Martin Dvořák; Jonáš Havelka

Nekonečna

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 4, 12–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149338`

Literatura

[1] https://www.youtube.com/watch?v=ZMkIiFs35HQ

[2] https://math.stackexchange.com/questions/855/for-any-prime-p-3-why-is-p2-1-always-divisible-by-24

[3] Dlab, V., Pospíchal, T.: Divisibility of certain products. *College Math. Journal.*

Nekonečna

Martin Dvořák, IST Austria, Klosterneuburg
Jonáš Havelka, MFF UK, Praha

Článek vychází ze studijního textu M&M [1]. Korespondenční seminář M&M se věnuje převážně matematice, fyzice a informatice.

V rámci korespondenčního semináře M&M navrhujeme různá témata, nad kterými můžou účastníci (převážně středoškoláci) bádat, a k nim zveřejňujeme studijní texty a doprovodné úlohy. Nejlepší řešitelé bývají dvakrát ročně zváni na soustředění.

Hilbertův hotel

Představme si, že spravujeme hotel[1], kde je nekonečně mnoho jednolůžkových pokojů. COVID-19 ustupuje, takže nám konečně bylo umožněno otevřít, což způsobilo obrovský zájem, tudíž máme všechny pokoje obsazené. Abychom se v hotelu vyznali, očíslovali jsme pokoje čísly $\{1, 2, 3, \dots\}$ tak, že každé číslo je využito právě jednou a každý pokoj má právě jedno číslo. Tedy máme tolik pokojů, kolik je přirozených čísel. Tento počet (tedy naše nekonečno) označme[2] jako $\aleph_0$.

Najednou nám na vchodové dveře zaklepe nový host. Nejprve ho chceme odmítnout, vždyť přece máme všechny pokoje obsazené, ale pak

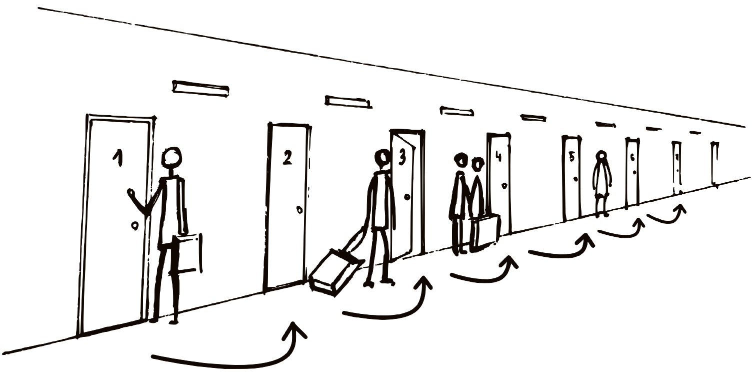
[1] S tímto myšlenkovým experimentem přišel v přednášce „O nekonečnu“ roku 1924 německý matematik David Hilbert, jemuž v matematice vděčíme za mnoho poznatků. Viz: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_paradox_of_the_Grand_Hotel

[2] Symbol ∞ se obecně pro nekonečný počet nepoužívá, protože jak uvidíme dále, není nekonečno jako nekonečno. Symbol $\aleph$ (alef, první písmeno hebrejské abecedy) jsme nevybrali náhodně, o tom tu však nechceme vyprávět. Zvídavé jen odkážeme na: https://en.wikipedia.org/wiki/Aleph_number

se nám ho zželí. Někam ho ubytovat přece musíme. Tak třeba do pokoje 1. Tam už však host bydlí. Nedá se nic dělat, musíme původního obyvatele pokoje 1 přesunout jinam. Třeba do pokoje 2. Původního hosta z pokoje 2 můžeme přestěhovat do 3 a tak dále. A hle, opravdu se nám povedlo ubytovat nového hosta do našeho plného hotelu, sice jsme u toho museli každého hosta přestěhovat z pokoje i do pokoje $i+1$, ale na to si zkrátka hosté musí zvyknout. Můžeme si všimnout, že jsme tím ukázali, že $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, jelikož nyní máme $(\aleph_0 + 1)$ hostů v $\aleph_0$ pokojích.

