Učitel matematiky

František Kuřina; Naďa Vondrová

Jak to vlastně je? Velikost úsečky

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 3, 167–182

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149139`

Jak to vlastně je?

VELIKOST ÚSEČKY

František Kuřina, Naďa Vondrová

> Praktická geometrie (měřictví) byla provozována dávno před Eukleidem. Takzvaní napínači provazů vyměřovali a vytyčovali nejrůznější pozemky a stavby. Zachycovali je značkami (body), které umisťovali do vrcholů (rohů), popřípadě některých dalších významných míst vytyčovaných útvarů. Měřili čtyři druhy jevu velikosti: délky, plošné obsahy, objemy a velikosti úhlů. Veličinami délky rozuměli délky různých jednotlivých provazů, či vzdálenosti dvou různých značek. Podobně veličinami plošného obsahu (popřípadě objemu) rozuměli plošné obsahy různých jednotlivých plošných útvarů (popřípadě objemy různých jednotlivých těles). (Vopěnka v Eukleides, 2007, s. 11)

Ideu měření vidíme na obrázku 1.

V bibli, která údajně pochází z 9. st. př. n. l., je měření délek a času, ale i trojdimenzionálnost prostoru popisována při stavbě Noemovy archy: „Na tento způsob koráb uděláš: Tří set loktů jeho bude dlouhost tohoto korábu, padesáti loktů širokost jeho, a třicet loktů vysokost jeho.“ (Biblí svatá, 1900, s. 5)

Obr. 1: Obrázek Jiřího Slívy z obálky knihy (Barrow, 2005)

Od praktického měření k teoretickému ukotvení

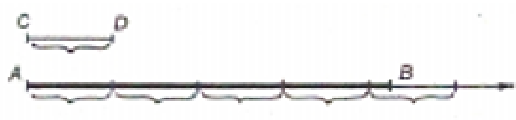
Měření je jedna z důležitých praktických činností geometrického typu. Podle encyklopedie *Dějiny přírodních věd v datech*

> se v 5. a 4. tisíciletí př. n. l. v oblasti velkých vodních toků Eufratu, Tigridu a Nilu rozvíjí výstavba zavodňovacích děl, při nichž se začíná používat zeměměřičských pomůcek (měřicí tyče, olovnice, nivelování vodou, zaměřování pomocí hvězd). V téže době se rozvinulo též vyměřování zaplavených ploch, jež dalo základ prvým poznatkům geometrie a vzniku geometrické terminologie. (Folta & Nový, 1979, s. 18)

Při budování pyramid v Egyptě (v letech 2 700–2 400 př. n. l.) se přitom dosáhlo např. odchylky od vodorovné plochy 1,27 cm (Folta & Nový, 1979, s. 20). To ostře kontrastuje s překvapivými informacemi, které nacházíme v poetickém místopisu Václava Větvičky:

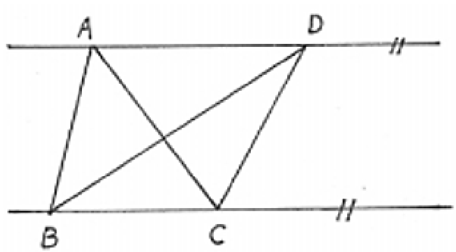
> V letech 1563–1566 se pokusil jistý Slezan Kryštof Schilong změřit Sněžku, ale dobral se závratné výšky 5 880 m. Jeho přístroj viditelně nadhodnocoval. K jinému číslu došel Jiřík z Řásně v roce 1569, totiž k 2 034 m. Dnešní údaje o její výšce se ustálily na 1 602 m n. m. (Větvička, 2003, s. 101)

Teoretický základ měření formuloval ovšem již Archimédés (asi 287–212 př. n. l) v tzv. *Archimédově axiomu* (obr. 2): Nanášíme-li úsečku CD stále v témže smyslu na polopřímku AB, překročíme po určitém počtu kroků bod B.



