Alena Filipčuková

Extremální úlohy

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 3, 16–31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149271

Extremální úlohy

Alena Filipčuková, PřF MU, Brno

Extremální úlohy mohou studenti vnímat velice pozitivně, pokud uvidí jejich jasné aplikace. Většinou se studenti sami pídí po informacích, kde danou část matematiky mohou použít, jenže při takových úlohách mohou narazit na různé problémy.

Jednak jde o úlohy složitější, často je třeba je rozdělit na několik menších a jednodušších podúloh, a druhým problémem je nezvyklý zápis úloh s mnoha fyzikálními veličinami a u této změti „písmenek“ je třeba rozlišit, které přísluší optimalizační proměnné a které ne. Studenti uvádějí, že právě velký počet „písmenek“ je v úlohách často děsí a způsobuje chaos při jejich řešení úlohy.

Studenty je ale potřeba k řešení takových úloh přivést, protože je čeká odměna, kterou je vyřešení opravdového problému.

V následujícím odstavci si popíšeme postup při řešení extremálních úloh.

Řešení extremálních úloh

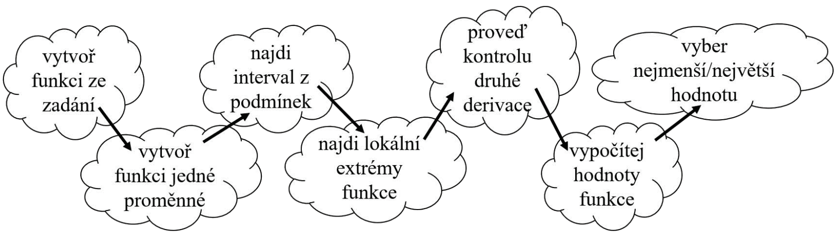
Extremální úlohy podobně jako jiné komplexní úlohy v matematice je vhodné při řešení rozdělit na několik menších a jednodušších podúloh a řešit jednu po druhé.

Nejprve je nutné vytvořit z poskytnutého zadání funkci, jejíž globální extrém budeme hledat. Na střední škole musí jít o funkci jedné proměnné. Často se extremální úlohy používají k určení extrémních hodnot obvodů a obsahů rovinných útvarů a povrchů a objemů těles nebo také fyzikálních či chemických veličin. Při sestavování funkce často využíváme různých geometrických a fyzikálních vzorců, závisí tedy také na znalostech studentů z těchto oblastí.

Další dílčí úlohou je určení intervalu, na kterém budeme extrémy sestavené funkce hledat. Tento interval často vyplyne z povahy funkce a proměnných nebo z fyzikálních či chemických znalostí. Většinou se jedná o rozměry obrazců či těles nebo fyzikální veličiny a interval je tak omezen na nezáporná čísla.

Známe-li funkci a interval, extremální úloha přejde v úlohu hledání globálního extrému funkce na daném intervalu. Při určování globálních extrémů funkce, která je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, postupujeme tak, že nejdříve najdeme všechny lokální extrémy funkce v $\langle a, b\rangle$, které mohou nastat ve stacionárních bodech nebo v bodech, ve kterých funkce nemá derivaci. Vypočtením hodnoty druhé derivace funkce v těchto bodech zkontrolujeme, zda se skutečně jedná o lokání maximum či minimum. Pokud je hodnota druhé derivace v bodě záporná, má funkce v tomto bodě lokální maximum. Naopak je-li hodnota druhé derivace v bodě kladná, jedná se o lokální minimum. Dále ještě vypočteme hodnoty $f(a)$, $f(b)$. Potom porovnáme všechna nalezená lokální maxima a minima a hodnoty $f(a)$, $f(b)$ a vybereme z nich největší a nejmenší. To bude globální maximum a minimum.

Z uvedeného postupu vidíme, že i takovou úlohu lze rozdělit na vícero podúloh. Pro studenty je tak mnohem jednodušší vyřešit několik těchto na sebe navazujících krátkých podúloh než řešit úlohu celou bez jakéhokoliv systému. Studenti si na tento systém práce zvykli a často se již sami dožadují po nadiktování jednotlivých kroků za sebou, mohou se tak držet jakési kuchařky. Rozsáhlý postup lze tak snadno zredukovat do několika stručných heslovitých kroků. Ještě více než číslovaný seznam kroků se mi však osvědčilo shrnout postup do schématu, který můžeme trochu s nadsázkou nazývat vývojovým diagramem. Příklad takového schématu uvádí následující obrázek. Ukázalo se mi, že kreativitě se meze nekladou a čím nápaditější jsou tvary v diagramu, tím jsou pro studenty více účinné a snadno zapamatovatelné.



