Jan Fiala

Hvězdicové mnohoúhelníky

Učitel matematiky, Vol. 24 (2016), No. 1, 29–45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149379

HVĚZDICOVÉ MNOHOÚHELNÍKY

Jan Fiala

Planimetrie je součástí učiva geometrie v matematice v RVP na všech školách. V učivu o obrazcích je pozornost věnována pouze konvexním rovinným obrazcům. Považujeme za víc než vhodné, aby se žáci s nekonvexními obrazci seznamovali mnohem intenzivněji, už proto, že se s hvězdicovými mnohoúhelníky mohou ve svém životě setkat velmi často. Hvězdicovými mnohoúhelníky se poprvé zabýval anglický matematik, filozof a teolog, arcibiskup z Canterbury, Thomas Bradwardine (1290–1349). Na jeho práci navázal nezaslouženě méně známý švýcarský matematik Ludwig Schläfli (1814–1895).

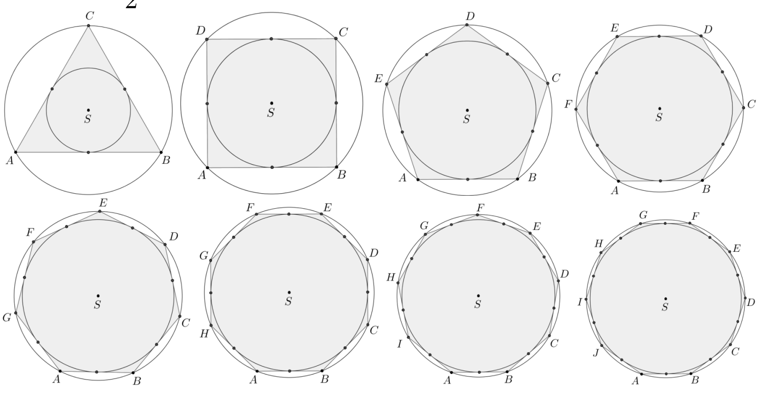
Po připomenutí pojmů mnohoúhelník a pravidelný mnohoúhelník na začátku příspěvku se text zaměřuje na popis možných cest od pravidelných k hvězdicovým mnohoúhelníkům. Zvláštní pozornost je věnována pentagramu a hexagramu. Zařazené učební úlohy jsou svou náročností určeny pro žáky základních škol a nižších ročníků gymnázia.

Mnohoúhelníky

Mnohoúhelníkem se rozumí část roviny, která je omezena uzavřenou lomenou čárou. Hranici mnohoúhelníků tvoří obecně různě dlouhé nenulové úsečky. Krajní body těchto úseček nazýváme vrcholy mnohoúhelníku. Spojnice sousedních vrcholů se nazývají strany. Úsečky spojující nesousední vrcholy se nazývají úhlopříčky. Úhly, jejichž ramena leží na dvou sousedních stranách mnohoúhelníku a mají společný vrchol ve společném bodu obou sousedních stran, se nazývají vnitřní nebo vnější úhly mnohoúhelníku. Počet vrcholů, stran a vnitřních úhlů (označíme n) je v daném mnohoúhelníku týž a je vždy aspoň 3 ($n \geq 3$). Od hodnoty n se odvíjí jeho název, například pro $n = 3$ jde o trojúhelník, $n = 4$ čtyřúhelník atd. Konvexní nazveme každý takový mnohoúhelník, jehož podmnožinou je také každá libovolná spojnice jeho libovolných dvou bodů (vnitřních anebo hraničních).

Pravidelné mnohoúhelníky

Mnohoúhelník se nazývá pravidelný, jsou-li všechny jeho strany shodné úsečky a všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné (obr. 1). Pravidelný mnohoúhelník je vždy konvexní útvar. Je-li aspoň jeden vnitřní úhel nekonvexní, jde již o nekonvexní mnohoúhelník. Vrcholy pravidelných mnohoúhelníků leží na kružnici jemu opsané, tedy každému pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat kružnici, jejíž střed leží v bodě totožném s těžištěm mnohoúhelníku. V témže bodě je i střed kružnice vepsané (obr. 1). Pro $n = 3$ jde o rovnostranný trojúhelník (s vnitřními úhly o velikosti $60°$), pro $n = 4$ jde o čtverec (s vnitřními úhly o velikosti $90°$), pro $n = 5$ o pravidelný pětiúhelník (s vnitřními úhly o velikosti $108°$) atd. Velikost vnitřního úhlu pravidelného n-úhelníku lze vypočítat podle vztahu $\alpha_n = \dfrac{n-2}{n} \cdot 180°$ v míře stupňové. Počet úhlopříček se vypočítá ze vztahu $\dfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$.