Obr. 2: Ilustrace Archimédova axiomu

Dnešní pojetí měření úsečky není ovšem v souladu s pojetím Eukleidovým, který, snad pod tíží problému s nesouměřitelností úseček, nechápal velikosti geometrických útvarů jako čísla. Podle něj byly geometrické útvary svými vlastními měrami: „Čára je délka bez šířky." (Eukleides, 2007, s. 41); „Úhel je vzájemný sklon dvou úseček." (s. 41); „Trojúhelníky na téže základně a mezi týmiž rovnoběžkami jsou si rovny." (s. 71). Tak např. trojúhelníky ABC a DBC (obr. 3) jsou pokládány za sobě rovné. Dokonce je to zapsáno jako $\triangle ABC = \triangle DBC$, ačkoliv jsou to různé geometrické útvary, které nejsou shodné. Jsou ovšem rovnoploché, rovnost trojúhelníků se vztahuje k jejich velikostem, tedy k jejich obsahům.



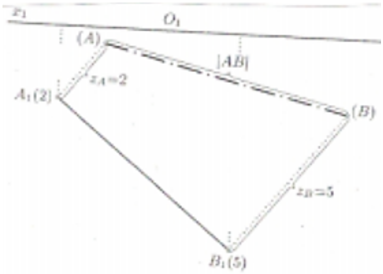
Obr. 3: Trojúhelníky ABC a DBC „jsou si rovny"

Eukleidés dále píše: „V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících." (2007, s. 77). Čtverec nad přeponou se samozřejmě v geometrickém slova smyslu nerovná čtvercům nad odvěsnami. Rovnost se týká velikostí těchto útvarů.

Explicitně popsal tento problém J. B. Pavlíček: „Vzdáleností dvou bodů budeme rozumět každou úsečku shodnou s úsečkou spojující oba body." (Pavlíček, 1953, s. 76).

Dodejme, že tento přístup se uplatňuje i dnes např. v deskriptivní geometrii. Na obrázku 4 je uveden výsledek řešení úlohy: „Určete délku úsečky AB, $A[3, 2, 2]$, $B[-3, 6, 5]$."

Existence délky úsečky není v axiomatice Eukleidových *Základů* explicitně zakotvena. Tato problematika byla vyřešena až ve 20. století.



Obr. 4: Řešení úlohy o délce úsečky AB (Pomykalová, 2010, s. 78)

> Pomocí pojmu pohybu, bodu a vzdálenosti (jakožto reálného čísla přiřazeného dvojici bodů) vzatých za pojmy primitivní, odvodil celou geometrii ruský matematik V. F. Kogan (1902) a podobně Italové Peano (1902), Levi (1904) a Angličan Coolidge (1909). (Pavlíček, 1953, s. 38)

Coolidge definoval přímku AB jako množinu všech bodů X, pro něž platí

$$(|AB| = |AX| + |BX|) \vee (|AX| = |AB| + |BX|) \vee$$
$$\vee (|BX| = |XA| + |AB|).$$[1]

Procesem měření je inspirován i pojem *metrický prostor*, který zavedl do matematiky francouzský matematik M. R. Fréchet (1878–1973).

Je dána množina M a zobrazení d, které každým dvěma prvkům X, Y z M přiřazuje reálné číslo $d(X, Y)$. Jestliže pro každé tři prvky $X, Y, Z \in M$ platí:

1. $d(X, Y) = 0$, právě když $X = Y$,
2. $d(X, Y) = d(Y, X)$ – symetričnost,
3. $d(X, Y) + d(Y, Z) \geq d(X, Z)$ – trojúhelníková nerovnost,

[1] Axiomatiku geometrie s délkou úsečky jako primitivním pojmem můžeme dnes nalézt např. v publikacích (Krygowska, 1975), (Pogorelov, 1983), (Lee, 2013).

nazýváme dvojici $\langle M, d\rangle$ metrickým prostorem, zobrazení d metrikou neboli vzdáleností, prvky množiny M body a vlastnosti 1, 2, 3 axiomy metrického prostoru.

Dokažme, že zobrazení d nabývá jen nezáporných hodnot. Aplikujeme-li axiom 3 na body $X, Y, Z = X$, dostaneme $d(X,Y) + d(Y,X) \geq d(X,X)$. Protože podle axiomu 2 platí $d(X,Y) = d(Y,X)$ a podle axiomu 1 $d(X,X) = 0$, můžeme nerovnost 3 přepsat na tvar

4. $d(X,Y) \geq 0$.