Obr. 1: Postup řešení extremální úlohy

V úvodních hodinách věnovaných extremálním úlohám je velmi důležitý vhodný výběr úloh s ohledem na jejich náročnost. Doteď si vybavuji své pedagogické začátky, kdy jsem v úvodní hodině počítala první řešenou úlohu, na kterou jsem v učebnici narazila. Hledání rovnoramenného trojúhelníku, který má při daném obvodu maximální obsah, rozhodně nebylo tím správným začátkem. O tom mě přesvědčily vyděšené a zmatené pohledy studentů, které mám dosud živě před očima.

Je proto vhodné začít např. úlohou typu: „Najděte takové kladné číslo, aby jeho součet s číslem k němu převráceným byl minimální.“, kde sestavený součet je přímo funkcí jedné proměnné. Dále do výuky zařazuji např. úlohu typu: „Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl minimální.“, která zprvu vede na funkci dvou proměnných, po dosazení ze zadání dostaneme pak pro součin funkci jedné proměnné. Teprve pak bych zařadila následující úlohu a později i úlohy aplikační.

Příklad 1. Najděte pravoúhelník, který má při daném obvodu maximální obsah.

Na této typické úloze je dobré studentům ukázat spíše „hezké“ vtipné řešení. Často se v matematice setkáváme s úlohami, kdy je zadaná veličina bez jednotky. Tady si můžeme za jednotku vzít obvod pravoúhelníku a tím si zjednodušit celý postup. Také tím vysvětlíme, proč se ve fyzice jednotky zavedly různě. Pokud se zamyslíme se studenty nad historickým vývojem jednotek délky, připomenou si třeba lokty, palce, sáhy nebo kroky, určitě mohou délku obvodu svého pravoúhelníku i nějak hezky pojmenovat – třeba *takhlepřesnědlouhýprovaz*. Jako kouzelníci pak můžeme zároveň kousek provazu vytáhnout z kapsy a ukázat. To je nová jednotka délky, která pak měří obsah v jednotkách na druhou, a můžeme ukázat třeba *takhlepřesnědlouhýprovaz* na druhou nakreslením pomocí provazu na tabuli (a zde studenty můžeme nechat přemýšlet i nad druhou, třetí nebo čtvrtou dimenzí).

Řešení. Označme a a b délky stran hledaného pravoúhelníku. Jeho obvod je jeden *takhlepřesnědlouhýprovaz* a obsah S je dán známými vztahy

$$1 = 2a + 2b, \qquad S = a \cdot b.$$

Naším úkolem je najít pravoúhelník, který má maximální obsah.

Na vztah $S = a \cdot b$ pro výpočet obsahu se tedy můžeme dívat jako na funkci dvou proměnných a, b.

Pro vyšetření globálních extrémů funkce však potřebujeme funkci jedné proměnné. Můžeme využít zadaného obvodu $1 = 2a + 2b$ a jednu z proměnných z něj vyjádřit. Vyjádříme-li a, dostáváme

$$a = \frac{1 - 2b}{2} = \frac{1}{2} - b \tag{1}$$

a po dosazení do vztahu pro obsah S máme funkci jedné proměnné b:

$$S(b) = \left(\frac{1}{2} - b\right) \cdot b = \frac{1}{2}b - b^2. \tag{2}$$

Na tomto místě studentům nabízím elegantnější řešení bez použití diferenciálního počtu, ve kterém se studenti ještě necítí bezpečně. Navíc si tím zopakujeme a oživíme učivo z nižších ročníků, což studenti v rámci opakování před maturitou velmi ocení.

Hned na první pohled můžeme vidět, že nalezená funkce

$$S(b) = -b^2 + \frac{1}{2}b$$

je funkcí kvadratickou. Jejím grafem je parabola, která vzhledem k zápornému koeficientu u kvadratického členu je otevřená směrem dolů. Je tedy zřejmé, že maximum této funkce nastane právě ve vrcholu paraboly.

Pojďme si tuto závislost znázornit graficky, studenti tak lépe vidí, co vlastně počítají. Stačí najít průsečíky paraboly s vodorovnou osou. Ty najdeme řešením rovnice

$$-b^2 + \frac{1}{2}b = 0,$$

kterou vytknutím b převedeme do součinového tvaru:

