Učitel matematiky

Aleš Kobza

O jisté soustavě nelineárních rovnic

Učitel matematiky, Vol. 23 (2015), No. 1, 52–58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149417

O JISTÉ SOUSTAVĚ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Aleš Kobza

S problematikou řešení soustav rovnic se středoškolští studenti setkávají zpravidla hned v prvním ročníku v rámci celku věnovanému studiu rovnic a nerovnic. Znalosti a dovednosti zde získané pak často uplatní v navazujícím učivu. Jako příklad lze uvést analytickou geometrii. Jejími prostředky je totiž možné řadu probíraných geometrických úloh převést právě na problém řešení soustav rovnic, které často bývají také nelineární. Jsou-li však nelineární všechny rovnice uvažované soustavy, může být řešení takového systému obtížnější. V tomto článku budeme věnovat pozornost řešení soustavy tvořené rovnicemi

$$x^2 + y^2 = 25, \tag{1}$$

$$4x - 4y + xy = 8 \tag{2}$$

v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a rozebereme v něm několik způsobů, kterými ji lze se středoškolskými studenty vyřešit.

1. řešení

Při mechanickém postupu bývá běžné užití tzv. dosazovací metody. Úpravou rovnice (2) dostaneme

$$y\,(x-4) = 8 - 4x.$$

Kdyby $x = 4$, byla by poslední rovnice tvaru $0y = -8$, což by byl spor. Proto je $x \neq 4$, takže můžeme vyjádřit

$$y = \frac{8-4x}{x-4} \tag{3}$$

a dosadit do rovnice (1). Rutinními ekvivalentními úpravami rovnice

$$x^2 + \left(\frac{8-4x}{x-4}\right)^2 = 25$$

obdržíme algebraickou rovnici tvaru

$$x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 136x - 336 = 0. \tag{4}$$

K jejímu řešení ale nemáme žádný obecný algoritmus, který by byl pro výpočet se středoškolskými studenty použitelný. Rovnici čtvrtého stupně tedy dokážeme řešit pouze ve speciálním případě. Lze například najít všechny racionální kořeny takové rovnice, má-li racionální všechny koeficienty, což je náš případ. Jejich odštěpením pak následně můžeme snížit stupeň algebraické rovnice, kterou zbývá dořešit. Je tedy patrné, že zvolený postup řešení není jednoduchý ani numericky pohodlný. Nechceme-li však na pokračování v řešení zadané soustavy započatým způsobem rezignovat, potřebujeme najít racionální kořeny rovnice (4). K tomu existuje algoritmus, který se na některých školách vyučuje. Plyne z něj, že všechny racionální kořeny rovnice (4) jsou dokonce celočíselné, přičemž musí být děliteli čísla 336 (těch v $\mathbb{Z}$ existuje 40). Abychom se vyhnuli poměrně dlouhému testování popsaných možností, provedeme úvahy, které je možné udělat dokonce i se studenty, kteří zmíněné vlastnosti algebraických rovnic neznají.

Předpokládejme, že $x \in \mathbb{Z}$ je kořenem rovnice (4). Z vyjádření (3) dostáváme, že $y \in \mathbb{Q}$. Ze tvaru $y^2 = 25 - x^2$ navíc plyne, že $y^2 \in \mathbb{Z}$. Kdyby tedy $y \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, muselo by také $y^2 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, což, jak již víme, není možné. Tato skutečnost znamená, že nejprve potřebujeme zadanou soustavu vyřešit v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. To lze výhodně provést pomocí úpravy rovnice (2) do součinového tvaru

$$(x - 4)\,(y + 4) = -8. \tag{5}$$

Oba činitelé vystupující na levé straně rovnice (5) jsou zřejmě celočíselní. Proto musí být číslo $x - 4$ rovno některému z celočíselných dělitelů čísla -8, tzn.

$$(x - 4) \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}\,. \tag{6}$$

Vidíme tedy, že stačí projít „pouze“ 8 případů a to je výrazně méně než výše zmíněných 40 „kandidátů“ na kořeny rovnice (4). Vlastní výpočet je pak následující. Na základě informace (6) najdeme vždy odpovídající hodnotu x, jejím dosazením do vyjádření

(3) získáme příslušnou hodnotu y a pro dvojici takto nalezených čísel x, y provedeme dosazením do rovnice (1) zkoušku, zda splňují rovněž tuto rovnici. Postupným opakováním popsaného procesu obdržíme všechna řešení soustavy rovnic (1) a (2) v $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Zjistíme tak, že existují právě dvě a to uspořádané dvojice $[3; 4]$ a $[-4; -3]$.