Navíc, pokud nám na dveře zaklepe libovolný přirozený počet n hostů, můžeme matematickou indukcí[3)] každého odbavit stejně jako jednotlivce (což už umíme z minulého odstavce), tedy:

$$\begin{aligned}\aleph_0 + n &= (\aleph_0 + 1) + (n-1) = \aleph_0 + (n-1) = (\aleph_0 + 1) + (n-2) = \\ &= \aleph_0 + (n-2) = (\aleph_0 + 1) + (n-3) = \ldots = \aleph_0 + (n-n) = \aleph_0\end{aligned}$$



Obr. 1: První stěhování (uvolnění prvního pokoje)

Nový host napsal na náš hotel tak dobrou recenzi, že se jedna cestovní kancelář rozhodla k nám vypravit autobus. A jelikož ta cestovní kancelář byla podobná našemu hotelu, byl to nekonečný autobus – měl $\aleph_0$ sedadel očíslovaných $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Kdybychom se tedy pokusili ubytovat do našeho plného hotelu nové hosty po jednom jako výše, nikdy bychom neubytovali celý tento autobus. Stěhování by totiž nebralo konce a hosté nemají nekonečně mnoho trpělivosti. Musíme na to jít chytřeji a na nekončící stěhování si dát pozor.

Jeden z hezkých způsobů je, že necháme každého starého hosta z pokoje i přestěhovat se na pokoj $2i$. Tím se nám uvolnily pokoje $\{1, 3, 5, \ldots\}$.

3) `https://matematika.cz/matematicka-indukce`

Tedy nového hosta ze sedadla i přesuneme do pokoje $2i-1$. Jinými slovy, staré hosty přestěhujeme do sudých pokojů a nové do lichých. Tím jsme ubytovali všechny nové hosty a nevyhodili žádného starého. Tedy jsme ukázali, že $\aleph_0 + \aleph_0 =$ počet starých plus počet nových hostů $= \aleph_0 =$ počet pokojů. Matematickou indukcí lze dokázat, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Ze stejného důvodu je všech celých čísel (množina $\mathbb{Z}$) stejně mnoho jako všech přirozených čísel (množina $\mathbb{N}$).

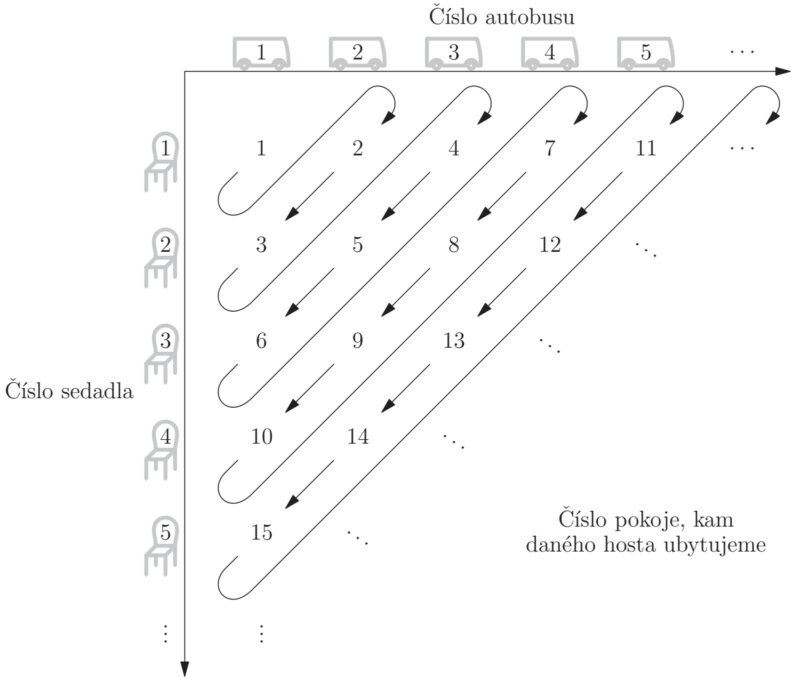
Nekonečno na druhou

Cestovní kancelář si náš hotel oblíbila, a tak k nám vyslala $\aleph_0$ autobusů, každý s $\aleph_0$ lidmi. Nejprve se zhrozíme, že tolik lidí přece nemůžeme nikdy ubytovat. Vždyť to je nekonečno nekonečen! Pak si ale řekneme, že všechny dřívější hosty se nám ubytovat podařilo, tak proč by to nešlo i s těmito.