Hodnoty míry získané měřením závisí ovšem na zvolené jednotkové úsečce. Její symbol bychom měli uvádět v označení míry. Tak při jednotkové úsečce „kilometr“, „metr“, ... bychom měli psát např.: $d_{km}(X,Y) = 7$, $d_m(X,Y) = 7\,000$. Místo toho je ovšem běžné užívat zápisy $d(X,Y) = 7\,\mathrm{km}$, $d(X,Y) = 7\,000\,\mathrm{m}$. Ve školské praxi se často místo toho píše $|XY| = 7\,\mathrm{km}$, $|XY| = 7\,000\,\mathrm{m}$.

Na pojmu vzdálenost je založena řada pojmů elementární geometrie. Připomeňme alespoň některé.

Kružnice $k(S,r)$ je množina všech bodů roviny ϱ, které mají od bodu S danou vzdálenost r: $k(S,r) = \{X \in \varrho; |SX| = r\}$.

Úsečka AB obsahuje body A, B a všechny body X, které leží mezi těmito body, a žádné jiné: $AB = \{X \in \varrho; |AX| + |XB| = |AB|\}$.

Osa o úsečky AB je množina všech bodů X roviny, které mají od bodů A, B stejnou vzdálenost: $o = \{X \in \varrho; |AX| = |BX|\}$.

Elipsa s ohnisky E, F a hlavní osou délky $2a$ ($2a > |EF|$) je množina všech bodů roviny, které mají od ohnisek součet vzdáleností rovný číslu $2a$: $e = \{X \in \varrho; |EX| + |FX| = 2a\}$.

Podstata měření

V Bendově učebnici z roku 1889 je měření popsáno takto:

> Měříce klademe míru podél předmětu a počítáme, kolikrát se kladení do konce opakuje. Málokdy bývá míra v jiné délce několikrát obsažena beze zbytku. Do nedávna skoro každý stát měl svou vlastní míru. Od francouzské revoluce zaveden jest ve Francii metr jakožto

> jednotka míry. Je to desitimiliontina čtverníka meridiánu zemského.
>
> V Rakousku [a tedy i našich zemích] zákonem od 23. dne m. července l. 1871, jest nařízeno, by od 1. ledna 1876 v obecném životě vesměs užíváno bylo míry metrické:
>
> $1\,\mu$ (miriametr) $= 10\,000$ m (metrů),
> 1 km (kilometr) $= 1\,000$ m,
> 1 hm (hektometr) $= 100$ m,
> 1 dkm (dekametr) $= 10$ m,
> 1 m (metr) $= 10$ dm (decimetrů),
> 1 dm (decimetr) $= 10$ cm (centimetrů),
> 1 cm (centimetr) $= 10$ mm (milimetrů).
>
> Násobky metru označují se předponami řeckými, díly pak předponami latinskými. (Benda, 1889, s. 7)

V této ukázce nepůsobí archaicky pouze jazyk, ale i definice metru. Metr byl později definován jako vzdálenost dvou rysek na mezinárodním prototypu metru, který je uložen u Mezinárodního úřadu pro váhy a míry v Sèvres u Paříže.

V roce 1960 byl přijat nový standard metru, který byl definován jako 1 650 763,73 násobek vlnové délky oranžově červeného světla, které při výboji emitují atomy kryptonu 86.

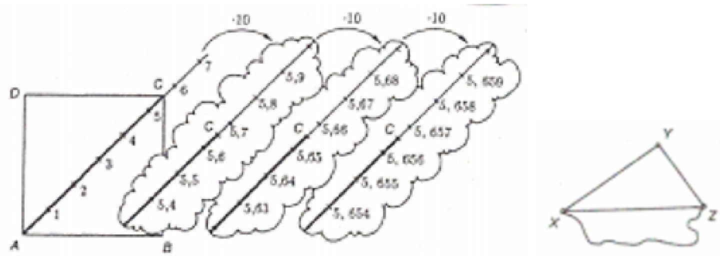
Konečně v roce 1983 přijala 17. generální konference pro váhy a míry novou definici metru: „Jeden metr je vzdálenost, kterou urazí světlo ve vakuu za 1/299 972 458 sekundy.“ Tato změna byla zdůvodněna skutečností, že měření rychlosti světla a měření časových intervalů patří v současnosti k nejpřesnějším měřením vůbec (Halliday et al., 2002, s. 5).[2]

Ilustrujme postup naznačený v citátu z Bendovy učebnice příkladem. Máme změřit úhlopříčku AC čtverce se stranou dlouhou

[2] Ačkoliv byly metrické jednotky měření u nás zavedeny již před více než 100 lety, dělá práce s nimi potíže nejen dětem ve škole. Před časem byla např. publikována tato informace: „V roce 1999 přišla americká NASA o zbrusu nový Mars Climate Orbiter jen proto, že jeden z jeho výrobců používal při programování místo metrických měr omylem míry anglické – a robot za bezmála 300 milionů dolarů shořel v atmosféře rudé planety.“ (Greš, 2004).