$$b\left(-b + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

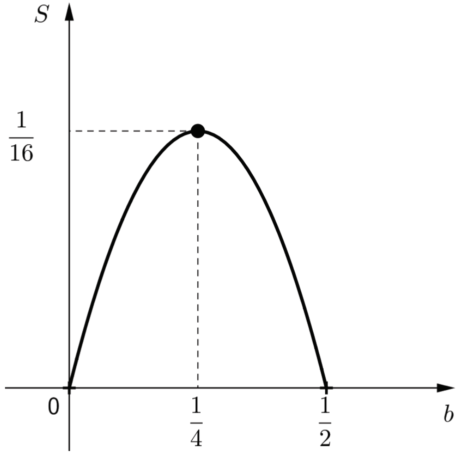
Vidíme, že průsečíky paraboly s vodorovnou osou nastanou v bodech $b_1 = 0$ a $b_2 = \frac{1}{2}$. Vrchol paraboly a zároveň i maximum funkce $S(b)$ leží přesně mezi těmito body – tedy v $b = \frac{1}{4}$. Z (1) vidíme, že také $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Vzpomeneme-li si, že délku obvodu našeho pravoúhelníku jsme pojmenovali jako *takhlepřesnědlouhýprovaz*, leží maximum funkce ve čtvrtině *takhlepřesnědlouhéhoprovazu.*

Teď můžeme studentům ukázat, že použití derivace vede k témuž výsledku, protože $S'(b) = -2b + \frac{1}{2} = 0$.

Druhou derivací dostáváme $S''(b) = -2$. Záporná hodnota druhé derivace potvrzuje, že v bodě b skutečně nastává maximum.

Hledaným pravoúhelníkem s maximálním obsahem je tedy čtverec o straně délky čtvrtina *takhlepřesnědlouhéhoprovazu.* Obsah tohoto pravoúhelníku je samozřejmě

$$S = a^2 = \left(\frac{1}{4}\,takhlep\check{r}esn\check{e}dlouh\acute{e}hoprovazu\right)^2 = \\ = \frac{1}{16}\,takhlep\check{r}esn\check{e}dlouh\acute{e}hoprovazu^2.$$



Obr. 2: Graf závislosti obsahu pravoúhelníku na délce strany b

Chceme-li studenty trochu potrápit, můžeme úlohu řešit ještě dalším způsobem případně toto řešení jim zadat jako domácí cvičení. Předpis funkce $S(b)$ si mohou studenti upravit na druhou mocninu dvojčlenu (tzv. na čtverec). Z takto upraveného předpisu pak již snadno určí přímo souřadnice vrcholu paraboly.

Následující úloha je velmi oblíbená mezi studenty.

Příklad 2. Z obdélníkového papíru o rozměrech 8 cm a 5 cm vystřihneme ve všech rozích stejné čtverečky a složíme krabičku. Určete stranu čtverečku tak, aby po složení vznikla krabička maximálního objemu.

Samotnému řešení úlohy totiž předchází stříhání papíru, skládání krabiček, zjišťování jejich objemu a porovnávání s ostatními spolužáky. Studenti se snaží uhodnout správnou délku strany ustřiženého čtverečku. Vyřešení úlohy a potvrzení odhadů studentů je pak už jen třešničkou na dortu.

Teprve až studenti začnou nabírat jistotu při řešení jednoduchých úloh, se odvážíme k řešení úloh z fyziky.

Extremální úlohy z fyziky

Následují extremální úlohy z fyziky.[1] Jedna úloha je z oblasti optiky, druhá z oblasti elektřiny. Obě tyto oblasti bývají zařazeny do výuky v posledních dvou ročnících studia střední školy, kdy se studenti začínají profilovat. Je proto velmi důležité, aby technicky zaměření studenti vnímali úzkou souvislost mezi matematikou a fyzikou. Často se stává, že studenti toto propojení nevnímají, a proto je nutné ho budovat od počátku.

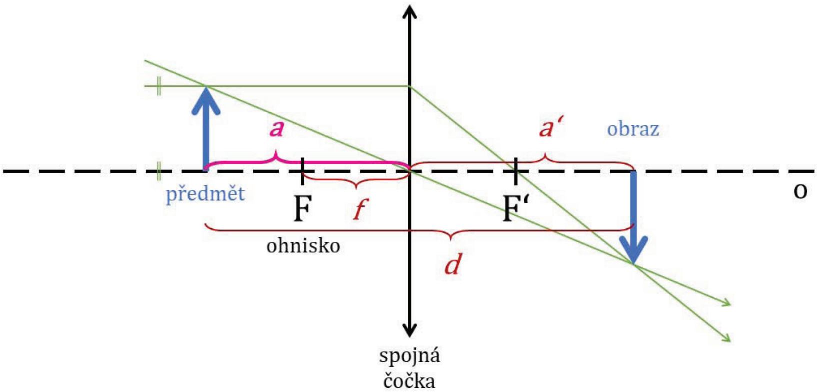
Studenty nesmíme odradit komplikovanými formulemi. To je ale pedagogicky velmi těžký úkol. Studenti jsou z matematiky zvyklí na úlohy, které jsou vymyšleny tak, aby v průběhu řešení nevycházely složité vztahy a i samotný výsledek se líbil. Jak to zaručit u aplikovaných úloh z fyziky? Nejjednodušší je použití barev. Vizuální odlišení je totiž pro náš mozek velice účinné. Pokud je v úloze moc „písmenek“, optimalizační proměnnou označíme třeba růžově, aby na nás z formule pořád mrkala. Pokud to podpoříme vtipnou glosou, studentům ani nepřijde formule moc složitá. Osvědčilo se mi, že čím šílenější barvu použiji, tím víc studentům pomůže.

