Dag Hrubý

Řešení kvadratické rovnice

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 3, 162–170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149398

ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE

Dag Hrubý

Kvadratické rovnice představují klasickou partii středoškolské matematiky, která nepřináší žákům ani jejich učitelům celkem žádné problémy. Je velmi užitečné, když se v průběhu studia na střední škole podaří ukázat všechny souvislosti mezi pojmy: polynom, rovnice, funkce. V našem případě se jedná o pojmy: kvadratický trojčlen, kvadratická rovnice, kvadratická funkce

$$
\begin{aligned}
&P(x) = ax^2 + bx + c;\\
&P(x) = 0, ax^2 + bx + c = 0;\\
&f\colon y = P(x), y = ax^2 + bx + c.
\end{aligned}
$$

Při řešení kvadratické rovnice, za předpokladu, že rovnice má celočíselné nebo racionální kořeny, můžeme využít rozkladu kvadratického trojčlenu na součin lineárních faktorů

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0.$$

Např. $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - \frac{1}{2})$.

Je-li rovnice v normovaném tvaru, pak platí

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Např. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Pokud si na rozklad netroufáme, nastupuje oblíbený diskriminant:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Odvození tohoto vzorce lze provést několika způsoby, například takto:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0\\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0\\
(2ax+b)^2 &= b^2 - 4ac = D\\
|2ax+b| &= \sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{D}
\end{aligned}$$

Cílem tohoto článku je ukázat na další možnosti řešení kvadratické rovnice, na které, při běžné výuce matematiky, není samozřejmě dostatek času. Jistou analogii můžeme hledat u řešení kubických rovnic. Kvadratickou rovnici lze řešit pomocí substituce, čímž se vyhneme tzv. doplňování na čtverec, které přináší některým žákům problémy. Je-li dána rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, zvolíme substituci $x = y - \frac{b}{2a}$. Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned}
a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c &= 0\\
ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c &= 0\\
y^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
|y| &= \frac{\sqrt{D}}{2a}\\
\left|x + \frac{b}{2a}\right| &= \frac{\sqrt{D}}{2a}
\end{aligned}$$

Odtud již snadno dostáváme slavný vzorec. Na podobném principu funguje substituce $x = u + v$. Po dosazení do rovnice $ax^2 + {}$ $+ bx + c = 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
a(u+v)^2 + b(u+v) + c &= 0\\
au^2 + av^2 + (2av+b)u + bv + c &= 0
\end{aligned}$$

Položíme-li nyní, bez újmy na obecnosti, $v = -\frac{b}{2a}$, pak po dosazení za v dostáváme:

$$\begin{aligned} 4a^2u^2 - b^2 + 4ac &= 0 \\ u^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ |u| &= \frac{\sqrt{D}}{2a} \\ x = v + u &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$$

Zajímavé řešení kvadratické rovnice lze nalézti v učebnici *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Classen der Mittelschulen*. Učebnice je z roku 1891 a jejím autorem je profesor německého gymnázia v Brně *Josef Gajdeczka*. Kvadratická rovnice je zde řešena pomocí goniometrických funkcí. S tímto řešením se nyní seznámíme. Nejdříve si připomeneme některé goniometrické identity. Nechť je dán úhel velikosti φ, kde $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ze vztahu

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

ihned plyne

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

a odtud

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{|\cos \varphi|} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Připomeňme si ještě vztahy mezi $\operatorname{tg} \varphi$ a $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $\operatorname{cotg} \varphi$ a $\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}, \operatorname{cotg} \varphi = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}}$$

Položíme-li $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$, pak platí $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2t}{1-t^2}$. Odtud dostáváme:

$$t^2 \operatorname{tg} \varphi + 2t - \operatorname{tg} \varphi = 0$$

Vzhledem k podmínce $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, je $t > 0$ a proto se budeme zajímat pouze o kořen

$$t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\operatorname{tg}^2\varphi}}{2\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} - 1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Nyní jsme již připraveni řešit kvadratickou rovnici s pomocí goniometrických funkcí. V tomo článku se zaměříme pouze na jeden typ rovnice a to rovnici

$$x^2 + px = q, q > 0, \text{ tj. } x^2 + px - q = 0.$$

Pro kořeny této rovnice platí

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2} = \frac{-p \pm 2\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} =$$
$$= -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}.$$