Obr. 1: Rovnostranný trojúhelník a pravidelný pěti- až desetiúhelník

Všechny pravidelné mnohoúhelníky jsou pro sudé n středově souměrné podle středu S a osově souměrné podle n os souměrnosti a pro liché n jsou pouze osově souměrné podle n os souměrnosti.

Hvězdicové mnohoúhelníky

Pravidelné mnohoúhelníky dále využijeme k vytváření různých rovinných objektů ve tvaru hvězd. Na pravidelné mnohoúhelníky samotné nebudeme nahlížet jako na hvězdicové útvary, protože s rostoucím n ztrácejí tvar blízký hvězdě s rozlišitelnými cípy.

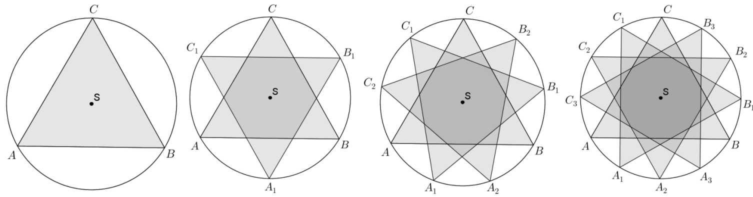
Některé hvězdicové útvary mohou vzniknout otočením pravidelných n-úhelníků kolem jejich středu o vhodný úhel α, přičemž obrazy pravidelného n-úhelníku v otočení (dolní indexy používáme pro označení cípů, „vnitřní“ vrcholy ponecháváme bez označení) sjednotíme s jejich vzory. Příkladem jsou hvězdicový šesti-, devíti- a dvanáctiúhelník v úlohách 1 a 2. Šest je nejmenší možný počet cípů, který může mít takto vzniklý hvězdicový n-úhelník. Hvězdy vzniklé otočením pravidelného n-úhelníku jsou vždy nekonvexní mnohoúhelníky a jsou osově nebo také středově souměrné.

Úloha 1. Narýsuj libovolný rovnostranný trojúhelník a sestroj jeho obraz v otočení $R\,(S; \alpha = 60^\circ)$, kde S je střed trojúhelníku. Urči počet cípů vzniklého hvězdicového útvaru.

Řešení. Pro úhel otočení $\alpha = \pm 60^\circ$ (nebo také o $\alpha = \pm 180^\circ$, nebo dále o $\alpha = \pm 300^\circ$) získáme hvězdicový šestiúhelník. Hvězda má 6 cípů (obr. 2).

Úloha 2. Narýsuj libovolný rovnostranný trojúhelník a sestroj jeho obraz v otočení $R\,(S; \alpha = 30^\circ)$, kde S je střed trojúhelníku. Opakuj otočení, až ti vznikne hvězda. Kolik cípů má vzniklá hvězda? Kolikrát jsi opakoval otočení? Jaký hvězdicový mnohoúhelník vznikne v otočení rovnostranného trojúhelníku $R\,(S; \alpha = 40^\circ)$?

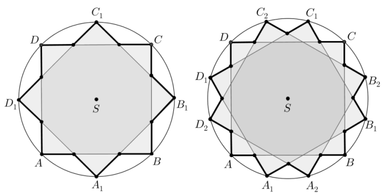
Řešení. Pro úhel otočení $\alpha = 30^\circ$ a dalším skládáním těchto otočení vznikne hvězdicový šestiúhelník a dvanáctiúhelník. V otočení o úhel $\alpha = 40^\circ$ vznikne hvězdicový devítiúhelník (obr. 2).



Obr. 2: Rovnostranný trojúhelník, hvězdicový šestiúhelník, devítiúhelník a dvanáctiúhelník

Úloha 3. Narýsuj libovolný čtverec a hledej otočení $R(S;\alpha)$ se středem S čtverce, ve kterém vznikne hvězdicový mnohoúhelník. Kolikrát a o jaký úhel bylo potřeba otáčet?

Řešení. Otočením čtverce o úhel v základní velikosti $\alpha = \pm 45°$, $\pm 135°$, $\pm 225°$, $\pm 315°$ získáme hvězdicový osmiúhelník (obr. 3, vlevo). V otočení o úhel $\alpha = \pm 30°$ (a jeho celočíselné násobky, pro trojnásobek by šlo o předchozí případ) vznikne hvězdicový dvanáctiúhelník (obr. 3, vpravo).