Odteď dále budeme ignorovat, že už máme plno, a budeme nové hosty ubytovávat „nanovo“ do pokojů $\{1, 2, 3, \dots\}$, čímž se pro nás nic podstatného už nezmění. Formálně řečeno, hledáme prosté zobrazení z množiny všech hostů do množiny pokojů, neboli prostou funkci typu $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Abychom zvládli obsloužit všechny hosty, musíme si pořádně rozmyslet, v jakém pořadí je budeme ubytovávat.

Pokud bychom ale začali prvním autobusem a ubytovali lidi z jeho sedadel $\{1, 2, 3, \dots\}$, nikdy by se nedostalo na lidi z ostatních autobusů, protože v prvním autobusu pořád bude někdo, koho je třeba ubytovat. Proto budeme rozšiřovat počet autobusů, ze kterých ubytováváme lidi. Kdybychom ale chtěli například nejprve ubytovat všechny, kdo sedí na sedadle číslo 1 ve všech autobusech, pro změnu bychom nikdy neubytovali lidi z ostatních sedadel. Problém lze vyřešit například následujícím systémem ubytování hostů.

Jako první ubytujeme hosta z prvního sedadla prvního autobusu. Do druhého pokoje ubytujeme hosta z prvního sedadla druhého autobusu. Do dalšího pokoje ale nepůjde host ze třetího autobusu, nýbrž opět z prvního, konkrétně z druhého sedadla. Až pak ubytujeme hosta z prvního sedadla třetího autobusu, po něm hosta z druhého sedadla druhého autobusu, potom hosta z třetího sedadla prvního autobusu. Následuje host z prvního sedadla čtvrtého autobusu a tak dále. Začátek této posloupnosti můžeme „zakódovat“ jako $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$. Graficky znázorněné to můžete vidět na obr. 2.



Obr. 2: Ubytování $\aleph_0$ autobusů o $\aleph_0$ cestujících

Můžeme si všimnout, že v každé antidiagonále, kterou číslujeme (hosté na stejné antidiagonále mají stejný součet čísla sedadla a čísla autobusu), je konečně mnoho lidí (v první 1 host, ve druhé 2 hosté, ve třetí 3 hosté, atd.), tedy na každou antidiagonálu se dostane, ale zároveň každý host je v nějaké antidiagonále, takže se opravdu dostane na všechny. To znamená, že jsme právě dokázali rovnost $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

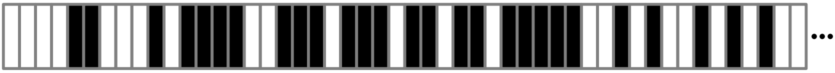
Od tohoto výsledku už není daleko k tomu, abychom došli k závěru, že všech racionálních čísel (množina $\mathbb{Q}$) je stejně mnoho jako všech přirozených čísel (množina $\mathbb{N}$).

Dále lze matematickou indukcí rozšířit náš poznatek na $\aleph_0^n = \aleph_0$ pro libovolné přirozené číslo n.

Dva na nekonečno

Po takovém úspěchu se nám ozvala další cestovní kancelář, že by u nás chtěla ubytovat svůj autobus hostů. Avšak nemá sedadla očíslovaná čísly;

má je označena všemi nekonečnými čárovými kódy (tedy nekonečnými posloupnostmi černých a bílých úseků), jako třeba ten na obr. 3.