4 cm, tedy délku $|AC| = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm} = 5{,}656\ldots$ cm. Začneme-li měřit s jednotkou měření cm, dostaneme podle obrázku 5 vlevo

$$5\,\mathrm{cm} \le |AC| \le 6\,\mathrm{cm}.$$



Obr. 5: Zpřesňování měření délky úsečky (vlevo), vzdálenost bodů X a Z (vpravo)

Máme-li určit délku úsečky AC s větší přesností, rozdělíme úsečku 1 cm na 10 shodných částí a provádíme pro velikost úsečky nový odhad. Abychom mohli tento postup ilustrovat obrázkem, představme si stupnici desetinásobně zvětšenou. Vyjde

$$5{,}6\,\mathrm{cm} \le |AC| \le 5{,}7\,\mathrm{cm}.$$

K přesnějšímu odhadu bychom mohli (aspoň teoreticky) dále „zjemňovat stupnici“ rozdělením úsečky 1 mm na 10 shodných dílů. Dostali bychom tak

$$5{,}65\,\mathrm{cm} \le |AC| \le 5{,}66\,\mathrm{cm}.$$

Teoreticky můžeme v tomto postupu pokračovat. Důležité je, že rozdíl horní a dolní meze velikosti úsečky můžeme takovouto konstrukcí učinit libovolně malým. Kdybychom měli např. předepsáno, aby rozdíl horní a dolní meze velikosti úsečky byl menší než $\frac{1}{100}$ cm, stačí postoupit v konstrukci o jediný krok:

$$5{,}656\,\mathrm{cm} \le |AC| \le 5{,}657\,\mathrm{cm}.$$

Měřením tedy konstruujeme dolní a horní aproximaci velikosti úsečky desetinným číslem. Kdyby nastala situace, že při některém dělení splyne druhý koncový bod úsečky s čárkou na stupnici, byla by velikost úsečky vyjádřena racionálním číslem. Např. kdyby platilo přesně $|AC| = 5{,}6\,\mathrm{cm}$, znamenalo by to, že délku úsečky AC můžeme vyjádřit přirozeným číslem $|AC| = 56\,\mathrm{mm}$. Pýthagorás v 6. století př. n. l. předpokládal, že takováto situace může nastat při každém měření; velikostí úsečky rozuměl určité přirozené číslo.

> Ačkoliv se matematika zachovala k Pythagorovu výkladu jevu velikosti macešsky, přirozený vývoj lidské společnosti si ho znovu vyžádal při jiné příležitosti. Samovolně se k němu lidé vrátili při zpracovávání jedné zvláštní podoby jevu velikosti, a to hodnoty. Na tomto výkladu je totiž založeno novodobé peněžnictví,[3] kde ho můžeme pozorovat téměř v úplné čistotě a vlastně ho teprve pochopit. (Vopěnka, 1989, s. 360)

Není-li měření popsaným způsobem ukončeno, je velikost úsečky číslem s neukončeným desetinným rozvojem, např. číslem iracionálním, pokud je desetinný rozvoj neperiodický.

Lze dokázat, že při zvolené jednotce je velikost neboli délka úsečky určena jednoznačně. Tento důkaz je poměrně náročný, v české literatuře je zpracován např. ve Vyšínově učebnici *Elementární geometrie* (1952). Přitom je přirozené, že vzdálenost bodu X od bodu Y je táž jako vzdálenost bodu Y od bodu X a že vzdálenost bodů X, Z je velikost nejkratší jejich spojnice: žádná oklika přes bod Y není kratší: $|XZ| \leq |XY| + |YZ|$ (obr. 5 vpravo). Tyto vlastnosti intuitivně chápe v našem kulturním prostředí dítě na počátku školní docházky (podrobněji viz Kuřina, 1979).