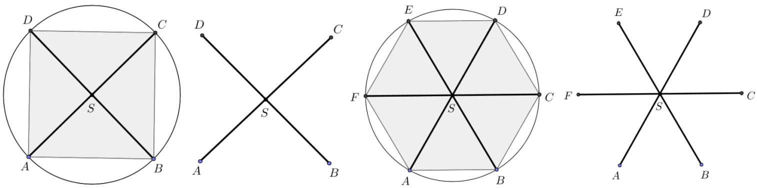
Obr. 3: Hvězdicový osmiúhelník a dvanáctiúhelník

Další typ hvězdicových útvarů budeme nazývat „bezcípé hvězdy“. Bezcípé hvězdy jsou hvězdicové rovinné útvary tvořené n shodnými úsečkami (rameny), které spojují vrcholy pravidelného n-úhelníku ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) s jeho středem S.

Úloha 4. Narýsuj libovolný čtverec (resp. pravidelný šestiúhelník) a v něm nalezni čtyřramennou (resp. šestiramennou) bezcípou hvězdu.[1]

[1] Někdy se uvádí, že ještě jednodušší je dvouramenná hvězda, kterou tvoří dvě stejně dlouhá ramena se společným počátkem, která leží na navzájem opačných polopřímkách.

Řešení. Viz obr. 4.



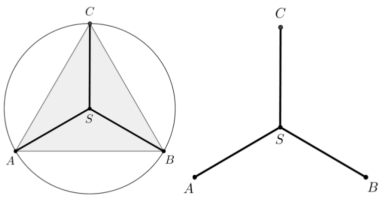
Obr. 4: Bezcípé hvězdy pro čtverec a pravidelný šestiúhelník

Úloha 5. V programu GeoGebra vytvoř bezcípé hvězdy pro pravidelný osmiúhelník a desetiúhelník.

Všechny bezcípé hvězdy pro n sudé jsou symetrické podle středu S a podle n os souměrnosti. Počet jejich ramen je n a tvoří páry ležící na navzájem opačných polopřímkách. Naproti tomu: Bezcípé hvězdy vzniklé v pravidelném n-úhelníku pro n liché přirozené číslo ($n \geq 3$) nejsou středově souměrné, zůstávají však souměrné podle n os souměrnosti. Počet jejich ramen zůstává n, ale žádná dvě ramena neleží na navzájem opačných polopřímkách. Všechny bezcípé hvězdy jsou tvořeny nekonečně mnoha body roviny, nemají však žádný obsah.

Úloha 6. Narýsuj libovolný rovnostranný trojúhelník a do něho trojramennou bezcípou hvězdu.

Řešení. Viz obr. 5.

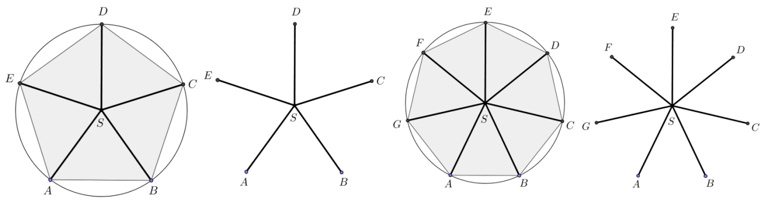


Obr. 5: Bezcípá hvězda pro trojúhelník

Úloha 7. Trojramenná hvězda je základem symbolu automobilové značky Mercedes-Benz. Najdi obrázek tohoto symbolu.

Úloha 8. V programu GeoGebra narýsuj libovolný pravidelný pětiúhelník a sedmiúhelník a v nich příslušné bezcípé hvězdy.

Řešení. Viz obr. 6.

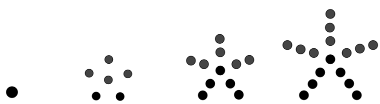


Obr. 6: Pětiramenná a sedmiramenná bezcípá hvězda

Úloha 9. Konstrukce různých částí technických zařízení (např. vrtulí, lodních šroubů, motorů apod.) vychází z hvězdicových mnohoúhelníků, např. dvoulisté, třílisté, čtyřlisté nebo pětilisté vrtule. Najdi vhodný obrázek a vyznač osy souměrnosti.

Úloha 10. Považujme čísla $1, 6, 11, 16, 21, \ldots, 5n - 4$ za dané počty bodů v rovině. Ukaž, že je možné uspořádat tyto body do tvaru pětiramenné bezcípé hvězdy. Nakresli pětiramenné bezcípé hvězdy pro $n = 1$, $n = 6$, $n = 11$, $n = 16$.

Řešení. Viz obr. 7. Číslo 1 symbolizované jedním bodem také splňuje symetrii pro pět os.