Příklad 3. Jak daleko je třeba umístit předmět od tenké spojné čočky o ohniskové vzdálenosti f, aby vzdálenost jeho skutečného obrazu od předmětu byla nejkratší?

Řešení. Označme vzdálenost skutečného obrazu od předmětu d, dále z fyziky známe značení a jako vzdálenosti předmětu od čočky, a' jako vzdálenosti obrazu od čočky a f je vzdálenost předmětového ohniska F nebo obrazového ohniska F' od čočky – tzv. ohnisková vzdálenost.

Velmi vhodné je nakreslit si obrázek pro lepší přehlednost. Předmět ve tvaru modré šipky je za použití zelených význačných paprsků zobrazen čočkou. K zobrazení stačí použít dva význačné paprsky, např. paprsek jdoucí rovnoběžně s optickou osou o, který se po průchodu čočkou láme do obrazového ohniska F', a paprsek jdoucí středem čočky, který po průchodu čočkou pokračuje v původním směru. Po protnutí význačných paprsků vzniká skutečný obraz opět ve tvaru modré šipky.

[1] Tyto úlohy jsem záměrně vybírala ze sbírek, ve kterých nejsou řešeny. Čtenáři tak budou mít k dispozici další vzorové příklady.



Obr. 3: Příklad 3

Mezi veličinami a, a' a f platí tzv. zobrazovací rovnice čočky:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \tag{3}$$

Do tohoto místa většinou studenti zvládají pracovat sami. Učivo optiky pro ně bývá čerstvě zažité. Proto i obrázek nechávám na tabuli kreslit studenty, kteří si navzájem napovídají. Dále již do řešení musím zasáhnout a studenty správně nasměrovat.

Co chceme najít? Máme určit vzdálenost a předmětu od čočky, je dobré ji teď růžově označit i v obrázku a v každém kroku ji pak růžově psát.

Vzdálenost mezi předmětem a obrazem můžeme podle obrázku vyjádřit jako

$$d = a + a'. \tag{4}$$

Dle zadání má tato vzdálenost být nejkratší. Budeme tedy hledat globální minimum funkce pro vzdálenost d. V tuto chvíli je $d = a + a'$ funkcí dvou proměnných a a a'. Vyjádřeme si proto ze zobrazovací rovnice (3) proměnnou a':

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{a - f}{fa} \qquad \Rightarrow a' = \frac{fa}{a - f}.$$

Po dosazení a' do (4) a úpravě na společný jmenovatel dostaneme funkci jedné proměnné a:

$$d(a) = a + \frac{fa}{a-f} = \frac{a^2 - fa + fa}{a-f} = \frac{a^2}{a-f}.$$

Dále musíme zjistit interval, na kterém budeme hledat globální extrémy funkce $d(a)$. Funkce $d(a)$ vyjadřuje vzdálenost, která nikdy nebude záporná. Tuto podmínku zapíšeme jako

$$\frac{a^2}{a-f} \geq 0.$$

Vzhledem k tomu, že pro a^2 platí vždy $a^2 \geq 0$, je podmínka splněna pro $a - f > 0$ tedy pro $a > f$. Tady je dobré ukázat tuto nerovnost na obrázku a vysvětlit nerovnost i na fyzikální podstatě.

Zadaný příklad tedy vede na hledání globálního minima funkce $d(a) = \frac{a^2}{a-f}$ pro $a \in (f, \infty)$.

