramen stejnou vzdálenost nemá.

To znamená, že neměl bohužel pravdu tvůj pan učitel, ale ani citovaná učebnice. Je moc dobře, že spojuješ matematiku s realitou a o matematice přemýšlíš.

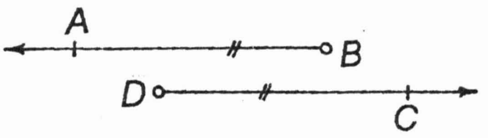
Patrně si kladeš otázku, jak to bude, nebudou-li mít polopřímky společný počátek.

Řešme tedy úlohu:

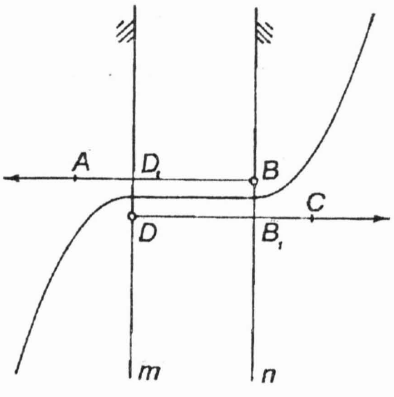
Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od polopřímek BA, DC v poloze podle obr. 7 (přímky AB a DC jsou rovnoběžné).

Sestrojme nejdříve, abychom mohli určit vzdálenosti od polopřímek, přímky m, n podle obr. 8. V pásu mezi těmito přímkami měříme vzdálenost od polopřímek BA a DC jako vzdálenost od těchto přímek. Je tedy částí hledané množiny v pásu mn úsečka, která spojuje střed úsečky DD_1 se středem úsečky BB_1. V polorovině mA je vzdálenost od polopřímky BA definovaná jako vzdálenost od přímky BA, ale vzdálenost od polopřímky DC jako vzdálenost od bodu D. V této polorovině je tedy hledanou množinou část paraboly s řídící přímkou AB a ohniskem D. Podobný výsledek získáme v polorovině nC. Hledaná množina se tedy skládá z oblouků dvou parabol spojených úsečkou.

Pokud, Filipe, nevíš, co je to parabola, podívej se laskavě např. na stranu 157 učebnice analytické geometrie pro gymnázia [2]. Snad tě budou zajímat další úlohy, které souvisejí s tvým dotazem.



Obr. 7

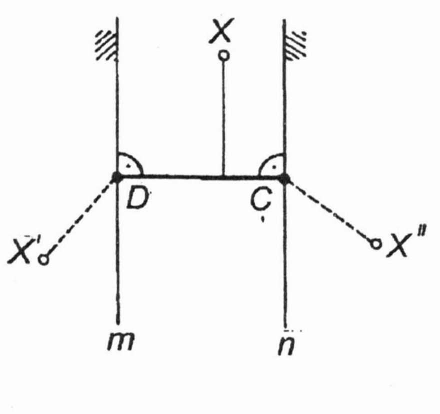


Obr. 8

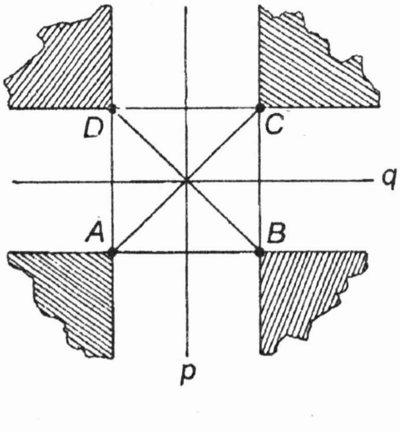
Úloha 1. *Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají aspoň od dvou stran čtverce $ABCD$ stejné vzdálenosti*

Vzdálenost bodu od úsečky definujeme podobně jako vzdálenost bodu od polopřímky. Máme-li určit vzdálenost bodu od úsečky DC, sestrojíme nejdříve v jejích krajních bodech D, C kolmice m, n, k přímce DC (obr. 9). V pásu mn měříme vzdálenost od úsečky jako vzdálenost od přímky, tedy na kolmici. V levé polorovině s hranicí m a v pravé polorovině s hranicí n měříme vzdálenost od úsečky jako vzdálenost od bodu D nebo C.