Měření ve školní praxi

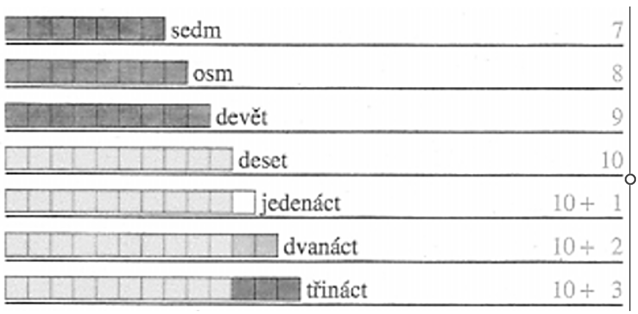
Školní měřítko, krejčovský metr, pásmo, … jsou geometrickými interpretacemi vzdáleností, jsou to modely číselné osy známé z matematiky. Číselná osa (množina bodů přímky) je obrazem množiny

[3] Libovolnou peněžní hodnotu můžeme vyjádřit přirozeným číslem např. v eurech nebo v centech, případně, kdyby to bylo potřeba, např. v tisícinách centu.

všech reálných čísel. Dvě k sobě kolmé číselné osy umožňují popsat množinu bodů v rovině pomocí uspořádaných dvojic reálných čísel, tři přímky v prostoru, které procházejí jedním bodem tak, že každé dvě z nich jsou k sobě kolmé, dávají možnost popsat bod pomocí uspořádané trojice reálných čísel.

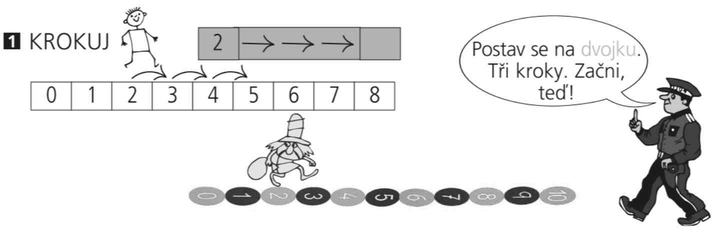
Měření by mělo být součástí rozvíjení představ o číslech (od čísel přirozených k číslům desetinným, viz výše). Pokud za velikost úseček považujeme zaokrouhlené číslo, mohou nastat komplikace. Tak např. trojúhelník ABC se stranami $|AC| = 44\,\mathrm{mm}$, $|BC| = 43\,\mathrm{mm}$ a $|AB| = 86\,\mathrm{mm}$ by měl po zaokrouhlení na centimetry délky stran $|AC| = |BC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|AB| = 9\,\mathrm{cm}$, které nesplňují trojúhelníkovou nerovnost. Rovněž strany AC a BC se stejnou velikostí 4 cm nejsou ve skutečnosti shodné. Protože při měření délek zaokrouhlujeme téměř vždycky (a výsledek považujeme za délku úsečky), je formulace „Délka úsečky je číslo získané měřením," poněkud problematická.

Počet prvků ve skupině je mírou (velikostí) množiny. S měřením se tak žáci seznamují od prvního ročníku základní školy. Od počátku bychom měli pracovat s geometrickými reprezentacemi množství. Jedním z nejdůležitějších příkladů tohoto typu je reprezentace přirozených čísel barevnými proužky (viz např. obr. 6).

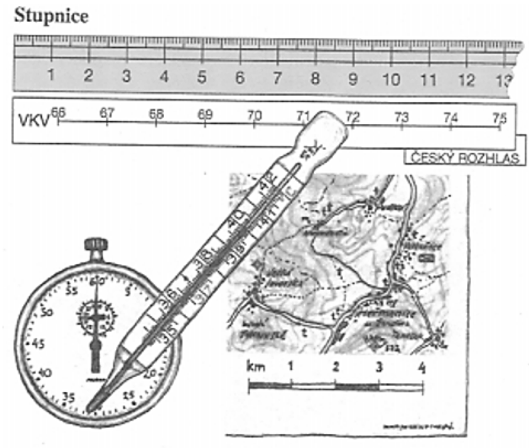


Obr. 6: Ukázka z učebnice pro 1. ročník ZŠ (Hošpesová et al., 1996, s. 44)

Propedeutikou měření je krokování známé z učebnic Milana Hejného (obr. 7) a čtení údajů na různých stupnicích (obr. 8).