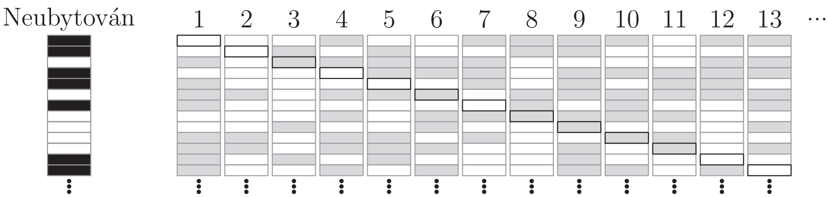


Obr. 3: Čárový kód

Musíme vás však zklamat, takový autobus neubytujeme. Jak to ale dokázat? Důkazy, že něco nejde, bývají v matice většinou mnohem obtížnější než důkazy, že něco jde. Nebo nemusí být ani komplikované, ale často vyžadují nějaký hezký netriviální nápad. Tohle je jeden z nich.

Představme si, pro spor, že by se nám hosty z takového autobusu povedlo ubytovat. Následně vytvořme čárový kód tak, že první úsek tohoto kódu bude jiný než první úsek čárového kódu hosta v prvním pokoji (tj. bude černý, pokud první čárový kód začíná bíle, jinak bude bílý). Druhý úsek tohoto kódu bude jiný než druhý úsek čárového kódu hosta v druhém pokoji. Třetí bude jiný než třetí úsek třetího...

Tak jsme vytvořili čárový kód (nazývaný „negace hlavní diagonály"), který jistě přísluší nějakému hostovi. Ten host však nemůže být ubytován v prvním pokoji, protože se neshodují v prvním úseku. Nemůže být ani v druhém, protože tam se neshodují v druhém úseku... Tudíž tento host není ubytován v našem hotelu. Jako bonus (není třeba k našemu důkazu) si můžete rozmyslet, že toto není ani zdaleka jediný host, na kterého se nedostalo.



Obr. 4: Cantorova diagonální metoda

Tímto postupem (který se nazývá Cantorova diagonální metoda) jsme dokázali, že v autobuse takové cestovní kanceláře není stejný počet lidí, jako pokojů u nás v hotelu. Ale očividně jich je také nekonečno.

Toto „jiné“ nekonečno je zvykem (za jistých předpokladů[4], které zde nebudeme více rozvádět) označovat symbolem $\aleph_1$. V příslušném jazyce můžeme napsat $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$; viz čárové kódy, které mají na každém políčku (indexovaném přirozenými čísly — těch je $\aleph_0$) jednu ze 2 možných barev {bílá, černá}.

Pokud bychom měli zavedený pojem mohutnosti, mohli bychom snadno ukázat, že $\aleph_1 > \aleph_0$. Rozmyslete si, že přiřadit naopak ke každému pokoji unikátní čárový kód (tj. prosté zobrazení opačným směrem) je triviální.

Mohutnost $\aleph_1$ má například potenční množina přirozených čísel, která se značí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{M \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$, tj. množina všech podmnožin přirozených čísel; stejně tak má mohutnost $\aleph_1$ i množina reálných čísel $\mathbb{R}$. Vidíte analogii mezi $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a množinou všech nekonečných čárových kódů?

Všimněte si nakonec, že reálných čísel (množina $\mathbb{R}$) je ostře více než racionálních čísel (množina $\mathbb{Q}$).

Závěr

Existuje mnoho druhů nekonečna (eh, vlastně těch nekonečen existuje nekonečně mnoho) a spousta zajímavostí o nich.

Pokud vás toto téma zaujalo, podívejte se do našeho časopisu [2] na pokračování a různé úlohy o nekonečnech. Když nějakou úlohu vyřešíte a odešlete, my vám ji zpět pošleme okomentovanou. Také nám můžete poslat příspěvek o čemkoliv, co s tématem souvisí; a když se nám bude líbit, tak ho otiskneme v budoucím čísle časopisu M&M.

Literatura

[1] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-1.pdf`

[2] `https://mam.mff.cuni.cz/media/cislo/pdf/28/28-2.pdf`

[4] Tím předpokladem je, že považujeme hypotézu kontinua za pravdivou. O ní se více informací dozvíte na:
`https://cs.wikipedia.org/wiki/Hypot%C3%A9za_kontinua`.