Začneme hledáním lokálního extrému funkce $d(a)$. Provedeme tedy první derivaci, kterou následně upravíme:

$$d'(a) = \frac{2a(a-f) - a^2}{(a-f)^2} = \frac{a(a-2f)}{(a-f)^2}.$$

Po položení první derivace rovno nule dostáváme dva stacionární body: $a_1 = 0$, který dále nebudeme uvažovat, protože je mimo náš zkoumaný interval, a $a_2 = 2f$. Provedeme druhou derivaci funkce $d(a)$, abychom zjistili, zda v bodě $a = 2f$ nastane lokální extrém:

$$d''(a) = \frac{(2a-2f)(a-f)^2 - (a^2 - 2af) \cdot 2(a-f)}{(a-f)^4} = \frac{2f^2}{(a-f)^3}.$$

Úpravy derivací zde více rozepisovat nebudu, ale při výuce je nutné se i těmto úpravám věnovat. Často totiž řešení úlohy ztroskotá v tom, že si studenti výraz chybně upraví. Sami studenti uvádějí, že není složité funkci zderivovat, ale mnohem složitější je správně derivaci upravit, aby s ní dále mohli pracovat.

Vypočtením hodnoty druhé derivace ve stacionárním bodě rozhodneme o lokálním extrému:

$$d''(2f) = \frac{2f^2}{f^3} = \frac{2}{f} > 0 \qquad \Rightarrow \text{ostré lokální minimum.}$$

V tuto chvíli určíme hodnotu funkce d v bodě lokálního extrému:

$$d(2f) = \frac{(2f)^2}{2f - f} = 4f.$$

Dále bychom měli určit také hodnoty funkce v krajních bodech vyšetřovaného intervalu. To však dělat nebudeme vzhledem k tomu, že interval je otevřený. Spočteme zde aspoň limity, jednostrannou limitu pro f zprava a limitu v nekonečnu. Pokud by některá limita byla menší než hodnota $d(2f) = 4f$, funkce by globální minimum neměla, protože krajní body do intervalu nepatří.

$$\lim_{a \to f+} \frac{a^2}{a - f} = \infty, \qquad \lim_{a \to \infty} \frac{a^2}{a - f} = \infty.$$

Vidíme, že globální minimum tedy skutečně nastává v bodě $a = 2f$, ukážeme to přímo na obrázku a s příkladem jsme hotovi.

Často studenti v tomto místě skončí, aniž by učinili nějaký závěr. Když jsou pak dotázáni, co vlastně vypočítali, většinou nejsou schopni jednoznačně odpovědět. Je proto nutné, abychom ve studentech od začátku budovali, že úloha musí být zakončena znovu návratem k obrázku a slovní odpovědí, nikoliv jen podtrženým výsledkem. Zbývá tedy odpovědět: Předmět musíme umístit do vzdálenosti $2f$ od spojné čočky. Jen tak bude vzdálenost skutečného obrazu od předmětu nejkratší. Výpočtem jsme zjistili, že vzdálenost mezi předmětem a obrazem pak bude rovna $4f$.

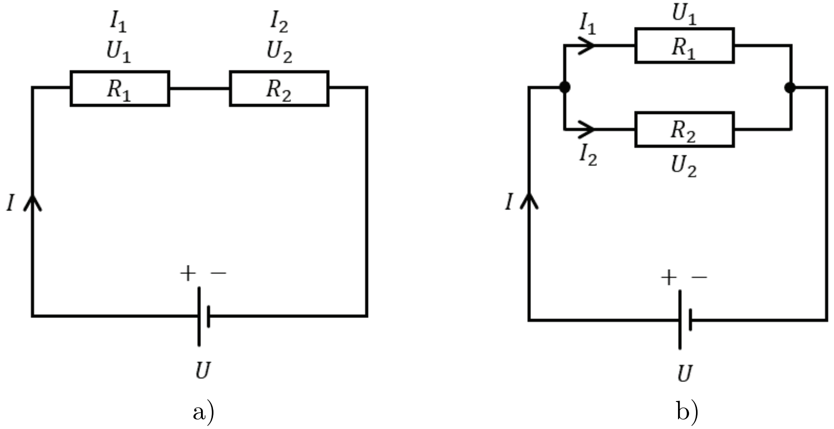
Poslední úlohu, kterou zde uvedu, je možné ukázat studentům v maturitním semináři. Proto opakování Ohmova zákona a zákonitostí pro zapojení rezistorů nechávám na nich. Maturanti se aspoň procvičí v mluvení před ostatními spolužáky, což jim pak u maturity bude výhodou. Většinou se setkáváme s nadšenými, zkušenými a matematicky zdatnými studenty, takže si můžeme dovolit i více „písmen“.

Příklad 4. Z $n = 72$ monočlánků, každý s elektromotorickým napětím $U_e = 2$ V a vnitřním odporem $R_i = \frac{1}{6}$ Ω, je sestavena baterie. Kolik článků za sebou a kolik článků vedle sebe je třeba zapojit, aby tato baterie dávala co největší proud, je-li vnější odpor vedení $R = 3$ Ω?