Nyní snadno nahlédneme, že hledanou množinou je sjednocení úhlopříček AC, BD, os p, q úseček AB a DA a čtyř vyšrafovaných pravých úhlů (obr. 10).



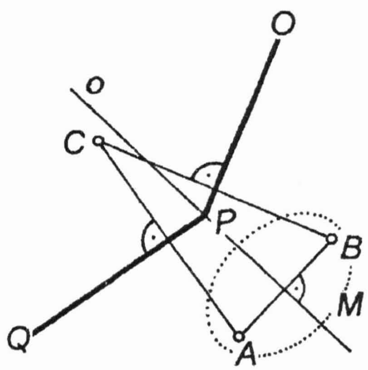
Obr. 9



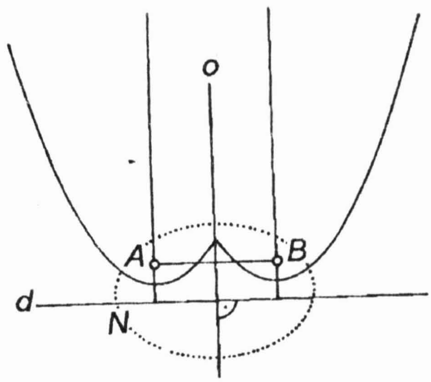
Obr. 10

Úloha 2. *Je dán trojúhelník ABC. Vyšetřete množinu všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od dvouprvkové množiny* $\mathsf{M} = \{A, B\}$ *jako od bodu C (obr. 11).*

Sestrojme nejdříve osu o úsečky AB. V polorovině oA měříme vzdálenost od množiny M jako vzdálenost od bodu A. V této polorovině jsou tedy body stejně vzdálené od bodu C jako od množiny M body polopřímky PQ (obr. 11), která je částí osy úsečky CA. V polorovině oB je situace podobná. Hledanou množinou jsou tedy ramena úhlu QPD.



Obr. 11



Obr. 12

Úloha 3. *Jsou dány body A, B a přímka d podle obr. 12 (přímky AB a d jsou rovnoběžné). Vyšetřete množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od množiny* $\mathsf{N} = \{A, B\}$ *jako od přímky d.*

Sestrojme opět osu o úsečky AB. V polorovině oA určujeme množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu A a přímky d. Touto množinou je část paraboly s ohniskem A a řídící přímkou d. V polorovině oB je hledanou množinou oblouk paraboly, která má ohnisko B a řídící přímku d.

Dotaz *Anežky Pilné*, žákyně základní školy v P.

Paní učitelka nám říkala, že absolutní hodnota čísla a je buď číslo a samo nebo číslo $-a$. A dál říkala, že absolutní hodnota *je vždycky číslo kladné nebo nula. Jak může být tedy absolutní hodnota číslo* $-a$*?*

Odpověď.

Milá Anežko,

tvá paní učitelka má pravdu. Jak bys vypočítala např. absolutní hodnotu z čísla $a = -3$? To je přece 3. A máme-li to zapsat, píšeme $|-3| = 3 = -(-3)$. Je tedy pro a záporná $|a| = -a$. Je dobře, že se ptáš, ale tento dotaz by ti jistě ráda zodpověděla tvá paní učitelka.

Literatura

[1] Rosecká, Z., Míček, A., *Geometrie. Učebnice pro 8. ročník*, Nová škola, Brno, 1999

[2] Kočandrle, M., Boček, L., *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie*, Prometheus, Praha, 1995

Mgr. Václav Vlk
Integrovaná základní škola
123 45 Horní Dolní
e-mail: Vlk@dotazovna.cz

ABSTRACT

Readers are invited to write about problems connected with mathematics education. We give here space for discussion about different didactical problems, which are of your interest.