Obr. 7: Pětiramenné hvězdy pro čísla 1, 6, 11, 16

Dále se zaměříme na hvězdicové mnohoúhelníky, které vzniknou spojením každého vrcholu daného pravidelného n-úhelníku pouze s vrcholy nesousedními a navíc takovými, jejichž umístění od výchozího vrcholu je konstantní, např. spojujeme daný vrchol s každým druhým (nebo třetím, čtvrtým atd.) vrcholem v kladném i záporném smyslu otáčení. Každý hvězdicový mnohoúhelník s n stranami lze popsat tzv. Schläfliho symbolem $\{n/k\}$, který označuje „hustotu“ k spojování vrcholů, tj. spojíme každý k-tý vrchol. Například pentagram má označení $\{5/2\}$, tedy pět stran a spojili jsme každý druhý vrchol pětiúhelníku. Hned po prvních pokusech rýsování těchto hvězdicových mnohoúhelníků snadno žáci objeví několik podstatných zákonitostí: Především hvězdicové mnohoúhelníky s označením $\{n/1\}$, $n \geq 5$ jsou původní pravidelné mnohoúhelníky. Dále lze snadno ukázat, že například $\{5/2\} = \{5/3\}$ nebo pro sedmiúhelník $\{7/4\} = \{7/3\}$, $\{7/5\} = \{7/2\}$, obecně $\{n/k\} = \{n/n-k\}$. Z uvedeného tedy vyplývá, že hodnota k musí být větší než 1 a současně menší než polovina n, tedy $k \in \left\{2; \frac{n}{2}\right)$. Legitimní je otázka, kolik hvězdicových mnohoúhelníků je možné od daného n-úhelníku vytvořit. Tabulka ukazuje výsledky pro nejnižší n:

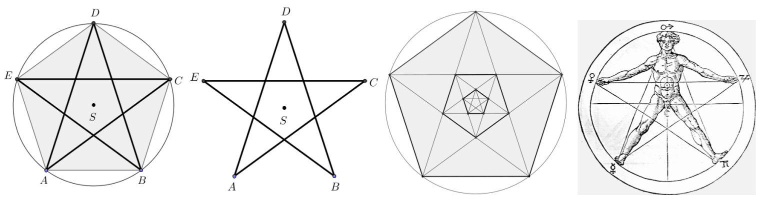
n	Schläfliho symboly možných hvězdicových mnohoúhelníků	Počet
5	$\{5/2\}$	1
6	$\{6/2\}$	1
7	$\{7/2\}, \{7/3\}$	2
8	$\{8/2\}, \{8/3\}$	2
9	$\{9/2\}, \{9/3\}, \{9/4\}$	3
10	$\{10/2\}, \{10/3\}, \{10/4\}$	3
11	$\{11/2\}, \{11/3\}, \{11/4\}, \{11/5\}$	4
12	$\{12/2\}, \{12/3\}, \{12/4\}, \{12/5\}$	4

Atd. Z tabulky je zřejmé, že počet roste vždy o jedna po dvojicích sousedících hodnot n: 1,1 – 2,2 – 3,3 atd. Není obtížné odvodit: Pro n sudé je počet možných hvězdicových mnohoúhelníků $p = \dfrac{n-4}{2}$, pro n liché je tento počet roven $p = \dfrac{n-3}{2}$.

Všechny tyto hvězdicové mnohoúhelníky nazýváme pravidelné a objevují se v mnoha oblastech života člověka a také v přírodě.

Úloha 11. Narýsuj libovolný pravidelný pětiúhelník a do něho narýsuj hvězdu spojením každého druhého vrcholu. Vznikl tzv. pentagram. Je to útvar osově nebo středově souměrný? Kolik má os souměrnosti? Narýsuj je.

Řešení. Viz obr. 8. Pentagram není středově souměrný útvar, je osově souměrný podle 5 os souměrnosti, které procházejí vrcholem a vždy středem S.



Obr. 8: Pravidelný pětiúhelník a pentagram, vepsané pentagramy a pětiúhelníky, homo ad circulum[2]

Úloha 12. Nakresli pentagram jedním tahem.[3]

Úloha 13. Ukaž, že se dá pentagram složit z pěti shodných deltoidů.

Úloha 14. Urči velikosti vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C, D, E. Urči velikosti vnitřních nekonvexních úhlů mezi sousedními stranami pentagramu.

Řešení. $36^\circ, 252^\circ$.

Úloha 15. Do libovolného pravidelného pětiúhelníku vepiš pentagram. Do pentagramu znovu vepiš pravidelný pětiúhelník. Postup opakuj, dokud to bude možné.

[2]Zdroj obrázku: URL: `http://manas-vidya.blogspot.cz/2008/12/anahata-chakra.html`

[3]Jde o tzv. „jednotažku“.

Řešení. Viz obr. 8, druhý zprava.