Řešení. V této úloze budeme vycházet z Ohmova zákona, který známe ve tvaru

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}. \tag{5}$$

Monočlánky budeme zapojovat za sebou (sériově) a vedle sebe (paralelně).



Obr. 4: Příklad 4: a) sériové zapojení, b) paralelní zapojení

Při sériovém zapojení rezistorů (obr. 4a) prochází celým obvodem stejný proud, tedy $I = I_1 = I_2$. Napětí na jednotlivých rezistorech se sčítají a platí $U = U_1 + U_2$. Celkový odpor R – odpor jediného rezistoru, který by oba nahradil – je roven součtu jednotlivých odporů:

$$R = R_1 + R_2.$$

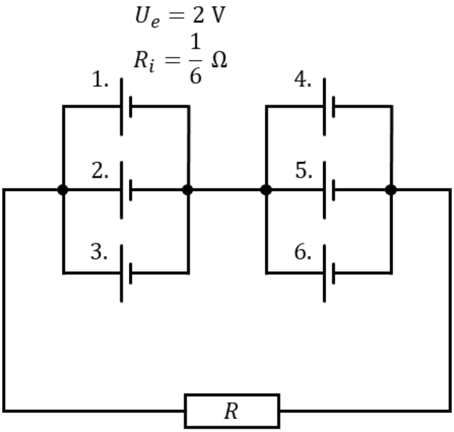
U paralelního zapojení (obr. 4b) je na všech rezistorech stejné napětí a platí $U = U_1 = U_2$. Celkový proud je roven součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory $I = I_1 + I_2$. Pro celkový odpor z Ohmova zákona plyne, že

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Vraťme se nyní zpět k zadání. Potřebujeme najít funkci pro proud I, jejíž globální maximum budeme hledat. Baterii, která tento proud dává, musíme sestavit ze sériového a paralelního zapojení 72 monočlánků.

Tady se studenty narážíme na problém, že vlastně neznáme univerzální vzorec pro proud v kombinovaném zapojení z libovolného počtu sériově a paralelně zapojených monočlánků. Studentům zde dávám prostor k zamyšlení a sami většinou přijdou s nápadem, abychom nejprve sestavili baterii z menšího počtu monočlánků. Zjištěné výsledky pak můžeme zobecnit. Navíc si jsou studenti vědomi, že těžko obsáhneme všechna možná zapojení, jako např. paralelní zapojení v paralelním zapojení. Proto je na místě menší postrčení studentů a vyslovení rady, že články budeme zapojovat do paralelních skupin (tvořených pouze jednotlivými monočlánky), které budou nadále zapojeny sériově.

Sestavme tedy nejprve baterii např. ze 6 monočlánků a podívejme se, jaký proud tato baterie dává. Zapojení může vypadat třeba jako na následujícím obrázku.



Obr. 5: Příklad 4: baterie sestavená z 6 monočlánků

Vyjádřeme z Ohmova zákona (5) elektromotorické napětí U_e, po drobné úpravě značení dostáváme

$$U_{e_c} = R_{i_c} I + RI, \tag{6}$$

kde U_{e_c} na levé straně znamená celkové elektromotorické napětí baterie a R_{i_c} představuje celkový vnitřní odpor baterie sestavené z monočlánků. Tyto dvě hodnoty musíme u našeho zapojení zjistit.

V našem zapojení jsou 1., 2. a 3. monočlánek zapojeny paralelně, k této paralelní skupině je sériově připojena další paralelní skupina monočlánků č. $4, 5, 6$. Dle zadání mají monočlánky stejný vnitřní odpor R_i. Pro odpor paralelního zapojení monočlánků č. 1, 2, 3 platí:

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i} = \frac{3}{R_i},$$

odtud vidíme, že

$$R_{123} = \frac{R_i}{3} = R_{456}.$$

Jak jsme již zmínili, paralelní skupiny monočlánků $1, 2, 3$ a $4, 5, 6$ jsou zapojeny vůči sobě sériově, proto pro celkový vnitřní odpor baterie R_{i_c} platí

$$R_{i_c} = R_{123} + R_{456} = \frac{R_i}{3} + \frac{R_i}{3} = \frac{2}{3}R_i.$$

Provedený výpočet studenti zvládají s malou dopomocí téměř sami. Obdobné příklady mají totiž natrénovány z hodin fyziky. Není tedy nutné se zde více zdržovat. Problém jim nedělají ani následující úvahy o napětí.