Obr. 7: Krokování (Hejný et al., 2007, s. 38)

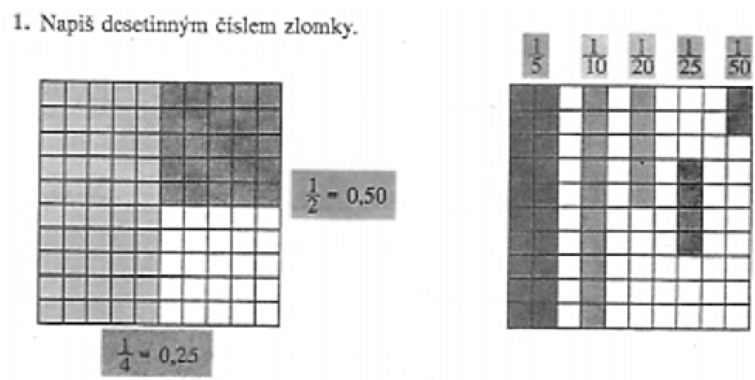


Obr. 8: Stupnice v učebnici pro 3. ročník (Hošpesová et al., 1998, s. 62)

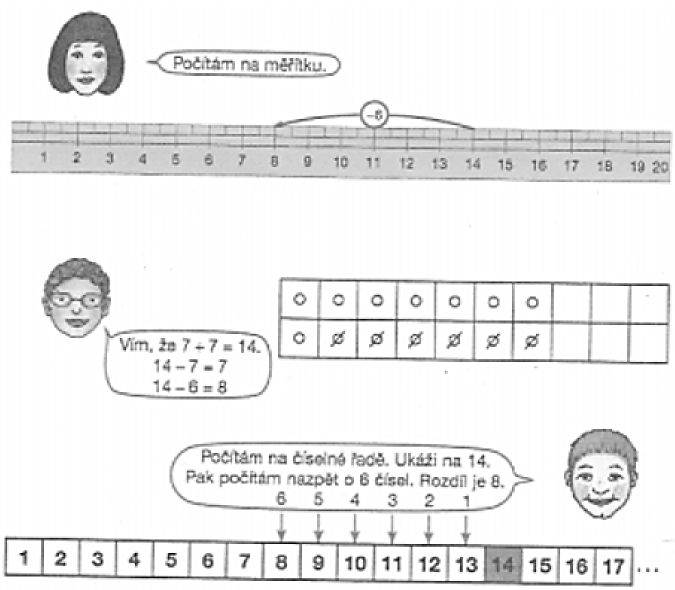
V 5. ročníku se v souvislosti s měřením pracuje se zlomky a desetinnými čísly (obr. 9). Měřítko může sloužit i jako pomůcka pro získávání výsledků aritmetických operací (obr. 10), a to prostřednictvím znázornění pohybu na číselné ose.

Na úrovni 6. ročníku vysvětluje Eduard Čech měření úseček takto:

> Délku úsečky AB najdeme měřítkem. Každý žák musí mít své měřítko. Přiložíme měřítko tak, aby se jeho začátek kryl třeba s bodem A; délku potom čteme u bodu B [...] Vzdálenost dvou bodů A a B není nic jiného než délka úsečky AB. (Čech, 1947, s. 7)



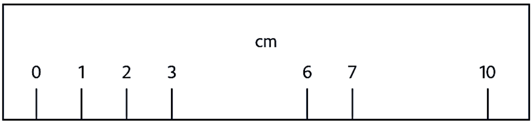
Obr. 9: Zlomky v geometrii (Hošpesová et al., 2000, s. 117)



Obr. 10: Pohyb na číselné ose v učebnici pro 2. ročník
(Hošpesová et al., 1997, s. 17)

V učebnici Hejného nalezneme úlohu, v níž si měřítko žáci sami dokreslují (obr. 11).

Na obrázku je pravítko dlouhé 10 cm, na kterém ale některé rysky chybí.



a) Dokreslete scházející rysky:

4 5 8 9 2,5 3,5 3,1

b) Ukažte, jak na tomto pravítku lze naměřit délky:

3 cm 2,5 cm 3,1 cm 2,1 cm 0,9 cm 31 mm 9 mm.

c) Jeden koncový bod úsečky dlouhé 2,2 cm je na rysce 7. Dokreslete druhý koncový bod.