Vpisování hvězdicových mnohoúhelníků do jejich pravidelných vzorů generuje vždy nový pravidelný n-úhelník se shodným n jako původní vzor.

Úloha 16. Zjisti, které státy světa mají na státní vlajce pentagram.

Řešení. Pentagram se vyskytuje například na státní vlajce a státním znaku Maroka a Etiopie.

Úloha 17. Najdi obrázek hvězdice mořské. Proč mají tito mořští živočichové toto jméno?

Řešení. Mořské hvězdice mají většinou tvar pěticípé hvězdy, většinou mají pět chapadel.

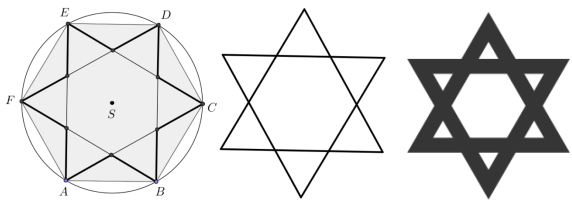
Slovo pentagram pochází z řeckého slova *pentagrammon*, které znamená pět přímek. Pentagram je odpradávna magickým symbolem: poskytoval ochranu anebo naopak symbolizoval zlo. Například pentagram využili Agrippa z Nettesheimu (obr. 8, vpravo) nebo Leonardo da Vinci k vizuálnímu zdůraznění metafyzické centrality člověka v době renesance. Pro Pythagorejce znamenal jednak zdraví, ale i nahlédnutí do nekonečna: do vnitřního pětiúhelníku lze opakovaně vpisovat další pentagramy. Velmi často se pentagram využíval v sakrálních především katolických stavbách, například v růžicích okenních vitráží, na malbách vnitřních zdí nebo také v exteriéru budov, jak je tomu například na zvonici kostelní věže na hlavním náměstí v Hannoveru. Často se pentagram jako pěticípá hvězda vyskytoval také na mincích a bankovkách, na látkových vzorech a vánočních dekoracích. Konečně je to také symbol bývalého Sovětského svazu, USA a jiných zemí.

Největší geometrickou zajímavostí pentagramu je skutečnost, že vykazuje několikrát vlastnosti zlatého řezu: průsečík dvou úhlopříček pravidelného pětiúhelníku dělí každou z nich v poměru zlatého řezu, platí dále, že poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo a konečně že poměr délek stran původního a uvnitř vzniklého pětiúhelníku je druhou mocninou zlatého čísla (Voráčová et al., 2012: s. 92, 106).

Hvězdicový mnohoúhelník se pro $n = 6$ nazývá hexagram $\{6/2\}$. Pootočený hexagram je známý symbol židovské tzv. Davidovy hvězdy (obr. 9, uprostřed).

Úloha 18. Narýsuj libovolný pravidelný šestiúhelník a do něj vepiš hexagram. Podle kolika os je tento hexagram souměrný? Jde o obrazec středově souměrný?

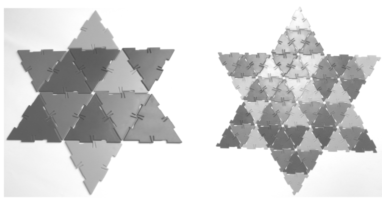
Řešení. Viz obr. 9, zleva. Hexagram je souměrný podle 6 os souměrnosti. Je to útvar středově souměrný podle středu S, který leží v průsečíku úhlopříček šestiúhelníku.



Obr. 9: Hvězdicový šestiúhelník, Davidova hvězda

Úloha 19. Užitím stavebnice Polydron ukaž, že je možné hexagram složit z 12 větších, resp. 48 menších rovnostranných trojúhelníků, nebo také ze 6 shodných kosočtverců (obr. 10).

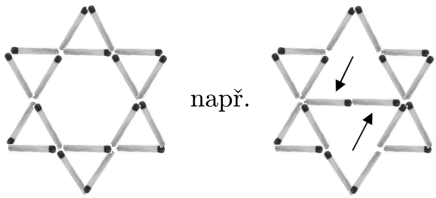
Řešení. Hexagram složený z 12 shodných rovnostranných trojúhelníků (obr. 10, vlevo), hexagram složený ze 48 shodných rovnostranných trojúhelníků (obr. 10, vpravo).



Obr. 10: Hexagram sestavený ze stavebnice Polydron

Úloha 20. Na obrázku je hexagram sestavený z 18 zápalek (obr. 11, vlevo). Kolik v něm najdeš různých trojúhelníků? Přemísti právě dvě zápalky tak, aby obrázek obsahoval pouze šest trojúhelníků, a aby každá z přemístěných zápalek byla součástí některého ze šesti nově vzniklých trojúhelníků.