Po další úpravě dostáváme:

$$x_{1,2} = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right)$$

Položíme-li nyní $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$, dostaneme $\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$. Pro kořeny naší rovnice pak platí:

$$x_{1,2} = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

Ze vztahu $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$ plyne $|\operatorname{tg}\varphi| = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ a proto $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{|\operatorname{tg}\varphi|} = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}$. Po dosazení dostáváme:

$$x_1 = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}\left(-1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \sqrt{q}\left(\frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = \sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tg}\varphi}\left(-1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right) = -\sqrt{q}\left(\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = -\sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$$

Příklad 1. V R řešte rovnici $x^2 + \frac{1}{3}x = 3$.

Řešení. V našem případě je $q = 3, p = \frac{1}{3}$ a proto je $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4q}{p^2} = 108$. Vzhledem k podmínce $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí, že $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{108}$ a tedy $\varphi \doteq 84,50°$. Odtud plyne $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} 42{,}25° \doteq 0{,}908$. Pro kořeny $x_1 = \sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ a $x_2 = -\sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ pak platí $x_1 \doteq 0{,}908\sqrt{3} \doteq 1{,}573, x_2 \doteq -1{,}101\sqrt{3} \doteq -1{,}907$.

Budeme-li řešit rovnici $x^2 + \frac{1}{3}x = 3$ tj. rovnici $3x^2 + x - 9 = 0$ standardním způsobem, pak dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{109}}{6} \doteq \frac{-1 \pm 10{,}440}{6}, x_1 \doteq 1{,}573, x_2 \doteq -1{,}907$$

Nyní se zaměříme na rovnici

$$x^2 + px = -q, q > 0, \text{ tj. } x^2 + px + q = 0$$

Pro kořeny této rovnice platí:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = \\ = \frac{p}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

Rovnice má řešení, pokud platí $\frac{4q}{p^2} \leq 1$. V takovém případě zvolíme substituci $\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2}$. Vzhledem k podmínce $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ je $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$. Dále je $\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \cos\varphi$. Pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme

$$x_1 = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(-1 + \cos\varphi) = -\sqrt{q}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{q}}{\sin\varphi}(-1 - \cos\varphi) = -\sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$$

Příklad 2. V R řešte rovnici $x^2 + 5x = -3$.

Řešení. V našem případě je $q = 3, p = 5$ a proto je $\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2} = \frac{12}{25}$. Odtud plyne $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ a tedy $\varphi = 43{,}85°$ a $\frac{\varphi}{2} = 21{,}93°$. Pro kořeny pak platí:

$$x_1 = -\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,21,93° \doteq -\sqrt{3}\cdot 0,403 \doteq -0,697$$
$$x_2 = -\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\,21,93° \doteq -\sqrt{3}\cdot 2,484 \doteq -4,302$$

S goniometrickým řešením kvadratické rovnice se setkáváme v roce 1946, kdy nákladem České grafické unie a. s. vyšla *Středoškolská algebra v 1000 řešených příkladech*, kterou, jak se píše v úvodu knihy, s použitím *„Algebry“* dr. H. Sechovského sestavil a přizpůsobil novým osnovám dr. Karel Šilháček. V publikaci se vychází z kvadratické rovnice ve tvaru $ax^2+bx+c = 0$ a její řešení je rozděleno do tří částí:

1. $b^2 - 4ac < 0$

Rovnice má kořeny $x_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$. Pro komplexní kořeny platí $x_1 \cdot x_2 = r^2 = \frac{c}{a}$ a tedy $r = \sqrt{\frac{c}{a}}$. Vzhledem k podmínce $b^2 - 4ac < 0$ je podíl $\frac{a}{c}$ vždy kladný. Dále je $x_1 + x_2 = 2r\cos\varphi = -\frac{b}{a}$. Odtud již plyne vztah $\cos\varphi = -\frac{b}{2ar}$, ze kterého určíme úhel φ.