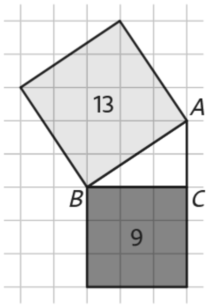
Obr. 11: Upřesňování měřítka (Hejný et al., 2015, s. 27)

Na možnost zvažovat přesnost měření upozorňuje Hejného učebnice zavedením symbolů $!, +, =$ (obr. 12). Později žáci řeší úlohu, v níž si tři žáci přerýsovali čtverec o obsahu 13 do čtvercové mříže (viz obr. 13): „Ze svého obrázku Ariana naměřila, že $|AB| = 36^!$ mm, Kira $|AB| = 36^-$ mm a Elmar $|AB| = 36^+$ mm. Kdo z nich to má správně?“ (Hejný et al., 2016, s. 74). Tímto způsobem se žáci mohou přesvědčit, že proces měření skutečně nemusí být ukončený. Velikost úsečky může být iracionální číslo. Celý proces vrcholí poznatkem uvedeným na obrázku 14.

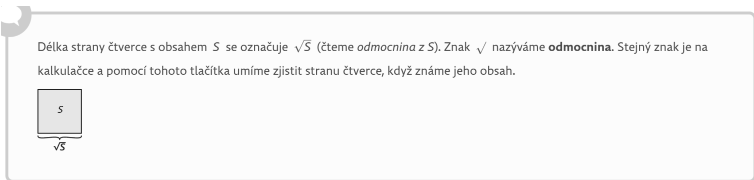
Domluva: Ke zpřesnění měření použijeme horní indexy !, +, –. Když si myslíte, že:

1. délka úsečky AE je **přesně** 50 mm, napíšete $|AE| = 50^!$ mm
2. délka úsečky AE je **trochu víc** než 50 mm, napíšete $|AE| = 50^+$ mm
3. délka úsečky AE je **trochu méně** než 50 mm, napíšete $|AE| = 50^-$ mm.

Obr. 12: Zpřesňování měření (Hejný et al., 2015, s. 53)



Obr. 13: Délka úsečky $\sqrt{13}$ (Hejný et al., 2016, s. 74)



Délka strany čtverce s obsahem S se označuje $\sqrt{S}$ (čteme *odmocnina z S*). Znak $\sqrt{\ }$ nazýváme **odmocnina**. Stejný znak je na kalkulačce a pomocí tohoto tlačítka umíme zjistit stranu čtverce, když známe jeho obsah.

Obr. 14: Postup hledání přesné hodnoty délky strany čtverce (Hejný et al., 2016, s. 75)

Podrobněji je tato problematika, včetně popisu práce s žáky, vysvětlena v kapitole *Míra v euklidovské rovině E^2* skript (Stehlíková et al., 2005, s. 25). Kromě výše zmíněné myšlenky čtverce je pro zpřesňování měření délky úsečky rozvedena i myšlenka prodlužování dané úsečky.

Na úrovni střední školy se proces měření úseček zpravidla nevysvětluje. Např. Pomykalová píše: „Délka (velikost) úsečky se určuje měřením, které se provádí pomocí určité jednotkové úsečky (1 mm, 1 cm atd.)“ (Pomykalová, 1993, s. 10). V novém zpracování učebnice je autorka ještě stručnější: „Délka úsečky je vzdálenost krajních bodů“ (Pomykalová, 2019, s. 4). Jiné informace o měření jsme v žádné z obou učebnic nenašli. Velikosti úseček, které se v učebnicích vyskytují, jsou čísla přirozená nebo desetinná (nejvýše se dvěma desetinnými místy). To vlastně odpovídá výše zmíněnému Pýthagorovu přístupu (velikost úsečky je číslo přirozené, neboť 14,5 cm = 145 mm). Ovšem na s. 121 první z citovaných učebnic se mluví např. o úsečkách velikosti $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, ...

Popsaný přístup k měření ostře kontrastuje s důkladným výkladem o měření úseček např. v učebnici pro 9. postupný ročník (Vyšín et al., 1954, s. 36–39). Postupuje se zde podobně jako v našem výše uvedeném příkladu.

Jak veliký je bod?