Řešení. Hexagram složený ze sirek obsahuje 8 rovnostranných trojúhelníků. Správné řešení úlohy je na obr. 11 vpravo.



Obr. 11: Davidova hvězda sestavená ze zápalek

Úloha 21. Zjisti, která země má na své státní vlajce Davidovu hvězdu.

Řešení. Modrý hvězdicový šestiúhelník je v upravené podobě na vlajce Izraele (obr. 9, vpravo).[4]

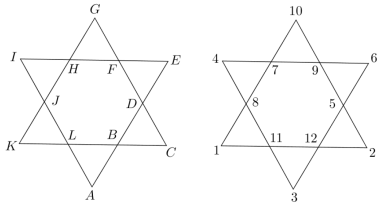
Úloha 22. Ověř, že půdorysem renesančního letohrádku Hvězda nedaleko Prahy je šesticípý hvězdicový mnohoúhelník. Pokus se nalézt další stavby, na nichž se objevují hvězdicové útvary.

Úloha 23. Prověř, že šerifské hvězdy mají většinou tvar pěticípých nebo šesticípých hvězd.

Úloha 24. Místo písmen ABCDEFGHIJKL na šesticípé hvězdě (obr. 12, vlevo) doplň čísla od 1 do 12 místo písmen tak, aby součty čísel na každé čtveřici políček ležících v jedné přímce se vždy rovnaly 26 a navíc, aby tutéž hodnotu měl součet čísel stojících na vrcholech cípů hvězdy (Stewart, 2013: s. 88, 277).

[4] Pravidelné hvězdy se vyskytují na vlajkách mnoha států světa: Chile – pentagram, Austrálie – heptagram, Ázerbájdžán – octagram, Nepál – dvanáctiúhelník, Malajsie – čtrnáctiúhelník aj.

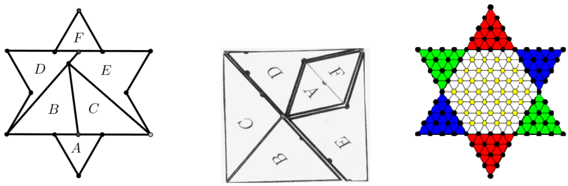
Řešení. Viz obr. 12, vpravo.



Obr. 12: Magická šesticípá hvězda s řešením

Úloha 25. Hvězdicový šestiúhelník je rozdělen na šest různých částí (obr. 13, vlevo). Rozstřihni hvězdu podle čar a slož části k sobě tak, aby vznikl obdélník. Díly ale nesmíš překlápět (Moscovich, 2009: s. 64, 125).

Řešení. Viz obr. 13, uprostřed.



Obr. 13: Hvězda rozdělená na šest nepravidelných částí, řešení úlohy 26, herní plán Čínské dámy[5]

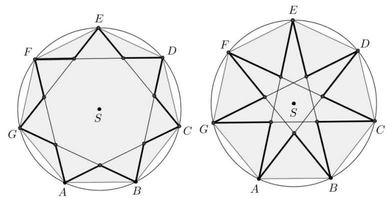
Úloha 26. Ověř si, že herní plán stolní hry Čínská dáma je ve tvaru hexagramu (obr. 13, vpravo).

Úloha 27. Ověř, že krystaly sněhových vloček mají často tvary hvězdicových šestiúhelníků.

Úloha 28. V programu GeoGebra narýsuj všechny hvězdicové sedmiúhelníky. Kolik jich je? Podle kolika os jsou souměrné?

[5]Zdroj obrázku: „Sternhalma“ by Lars H. Rohwedder (User: RokerHRO – Selfmade using Xfig, see `http://roker.dingens.org/wikipedia/Sternhalma.fig`. Licensed under CC BY 3.0 via Wikimedia Commons – `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sternhalma.svg#mediaviewer/File:Sternhalma.svg`

Řešení. Viz obr. 14. Existují pouze dva hvězdicové sedmiúhelníky $\{7/2\}$, $\{7/3\}$. Jsou souměrné podle 7 os.

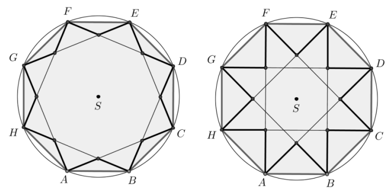


Obr. 14: Hvězdicové sedmiúhelníky $\{7/2\}$, $\{7/3\}$

Úloha 29. Ověř, že logo hotelu Zlatá Hvězda v Třeboni má tvar hvězdicového sedmiúhelníku $\{7/2\}$.

Úloha 30. V programu GeoGebra narýsuj všechny hvězdicové osmiúhelníky. Kolik jich je? Podle kolika os jsou souměrné? Jsou středově souměrné?

