Emil Calda

Nekonečné řady na střední škole aneb copak se dá v konečném čase sečíst nekonečně mnoho sčítanců?

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 2, 121–124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149426

NEKONEČNÉ ŘADY NA STŘEDNÍ ŠKOLE ANEB COPAK SE DÁ V KONEČNÉM ČASE SEČÍST NEKONEČNĚ MNOHO SČÍTANCŮ?

Emil Calda

Středoškolské učivo o nekonečných řadách se omezuje pouze na nekonečnou řadu geometrickou, a to nejen z důvodů časových: tato řada má velký teoretický význam a vzorec pro její součet je jednoduchý v důsledku toho, že práce s touto řadou se často omezuje jenom na odvozený vzorec, studenti časem zapomenou, že součet nekonečné řady vlastně žádný součet není, ale že je to limita posloupnosti jejích částečných součtů. V následujících řádcích uvedeme příklady nekonečných řad, jejichž součet na střední škole sice určit nemůžeme, ale jejichž posloupnosti částečných součtů nám umožní zjistit, zda tyto řady konvergují nebo divergují. Nebudeme k tomu potřebovat žádná kritéria konvergence, v podstatě vystačíme s větou uvedenou v [1]: *Je-li rostoucí posloupnost shora omezená, je konvergentní.* Pro nekonečnou řadu to znamená: *Je-li rostoucí posloupnost částečných součtů nekonečné řady shora omezená, je tato řada konvergentní.*

Začneme řadou

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Posloupnost (s_n) jejích částečných součtů je zřejmě rostoucí, takže k důkazu, že má vlastní limitu a že daná řada je tedy konvergentní, stačí ukázat, že posloupnost (s_n) je shora omezená.

To však je poměrně snadné, uvědomíme-li si, že pro všechna přirozená $n > 1$ platí

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Pro součet s_n tak dostaneme

$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq$$
$$\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

odkud je vidět, že pro všechna přirozená čísla n platí $s_n < 2$. Rostoucí posloupnost (s_n) je tedy shora omezená a její limita je rovna součtu dané nekonečné řady. Hodnotu této vlastní limity jsme sice neurčili, ale ukázali jsme, že existuje. Znamená to, že daná řada je konvergentní.

Poznámka

Dá se dokázat, že součet této nekonečné řady je roven číslu $\dfrac{\pi^2}{6}$; tento důkaz však přesahuje možnosti, které jsou na střední škole k dispozici.

Podobně dokážeme, že je konvergentní i řada

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Posloupnost (s_n) jejích částečných součtů je rostoucí a to, že je shora omezená, plyne z toho, že pro všechna přirozená čísla $n > 3$ je

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n(n-1)}$$

neboli

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

A protože

$$\frac{1}{1!} = 1, \quad \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3!} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

pro součet s_n platí:

$$s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$
$$\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Pro všechna přirozená čísla n je tedy $s_n < 2$; jak už bylo vysvětleno výše, znamená to, že daná řada je konvergentní.

Poznámka

Z vyjádření Eulerova čísla

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

plyne, že řada, jejíž konvergenci jsme právě dokázali, má součet $\mathrm{e} - 1$.

Pokusíme se nyní zjistit, zda konverguje řada

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Užitím vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$

který platí pro všechna přirozená čísla n, pro součet s_n dostaneme:

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) +$$
$$+ (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Odtud je vidět, že posloupnost (s_n) diverguje k $+\infty$, což znamená, že k $+\infty$ diverguje i zkoumaná řada.

Pro některé studenty může být tento výsledek překvapením: řada

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$$

diverguje k $+\infty$ a přitom je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Obvykle uváděným příkladem nekonečné řady, která má také tuto vlastnost, ale jejíž divergence se na střední škole nedokazuje, je řada

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Poznamenejme na závěr, že tato řada se nazývá harmonická, protože každý její člen s výjimkou prvního je harmonickým průměrem členů, které s ním sousedí.

Literatura

[1] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, Prometheus, Praha, 1995.

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
e-mail: Emil.Calda@mff.cuni.cz