Odpověď na tuto otázku závisí na tom, kde jeho velikost určujeme. Hovoříme-li o bodu jako jednotce velikosti, kterou užívají sazeči pro tisk, pak ve Spojených státech má bod velikost 0,351 mm a v Evropě 0,376 mm (Robinson, 2009, s. 167). Ve starém Řecku a v naší školské matematice nemají body žádnou velikost, jsou to pouhá místa v rovině nebo v prostoru označovaná tečkou nebo křížkem, jde o bezrozměrné body geometrické. A co body v přírodě? V rovném terénu vidíme, že se přímé koleje v určitém bodě stýkají (obr. 15). Úsečku dlouhou 1 435 mm (rozteč kolejí) vnímáme pak jako bod. Konstrukci tohoto bodu jsme připomněli v článku *Nekonečno* (Kuřina & Vondrová, 2021). Stejná slova mohou tedy mít v různých kontextech odlišné významy.

Obr. 15: Koleje se stýkají „v bodě“

Literatura

[1] Barrow, J. (2005). *Konstanty přírody.* Paseka.

[2] Benda, B. (1889). *Měřictví a rýsování pro první třídu škol měšťanských.* František Borový.

[3] *Biblí svatá* (1900). Biblická společnost.

[4] Čech, E. (1947). *Geometrie pro 1. třídu měšťanských a středních škol.* JČMF.

[5] Eukleides (2007). *Základy.* OPS.

[6] Folta, J., & Nový, L. (1979). *Dějiny přírodních věd v datech.* Mladá Fronta.

[7] Greš, J. (2004). Na Mars s americkým vízem. *Respekt 3.*

[8] Halliday, D., Resnik, R., & Walker, J. (2002). *Fyzika 1.* Prometheus.

[9] Hejný, M., Jirotková, D., & Slezáková-Kratochvílová, J. (2007). *Matematika, 1. díl.* Fraus.

[10] Hejný, M. Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Sukniak, A., & Bomerová, E. (2015). *Matematika A. Učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat.

[11] Hejný, M. Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., & Sukniak, A. (2016). *Matematika C. Učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* H-mat.

[12] Hošpesová, A., Divíšek, J., & Kuřina, F. (1996). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 1. ročník.* Prometheus.

[13] Hošpesová, A., Divíšek, J., & Kuřina, F. (1997). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 2. ročník.* Prometheus.

[14] Hošpesová, A., Divíšek, J., & Kuřina, F. (1998). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 3. ročník.* Prometheus.

[15] Hošpesová, A., Divíšek, J., & Kuřina, F. (2000). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 5. ročník.* Prometheus.

[16] Krygowska, A. Z. (1975). *Geometria.* WSP.

[17] Kuřina, F. (1979). *Metrika a topologie.* Pedagogická fakulta Hradec Králové.

[18] Kuřina, F., & Vondrová, N. (2021). Jak to vlastně je? Nekonečno. *Učitel matematiky, 29*(2), 111–127.

[19] Lee, J. M. (2013). *Axiomatic geometry.* AMS.

[20] Pavlíček, J. B. (1953). *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*. Přírodovědecké nakladatelství.

[21] Pogorelov, A. V. (1983). *Geometrija.* Nauka.

[22] Pomykalová, E. (1993). *Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Prometheus.

[23] Pomykalová, E. (2010). *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Prometheus.

[24] Pomykalová, E. (2019). *Planimetrie. I.* Fraus.

[25] Robinson, A. (2009). *Jak se měří svět: Příběhy z dějin měření.* Universum.

[26] Stehlíková, N., Hejný, M., & Jirotková, D. (2005). *Úvod do studia analytické geometrie.* PedF UK.

[27] Větvička, V. (2003). *Moje květinová jitra.* Vašut.

[28] Vopěnka, P. (1989). *Rozpravy s geometrií.* Panorama.

[29] Vyšín, J. (1952). *Elementární geometrie.* Přírodovědecké vydavatelství.

[30] Vyšín, J. Dlouhý, Z., Metelka, J., & Urban, A. (1954). *Geometrie pro devátý až jedenáctý postupný ročník.* SPN.

František Kuřina
Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Rokitanského 62
500 03 Hradec Králové
e-mail: kurinovi@gmail.com

Naďa Vondrová
Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: nada.vondrova@pedf.cuni.cz