Řešení. Viz obr. 15. Existují pouze dva hvězdicové osmiúhelníky. Hvězdicový osmiúhelník má 8 os souměrnosti, je středově souměrný podle bodu S.



Obr. 15: Hvězdicové osmiúhelníky $\{8/2\}$, $\{8/3\}$

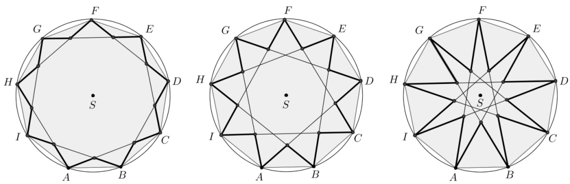
Úloha 31. Ověř, že hvězdicový osmiúhelník $\{8/2\}$ je shodný s hvězdicovým mnohoúhelníkem, který vznikne otočením čtverce o úhel $\alpha = 45°$.

Řešení. Porovnej obr. 3 a obr. 15 vlevo.

Úloha 32. Ověř, že v erbu českého šlechtického rodu Šternberků byla osmicípá hvězda.

Úloha 33. V programu GeoGebra narýsuj všechny hvězdicové devítiúhelníky. Kolik jich je? Podle kolika os souměrnosti jsou souměrné?

Řešení. Viz obr. 16. Hvězdicové devítiúhelníky jsou 3 a jsou souměrné podle 9 os.

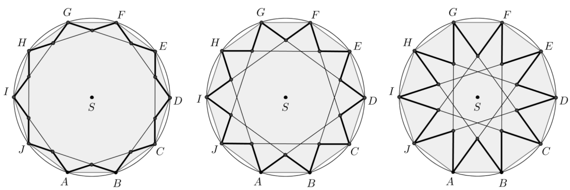


Obr. 16: Tři možné podoby hvězdicových devítiúhelníkůy $\{9/2\}$, $\{9/3\}$, $\{9/4\}$

Úloha 34. Ověř, že hvězdicový devítiúhelník $\{9/3\}$ (obr. 16, uprostřed) je shodný s hvězdicovým mnohoúhelníkem, který vznikne sjednocením obrazů rovnostranného trojúhelníku v otočení o úhel $\alpha = 40°$ (obr. 2).

Úloha 35. V programu GeoGebra narýsuj všechny existující hvězdicové desetiúhelníky. Kolik jich je? Kolik mají os souměrnosti? Jsou také středově souměrné?

Řešení. Viz obr. 17. Hvězdicové desetiúhelníky jsou 3 a jsou souměrné podle 10 os i podle středu S.



Obr. 17: Tři možné podoby hvězdicových desetiúhelníků $\{10/2\}$, $\{10/3\}$, $\{10/4\}$

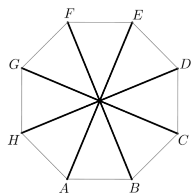
Úloha 36. V programu GeoGebra narýsuj pravidelný pětiúhelník a zobraz ho v otočení o úhel $\alpha = 36°$. Zvýrazni vzniklý hvězdicový mnohoúhelník. Ověř, že hvězdicový desetiúhelník $\{10/2\}$ je s ním shodný.

Úloha 37. Hvězdicové mnohoúhelníky vytváříme tak, že rýsujeme spojnice těch vrcholů pravidelných mnohoúhelníků, které mají od výchozího vrcholu stále stejný „odstup“, například každý druhý nebo třetí vrchol. Některé hvězdicové mnohoúhelníky můžeme narýsovat tak, že v koncovém bodu první spojnice navážeme další spojnicí atd., až nakonec po všech potřebných spojnicích opět skončíme ve výchozím bodu. Takto narýsovaný hvězdicový mnohoúhelník nazýváme „jednotažka“, tj. byl narýsován jedním tahem, neboť tužka se při rýsování nezvedla z papíru a počáteční bod splynul s koncovým. Jsou hvězdicové devítiúhelníky a desetiúhelníky jednotažky?

Řešení. Načrtnout jedním tahem lze každý hvězdicový n-úhelník, který nelze vytvořit otáčením libovolného pravidelného n-úhelníku ($n \geq 3$). Hvězdicové devítiúhelníky $\{9/2\}$, $\{9/4\}$ je možné načrtnout jedním tahem, devítiúhelník $\{9/3\}$ ne. Zajímavá je situace u hvězdicových desetiúhelníků: $\{10/3\}$ je jednotažka, desetiúhelníky $\{10/2\}$, $\{10/4\}$ jedním tahem načrtnout nelze.