Dále určíme celkové elektromotorické napětí baterie U_{e_c}. Ze zadání víme, že elektromotorické napětí každého monočlánku je U_e. Pro paralelní skupiny monočlánků platí

$$U_{123} = U_1 = U_2 = U_3 = U_e,$$
$$U_{456} = U_4 = U_5 = U_6 = U_e.$$

A celkové elektromotorické napětí baterie U_{e_c} dostaneme ze sériového zapojení trojic monočlánků jako

$$U_{e_c} = U_{123} + U_{456} = U_e + U_e = 2U_e.$$

Dosadíme-li U_{e_c} a R_{i_c} do (6), dostaneme

$$2U_e = \frac{2}{3}R_i I + RI,$$

odtud po vytknutí vyjádříme proud I jako

$$I = \frac{2U_e}{\frac{2}{3}R_i + R}. \tag{7}$$

V tomto zapojení baterie jsme měli 2 sériové skupiny paralelních trojic. Označíme-li y počet monočlánků zapojených paralelně a x počet sériově zapojených skupin, pak v našem zapojení platí $y = 3$ a $x = 2$. Navíc pro počet monočlánků zřejmě platí $x \cdot y = 6$, uvažujeme-li baterii z šesti monočlánků.

V tuto chvíli můžeme se studenty naše dosavadní úvahy o šesti monočláncích zobecnit pro libovolný počet n monočlánků.

Obecně pro počet monočlánků v baterii platí

$$x \cdot y = n, \qquad \text{tedy dle zadání } x \cdot y = 72. \tag{8}$$

Dosazením x a y do (7) dostáváme pro proud I obecně

$$I = \frac{xU_e}{\frac{x}{y}R_i + R},$$

kam můžeme dosadit ze zadání $U_e = 2$ V, $R_i = \frac{1}{6}$ Ω a $R = 3$ Ω. Konečně tak dostáváme hledanou funkci pro proud I, která je funkcí dvou proměnných x a y:

$$I = \frac{2x}{\frac{x}{6y} + 3}. \tag{9}$$

My však potřebujeme funkci pouze jedné proměnné, proto vyjádříme z (8) proměnnou y jako $y = 72/x$.

Zde studenty vybízím, aby mi vysvětlili, proč je pro nás výhodnější vyjádřit proměnnou y než x.

Dosadíme do (9) a dostáváme

$$I(x) = \frac{2x}{\frac{x}{6 \cdot \frac{72}{x}} + 3} = \frac{2x}{\frac{x^2}{432} + 3}.$$

Globální maximum této funkce $I(x)$ budeme dál hledat. Potřebujeme však ještě interval, na kterém bude hledání extrému probíhat. Proměnná x zde představuje počet sériově zapojených skupin monočlánků, těch může být nejméně jedna (všechny monočlánky by byly zapojené paralelně) a nejvíce 72 (všechny monočlánky by byly zapojeny sériově). Budeme tedy uvažovat interval $x \in \langle 1, 72 \rangle$.

Zadaný příklad tedy přechází v úlohu hledání globálního maxima funkce

$$I(x) = \frac{2x}{\frac{x^2}{432} + 3}$$

na intervalu $\langle 1, 72 \rangle$.

Začneme hledáním lokálních extrémů funkce $I(x)$, spočteme si její první derivaci

$$I'(x) = \frac{2\left(\dfrac{x^2}{432}+3\right) - 2x\left(\dfrac{2x}{432}\right)}{\left(\dfrac{x^2}{432}+3\right)^2} = \frac{6-\dfrac{x^2}{216}}{\left(\dfrac{x^2}{432}+3\right)^2} = \frac{\dfrac{1296-x^2}{216}}{\left(\dfrac{x^2}{432}+3\right)^2},$$

kterou následně položíme rovnu nule. Zlomek je roven nule, je-li jeho čitatel roven nule, stačí tedy pracovat jen s čitatelem první derivace