Zbývá nám ještě dořešit uvažovanou soustavu v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Vydělením polynomu z levé strany rovnice (4) součinem jeho dosud nalezených kořenových činitelů $(x-3)\,(x+4)$ upravíme rovnici (4) do součinového tvaru

$$(x-3)\,(x+4)\left(x^2-9x+28\right)=0.$$

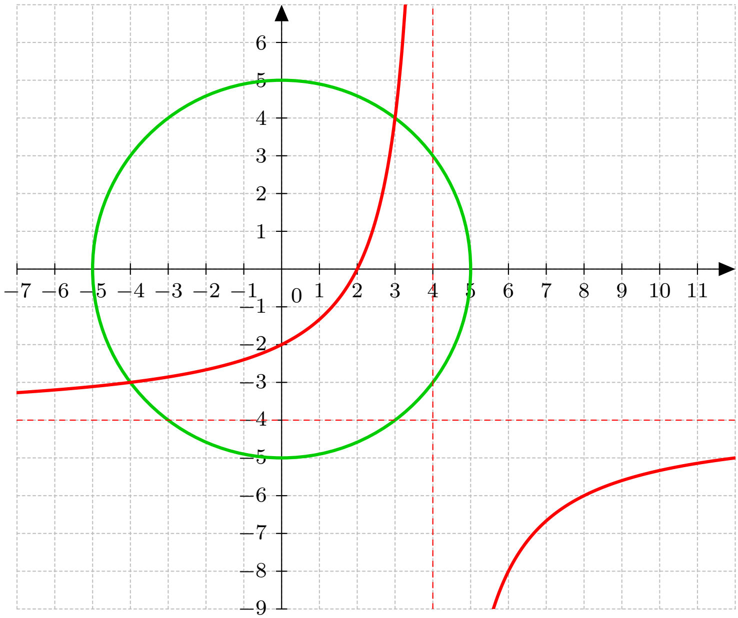
Protože je diskriminant rovnice $x^2-9x+28=0$ záporný, nemá tato rovnice žádný reálný kořen. To tedy znamená, že množina všech kořenů soustavy rovnic (1) a (2) v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je stejná a sice $K = \{[3; 4]\,, [-4; -3]\}$.

2. řešení

Pokud se na rovnice řešené soustavy podíváme geometricky, spatříme v nich vyjádření známých kuželoseček. Řešení, která soustavě rovnic (1) a (2) vyhovují, pak popisují společné body obou těchto kuželoseček. Rovnice (1) představuje středovou rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a má poloměr 5 j. Druhou rovnici soustavy pak můžeme stejně jako v prvním řešení výše upravit do tvaru (3), který je předpisem lineární lomené funkce, jejímž grafem je rovnoosá hyperbola. Dále platí

$$y=\frac{8-4x}{x-4}=\frac{-4\,(x-4)-8}{x-4}=-4-\frac{8}{x-4}.$$

Odtud vidíme, že tato hyperbola má střed v bodě $[4; -4]$ a jejími asymptotami jsou přímky o rovnicích $x = 4$ a $y = -4$. Soustavu rovnic (1) a (2) tedy můžeme řešit též graficky (viz obrázek 1) tak, že najdeme všechny průsečíky obou kuželoseček, jejichž charakteristiky jsme výše popsali. Je třeba zdůraznit, že při tomto postupu je potřebná pečlivost a je nezbytné určit více bodů, kterými každá z kuželoseček prochází, abychom počet jejich průsečíků a hlavně jejich polohu určili přesně.



Obr. 1

Tento postup může být pro studenty poučný, protože obvykle jsou zvyklí pracovat opačně. Časté totiž bývá řadu geometrických úloh prostředky analytické geometrie převést na problém algebraický a zejména průsečíky různých útvarů určovat výpočtem.

3. řešení

Poslední řešení, které uvedeme, bude opět čistě algebraické. Tentokrát ovšem provedeme taková vyjádření a využijeme vhodné substituce, abychom se vyhli potřebě řešení algebraické rovnice vyššího než druhého stupně. Hlavní myšlenkou tohoto postupu jsou následující „trikové“ úpravy rovnic řešené soustavy

$$x^2+y^2=25 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=25-2xy \Leftrightarrow (x-y)^2=25-2xy$$

a

$$4x - 4y + xy = 8 \quad \Leftrightarrow \quad xy = 8 - 4\,(x - y)\,.$$

Označme ještě

$$r = x - y \tag{7}$$

a

$$s = xy. \tag{8}$$

Soustava rovnic (1) a (2) je tedy ekvivalentní se soustavou rovnic

$$r^2 = 25 - 2s \tag{9}$$

a

$$s = 8 - 4r. \tag{10}$$

Tuto soustavu ovšem poměrně snadno vyřešíme, když z (10) dosadíme za s do (9), čímž obdržíme kvadratickou rovnici v proměnné r tvaru