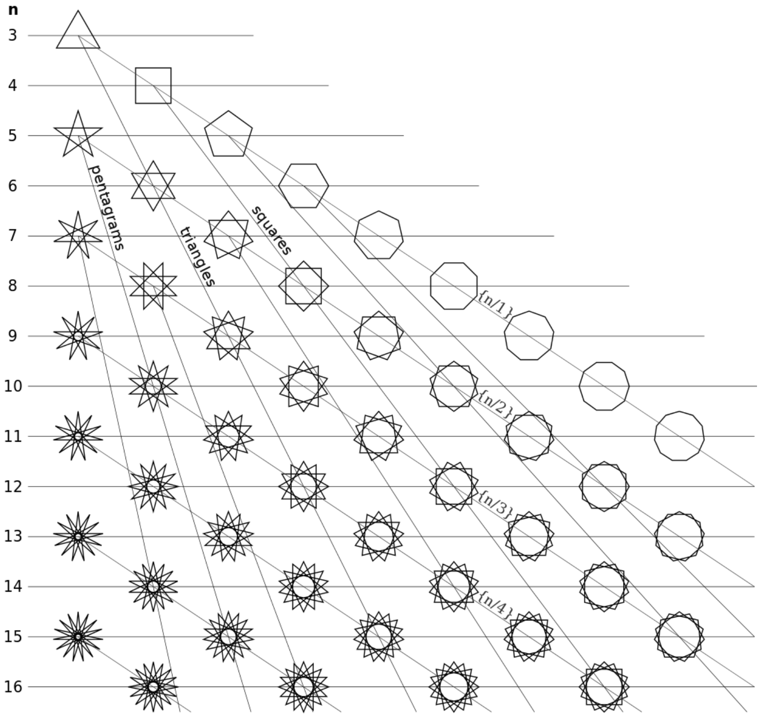
Úloha 38. Ukaž na náčrtku, že pravidelný hvězdicový osmiúhelník $\{8/4\}$ je totožný s bezcípým hvězdicovým osmiúhelníkem.

Řešení. Každý pravidelný hvězdicový mnohoúhelník se Schläfliho symbolem $\left\{n/\frac{n}{2}\right\}$, kde n je sudé přirozené číslo větší než 3, je bezcípý hvězdicový mnohoúhelník (obr. 18).



Obr. 18: Bezcípý hvězdicový osmiúhelník

Dobrý přehled o hvězdicových mnohoúhelnících poskytuje schéma na obr. 19.



Obr. 19: Přehled o hvězdicových mnohoúhelnících, n udává počet stran[6]

Hvězdicové mnohoúhelníky vzniknou také sjednocením pravidelného n-úhelníku a n cípů ve tvaru rovnoramenných trojúhelníků se základnou délky strany n-úhelníku (případně rovnostranných trojúhelníků) tak, že tyto základny splynou se stranami pravidelného n-úhelníku. V literatuře je možné o nich nalézt více informací.

[6]Zdroj obrázku: [4].

Závěr

V příspěvku je možné se seznámit se vznikem a některými vlastnostmi vybraných hvězdicových n-úhelníků, které lze nalézt v pravidelných mnohoúhelnících. Velmi známými hvězdicovými mnohoúhelníky jsou pentagram a hexagram. Hvězdicové mnohoúhelníky jsou vhodným doplňkem učiva planimetrie na ZŠ, SŠ i v příslušných nižších ročnících výuky matematiky na gymnáziu a slouží k nácviku rýsovacích dovedností žáků a k rozvoji jejich znalostí v planimetrii. Při konstrukci hvězdicových mnohoúhelníků lze velmi efektivně využít například program GeoGebra. Téma lze pojmout také projektově.

Literatura

[1] Moscovich, I. (2009). *Nová kniha hlavolamů.* Bratislava: Perfekt.

[2] Stewart, I. (2013). *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta.* Praha: Dokořán a Argo.

[3] Voráčová, Š., et al. (2012). *Atlas geometrie.* Praha: Academia.

[4] WolframMathWorld URL: `http://mathworld.wolfram.com/StarPolygon.html`

Obrázky, u kterých není uveden zdroj, vytvořil autor v programu GeoGebra.

Abstract

The article presents some possibilities to create non-convex star polygons from regular polygons. The text includes exercises about the construction of the star polygons and exercises inciting to study their attributes and their using in the everyday life of the pupil. The subject of the star polygons deepens the basic curriculum in plane geometry in RVP and it is a suitable motivation complement in teaching mathematics at the second stage of elementary school as well as at grammar school.

Jan Fiala
Gymnázium V. Nováka J. Hradec
Husova 333
377 01 Jindřichův Hradec
e-mail: fiala@gvn.cz