Emil Calda

Zkusíte to u svých studentů?

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 3, 171–173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149399

ZKUSÍTE TO U SVÝCH STUDENTŮ?

Emil Calda

Kdysi dávno, když jsem ještě učil na gymnáziu, jsem při probírání učiva o posloupnostech zadával studentům úlohu najít skupinu po sobě jdoucích celých čísel, jejichž součet dá jeden tisíc. Jejich nejčastějším výsledkem (pokud vůbec k nějakému dospěli) byla čísla:

$$198, 199, 200, 201, 202.$$

Pokud se dobře pamatuju, pouze pár studentů došlo k závěru, že daný požadavek splňují také čísla:

$$-999, -998, -997, \ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ \ldots, 997, 998, 999, 1000.$$

Těch několik, kteří určili obě tyto skupiny, ještě přišlo na to, že další řešení lze získat doplněním první z uvedených skupin o celá po sobě jdoucí čísla, jejichž součet je roven nule:

$$\begin{aligned} &-197, -196, -195, \ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ \ldots, \\ &\qquad\qquad 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202. \end{aligned}$$

Po těchto studentských pokusech jsme obvykle přistoupili k úloze, jejíž řešení je sice poměrně jednoduché, ale studentům „dávalo zabrat“:

Určete všechna celá čísla b a všechna celá nezáporná čísla n, pro něž platí:

$$b + (b+1) + (b+2) + (b+3) + \cdots + (b+n) = 1000.$$

Sečteme-li všechny členy aritmetické posloupnosti a získanou rovnici vynásobíme dvěma, dostaneme.

$$(2b+n)(n+1) = 2000,$$

neboli

$$2b + n = \frac{16 \cdot 5^3}{n+1}.$$

Rozlišíme nyní případy, zda číslo n je sudé nebo liché.

1. Je-li n sudé, je sudé i číslo $2b + n$, což znamená, že celým sudým číslem bude i zlomek na pravé straně. To však nastane pouze tehdy, je-li liché číslo $n+1$ rovno číslům $1, 5, 5^2, 5^3$, tj. když n je rovno 0, 4, 24, 124. Snadným výpočtem pak určíme, která čísla b těmto číslům n odpovídají.
Pro $n = 0$ je $b = 1000$; hledaná skupina se skládá pouze z čísla 1000;
pro $n = 4$ je $b = 198$; hledaná skupina je: 198, 199, 200, 201, 202;
pro $n = 24$ je $b = 28$; hledaná skupina je: 28, 29, 30, . . . , 49, 50, 51, 52;
pro $n = 124$, je $b = -54$; hledaná skupina je: −54, −53, −52, . . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . . , 68, 69, 70.

2. Je-li n liché, je liché i číslo $2b + n$, takže celým lichým číslem bude i zlomek na pravé straně. K tomu však dojde jen tehdy, je-li sudé číslo $n + 1$ rovno číslům $16, 5 \cdot 16, 5^2 \cdot 16, 5^3 \cdot 16$, tj. když n je rovno 15, 79, 399, 1999. Odtud dostaneme, že těmto číslům n odpovídají následující čísla b.
Pro $n = 15$ je $b = 55$; hledaná skupina je: 55, 56, 57, . . . , 68, 69, 70;
pro $n = 79$ je $b = -27$; hledaná skupina je: −27, −26, −25, . . . , −2, −1 , 0, 1, 2, . . . , 50, 51, 52;
pro $n = 399$ je $b = -97$; hledaná skupina je: −197, −196, . . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . . , 200, 201, 202;
pro $n = 1999$ je $b = -999$; hledaná skupina je: −999, −998, . . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . . , 999, 1000.

Tím je úloha vyřešena. Počítáme-li mezi skupiny po sobě jdoucích celých čísel i skupinu jednočlennou, je hledaných skupin celkem osm. Docela by mě zajímalo, jak se k této úloze postaví dnešní středoškoláci a kolik z nich dovede některé z těchto skupin určit bez výpočtu.

Abstract

In this article, all groups of consecutive integers whose sum is one thousand are found.

Emil Calda
Mánesova 549
252 29 Dobřichovice
e-mail: ecalda@volny.cz