Příklad 3. V C řešte rovnici $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Řešení.

$$r = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{2}, \cos\varphi = -\frac{b}{2ar} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$
$$x_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \pm i$$

2. $b^2 - 4ac > 0, a > 0, c < 0$
Zde položíme $\operatorname{tg}^2 2\varphi = -\frac{4ac}{b^2}$ a vypočítáme φ,

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-ac}}{b}.$$

Pro kořeny pak dostáváme

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = -\frac{b}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}\right) = \\
&= -\frac{b}{2a}\left(\frac{\cos 2\varphi \pm 1}{\cos 2\varphi}\right) = -\frac{b}{2a} \operatorname{tg} 2\varphi \left(\frac{\cos 2\varphi \pm 1}{\sin 2\varphi}\right), \\
x_1 &= -\frac{b}{2a}\left(\frac{2\sqrt{-ac}}{b}\right) \operatorname{cotg} \varphi = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \operatorname{cotg} \varphi, \\
x_2 &= \sqrt{\frac{-c}{a}} \operatorname{tg} \varphi.
\end{aligned}$$

Příklad 4. V R řešte rovnici $x^2 + 2x - 1 = 0$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2 2\varphi = -\frac{4ac}{b^2} = 1, \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{-ac}}{b} &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8} \\
x_1 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \operatorname{cotg} \varphi = -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} &\doteq -2,414 \\
x_2 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} &\doteq 0,414
\end{aligned}$$

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{1 - \cos\frac{\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = -\sqrt{2} - 1 \\
x_2 &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

3. $b^2 - 4ac > 0, a > 0, c > 0$
V tomto případě zavedeme substituci $\frac{4ac}{b^2} = \sin^2 2\varphi$ a vypočítáme φ, $\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{ac}}{b}$. Potom je

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = \frac{1}{2a}\left(-b \pm b\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right) = \\ &= -\frac{b}{2a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}\right) = -\frac{b}{2a}(1 \pm \cos 2\varphi) = \\ &= -\frac{b}{2a} \sin 2\varphi \frac{1 \pm \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}. \end{aligned}$$

Pro kořeny platí:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b}{2a} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{b} \operatorname{cotg} \varphi = -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{cotg} \varphi \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

Příklad 5. V R řešte rovnici $x^2 - 28x + 27 = 0$.

Řešení.

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{ac}}{b} = \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{2\sqrt{27}}{28}\right) \doteq -10{,}89339465^\circ$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{cotg} \varphi \doteq -\sqrt{27} \operatorname{cotg}(-10{,}893^\circ) \doteq \\ &\doteq \sqrt{27} \operatorname{cotg}(10{,}893^\circ) \doteq 27 \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{c}{a}} \operatorname{tg} \varphi \doteq -\sqrt{27} \operatorname{tg}(-10{,}893^\circ) \doteq \sqrt{27} \operatorname{tg}(10{,}893^\circ) \doteq 1. \end{aligned}$$

Je celkem pochopitelné, že výše uvedené metody řešení kvadratických rovnic pomocí goniometrických funkcí nenašly širšího použití a v druhé polovině dvacátého století je v učebnicích matematiky pro střední školy nenajdeme. Nicméně ukazují zajímavé souvislosti mezi algebrou a goniometrickými funkcemi, které nejsou na první pohled zřejmé. Mohly by posloužit jako téma seminární práce z matematiky pro bystré studenty na střední škole.

Literatura

[1] Šilháček, K. (1946). *Středoškolská algebra v 1000 řešených příkladech*. Praha: Česká grafická unie a. s.

[2] Gajdeczka, J. (1891). *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Classen der Mittelschulen*. Wien: F.Tempsky.

Abstract

The article focuses on the solution of quadratic equations, including the strategy of using goniometric functions.

Dag Hrubý
K. H. Borovského 476
569 43 Jevíčko
e-mail: hruby@gymjev.cz