$$r^2 = 25 - 2\,(8 - 4r) \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 8r - 9 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že $r^2 - 8r - 9 = (r - 9)\,(r + 1)$, jsou jejími kořeny čísla $r_1 = 9$ a $r_2 = -1$. Z (10) pak vypočteme, že $s_1 = -28$ a $s_2 = 12$. Dosazením do substitučních rovnic (7) a (8) pak dostaneme soustavu rovnic pro hledané neznámé x a y. V prvním případě ze (7) dostáváme $9 + y = x$, takže po dosazení do (8) máme

$$-28 = (9 + y)\,y \quad \Leftrightarrow \quad 0 = y^2 + 9y + 28 = \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0,$$

což je spor. Ve druhém případě ze (7) zjišťujeme, že

$$y - 1 = x, \tag{11}$$

proto po dosazení do (8) vychází

$$12 = (y - 1)\,y \quad \Leftrightarrow \quad 0 = y^2 - y - 12 = (y - 4)\,(y + 3)\,.$$

Takže $y_1 = 4$ a $y_2 = -3$. Konečně odpovídající hodnoty neznámé x nejrychleji určíme z vyjádření (11). V souladu s předchozími řešeními i nyní dostáváme $x_1 = 3$ a $x_2 = -4$.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že žádná z vyložených metod není univerzální a že vždy bude existovat příklad soustavy rovnic, která příslušným způsobem nebude řešitelná. Tato soustava přitom může být „jen nepatrně“ odlišná od výše řešené soustavy rovnic (1) a (2). Ilustrujeme to na následujících příkladech, jejichž případný detailní rozbor (s využitím výše popsaných metod řešení) již ponecháme na čtenáři. Každý z těchto příkladů přitom dostaneme „pouze drobnou“ změnou koeficientů rovnice (2), přičemž první rovnicí soustavy bude vždy rovnice (1). Těmito příklady zdůrazníme skutečnost, že i „velice malá“ odlišnost v jediné z rovnic uvažované soustavy může znamenat „podstatnou“ změnu v počtu a vlastnostech jejích kořenů a z tohoto důvodu také v metodě jejího řešení.

Jak bylo výše uvedeno, způsobem vyloženým v 1. řešení lze dořešit uvažovanou soustavu jen díky skutečnosti, že má dva kořeny v $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Je možné se přesvědčit, že postupem, který byl při tomto řešení proveden, nelze vyřešit např. soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{a} \quad x - y + xy = -31,$$

protože v $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nemá žádný kořen. Pro tuto soustavu se však dá graficky (viz 2. způsob řešení) ukázat, že nemá žádné řešení ani v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (příslušné kuželosečky nemají žádný společný bod a jsou od sebe „dostatečně vzdálené“, takže je grafické řešení „průkazné“). Také ji lze řešit pomocí postupu provedeném při 3. řešení.

Podle výše uvedeného se dá také ukázat, že ani soustava rovnic

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{a} \quad 4x - 4y + xy = 15$$

nemá v $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ žádné řešení (a nelze ji tudíž vyřešit 1. způsobem). Při grafickém řešení lze zdůvodnit, že tato soustava má v $\mathbb{R} \times \times \mathbb{R}$ právě dva kořeny, ale pouze s využitím grafu je určíme jen přibližně. Pokud bychom k řešení této soustavy použili postup ze 3. řešení, nalezli bychom přesné hodnoty jejích kořenů, které jsou v obou proměnných iracionální.

Samozřejmě ani 3. způsob řešení není univerzální. Nemohli bychom jej aplikovat např. na řešení soustavy rovnic

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{a} \quad 2x + y - xy = 22,$$

neboť druhá rovnice této soustavy nevykazuje „potřebnou symetrii“, díky které jsme mohli zavést substituci (viz (7) a (8)). U této soustavy je však možné s využitím přístupu ze 2. řešení ukázat, že v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nemá řešení.

Jednotlivé metody řešení uvažované soustavy, které jsme v tomto textu vyložili, tedy sice nedávají návod k řešení jakékoliv soustavy rovnic, přesto se mohou vzájemně doplňovat a jejich výklad může být pro studenty zajímavý a obohacující. Pozoruhodné na nich může být rovněž propojení více oblastí učiva matematiky a poukázání na jejich vzájemné souvislosti.

Abstract

We consider system of two nonlinear equations. The aim of this paper is to present three different methods for solving this problem. Finally we discuss advantages and drawbacks of used methods. It is shown that none of them is universal.

Mgr. Aleš Kobza, Ph.D.
Gymnázium, Brno
třída Kapitána Jaroše 14
602 00 Brno
e-mail: akob@jaroska.cz