$$\frac{1296-x^2}{216} = 0.$$

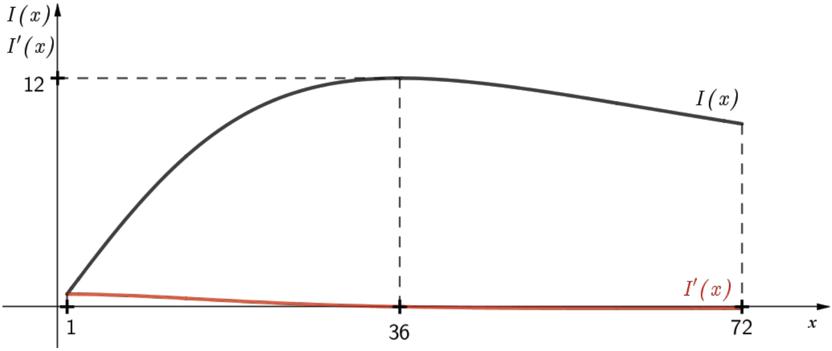
Řešíme tedy rovnici

$$1296 - x^2 = 0,$$
$$(36-x)(36+x) = 0$$

a dostáváme dva stacionární body $x_1 = 36$ a $x_2 = -36$. Kořen x_2 dále nebudeme uvažovat, neboť nepatří do zkoumaného intervalu. Bod x_1 je podezřelý z extrému, a proto bychom měli vypočítat druhou derivaci funkce. Při pohledu na první derivaci to však studenti odmítají a já se jim ani nedivím. V tuto chvíli se můžeme obrátit na nějaký volně dostupný výpočetní software, který výpočet udělá za nás. Často ve svých hodinách pro tyto účely používám např. uživatelsky přívětivý Desmos.

Nakonec se můžeme se studenty vydat ještě další mnohem jednodušší cestou. Zjistíme, zda dochází ke změně znaménka první derivace v okolí stacionárního bodu, a na základě toho rozhodneme, zda v tomto bodě nastane extrém. Ze znaménka první derivace navíc zjistíme informace o monotónnosti funkce. Průběh funkce a její derivace naznačuje následující obr. 6.

Vidíme, že v $x = 36$ nastává lokální maximum, které je na intervalu $x \in \langle 1, 72\rangle$ zároveň i globálním maximem. V krajních bodech intervalu vzhledem k průběhu funkce totiž hodnota funkce $I(x)$ nikdy nebude vyšší než v bodě $x = 36$. V grafu také vidíme, že se kolem bodu $x = 36$ mění znaménko derivace.



Obr. 6: Příklad 4: průběh funkce $I(x)$ a $I(x')$

Vypočteme ještě funkční hodnotu v bodě globálního maxima – tedy v bodě $x = 36$:

$$I(36) = \frac{2 \cdot 36}{\frac{36^2}{432} + 3}\,\mathrm{A} = 12\,\mathrm{A}.$$

Zde pokládám studentům otázku, jaký význam tato funkční hodnota má. Většinou správně odpovídají, že se jedná o maximální hodnotu proudu, kterou sestavená baterie dává.

Dále ještě dopočteme z (8) y:

$$y = \frac{72}{x} = \frac{72}{36} = 2.$$

Co jsme to nakonec vypočítali? Takovou otázku namířím směrem ke studentům. Vrátíme se k našim úvahám na začátku úlohy, kde jsme si zavedli značení y pro počet monočlánků zapojených paralelně a x pro počet sériově zapojených skupin. Z toho je již zřejmé, co $y = 2$ a $x = 36$ znamená.

Zbývá už jen odpovědět. Konstrukci odpovědi nechávám opět na studentech.

Maximální proud 12 A dává baterie, která je sestavena následujícím způsobem – 2 monočlánky vedle sebe (paralelně) a těchto dvojic 36 za sebou (sériově).

Na závěr si správnost řešení ověříme se studenty ve volně dostupné simulaci `https://tinyurl.com/y86hlxlr`. Obvod v uvedeném odkazu již obsahuje parametry ze zadání. Změnou zapojení si mohou studenti vyzkoušet, jak se mění elektrický proud v obvodu. To jim ponechávám na domácí bádání.

Podobné a další úlohy čekají na čtenáře v následujícím cvičení. Spoustu další úloh řešených i neřešených najdeme ve sbírkách uvedených v použité literatuře na konci článku.

Cvičení pro chtivé čtenáře

1. *K baterii s elektromotorickým napětím U_e a vnitřním odporem R_i je připojen spotřebič. Výkon baterie je $P(I) = U_e I - I^2 R_i$. Při jakém proudu bude výkon maximální?*

Úlohu lze řešit s užitím i bez užití diferenciálního počtu. Můžeme využít průsečíků grafu kvadratické funkce $P(I)$ s osami soustavy souřadnic. Vrchol paraboly můžeme nalézt také pomocí úpravy na druhou mocninu dvojčlenu.

2. *Jak musí být sestaveno $n = 320$ článků v baterii, aby při daném vnějším odporu $R = 2\ \Omega$ dávala maximální proud? Vnitřní odpor jednoho článku je $R_i = 0{,}1\ \Omega$.*

Zde postupujeme podobně jako při řešení příkladu 4.

Literatura

[1] Hrubý, D., Kubát, J.: *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet.* Prometheus, Praha, 2009.

[2] Došlá, Z., Kuben, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Masarykova univerzita, Brno, 2004.

[3] Vejsada, F., Talafous, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* SPN, Praha, 1969.

[4] Benda, P., Daňková, B., Skála, J.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* SPN, Praha, 1979.

[5] Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus, Praha, 2003.