Učitel matematiky

Josef Tkadlec

58. mezinárodní matematická olympiáda

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 5, 314–320

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/149121`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2017

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

58. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Josef Tkadlec

Výrazných úspěchů dosáhli reprezentanti České republiky na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO), jejíž 58. ročník se letos konal od 13. do 23. července v brazilské metropoli Rio de Janeiro. Olympiády se zúčastnil rekordní počet 615 soutěžících ze 111 zemí (historicky poprvé se zapojil Nepál). Organizací byl pověřen ústav IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Ti samí organizátoři budou za rok ve „městě bohů“ pořádat i prestižní Mezinárodní matematický kongres (ICM).

Jako první na místo přijeli vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo ze 32 připravených návrhů rozdělených do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) vybrat šestici úloh pro soutěž a shodnout se na bodovacích schématech k jednotlivým úlohám. Zadání vybraných úloh naleznete na konci této zprávy.

Soutěžící s pedagogickými vedoucími dorazili do Ria o tři dny později. Ubytováni byli u pláže Barra de Tijuca v pětihvězdičkovém hotelu, kde proběhlo i slavnostní zahájení a zakončení.

Soutěž se konala 18. a 19. července v prostorách hotelu. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří úloh. Za každou úlohu mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády odveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

Českou republiku reprezentovali *Filip Bialas* z Gymnázia Opatov v Praze, *Pavel Hudec* z Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Danil Koževnikov* a *Jan Petr*, oba z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Martin Raška* z Wichterlova Gymnázia v Ostravě-Porubě a *Pavel Turek* z Gymnázia v Olomouci-Hejčíně. Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z IST Austria, pedagogickým vedoucím doc. RNDr. *Jaroslav Zhouf*, Ph.D. Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v tabulce:

		Body za úlohu						**Body**	**Cena**
Umístění		1	2	3	4	5	6		
49.–63.	Filip Bialas	7	3	0	7	7	0	24	S
72.–81.	Pavel Hudec	7	3	4	7	1	0	22	S
139.–187.	Danil Koževnikov	7	7	0	3	1	0	18	B
188.–264.	Jan Petr	7	3	0	7	0	0	17	B
390.–415.	Martin Raška	7	3	0	3	0	0	13	HM
14.–28.	Pavel Turek	7	7	0	7	7	0	28	G
	Celkem	42	26	4	34	16	0	122	

Tým složený z ostřílených matadorů i perspektivních mladíků dosáhl několika mimořádných úspěchů. Pavel Turek zužitkoval rozsáhlé zkušenosti a po třech bronzových medailích získal zlato, pro Českou republiku první po čtyřech letech. Jeho dělené 14. místo v pořadí jednotlivců navíc znamená nejlepší individuální výsledek od vzniku ČR. Stříbrné medaile vybojovali Pavel Hudec a Filip Bialas; Filipovi stejně jako loni zlatá medaile unikla o jediný bod. Danil Koževnikov a Jan Petr získali bronzové medaile a Martin Raška dosáhl na čestné uznání (HM), které se uděluje za úplné řešení alespoň jedné úlohy.

V neoficiálním pořadí týmů jsme skončili na skvělém 14.–15. místě, což je nejlepší výsledek od roku 1993. V celkovém pořadí jsme kromě všech sousedů porazili i řadu tradičně silných států včetně Kanady, Maďarska nebo Rumunska. Za zmínku stojí, že po prvním dni jsme dokonce měli více bodů než USA či Čína.

Pro srovnání uvádíme i výsledky slovenských soutěžících, kterým se letos tolik nedařilo:

Umístění		Body za úlohu 1	2	3	4	5	6	Body	Cena
390.–415.	Martin Melicher	7	3	0	2	1	0	13	HM
188.–264.	Marián Poturnay	7	1	0	7	2	0	17	B
471.–496.	Peter Ralbovský	7	0	0	1	1	0	9	HM
390.–415.	Tomáš Sásik	5	0	0	7	1	0	13	HM
342.–389.	Laura Vištanová	7	0	0	7	0	0	14	HM
471.–496.	Ákos Záhorský	7	0	0	2	0	0	9	HM
	Celkem	40	4	0	26	5	0	75	

Letošní šestice úloh se ukázala být nezvykle obtížná. O tom svědčí hned několik faktů: (i) zlatá medaile se poprvé v historii udělovala již za 25 bodů ze 42 možných, (ii) i ti nejúspěšnější soutěžící (po jednom z Íránu, Japonska a Vietnamu) získali „jen“ 35 bodů, (iii) za třetí úlohu bylo všeho všudy uděleno jen 26 bodů, což je méně než za jakoukoli jinou úlohu v historii IMO; přitom čtyři z těchto bodů získal za částečné řešení Pavel Hudec.

Doplňme ještě několik zajímavostí. Rusko poprvé v historii vypadlo z elitní desítky a propadlo se na jedenáctou příčku, částečně vinou nečekaně slabého výkonu v úloze číslo 5, navržené právě Ruskem. Na čele se naopak po pěti letech opět objevila Jižní Korea, která odsunula favorizované státy Čínu a USA na druhou, resp. čtvrtou příčku. Mezi ně se ještě vměstnal Vietnam, který se pravidelně objevuje v elitní desítce, ale třetí místo je pro něj vyrovnáním historicky nejlepšího výsledku. Z dalších překvapení jmenujme Gruzii a Řecko na sdílené dvanácté příčce — pro oba státy se jedná o jednoznačně nejlepší výsledek v historii. Kompletní výsledky jsou dostupné na `https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2017`.

Příští, 59. ročník Mezinárodní matematické olympiády proběhne v Cluji-Napoce v Rumunsku.

Letošní (neoficiální) pořadí zúčastněných států naleznete v následující tabulce:

	G	S	B	body
Jižní Korea	6	0	0	170
ČLR	5	1	0	159
Vietnam	4	1	1	155
USA	3	3	0	148
Írán	2	3	1	142
Japonsko	2	2	2	134
Singapur	2	1	2	131
Thajsko	3	0	2	131
Tchaj-wan	1	4	1	130
Velká Británie	3	0	2	130
Rusko	1	3	2	128
Gruzie	1	2	3	127
Řecko	1	4	1	127
Bělorusko	1	1	4	122
Česká republika	1	2	2	122
Ukrajina	1	2	2	122
Filipíny	0	3	3	120
Bulharsko	0	4	2	116
Itálie	2	1	1	116
Nizozemsko	1	2	1	116
Srbsko	0	4	2	116
Maďarsko	2	1	1	115
Polsko	1	0	5	115
Rumunsko	0	3	2	115
Kazachstán	1	2	1	113
Argentina	1	2	1	111
Bangladéš	0	2	2	111
Hongkong	1	1	3	111
Kanada	1	2	2	110
Peru	0	2	3	109
Indonésie	0	2	3	108
Izrael	0	3	2	107
Německo	0	1	3	106
Austrálie	0	3	2	103
Chorvatsko	0	2	3	102

	G	S	B	body
Turecko	0	1	3	102
Brazílie	0	2	1	101
Malajsie	0	2	2	101
Francie	0	2	2	100
Saudská Arábie	0	2	2	100
Arménie	0	2	2	99
Ázerbájdžán	0	0	4	98
Mexiko	0	1	2	96
Bosna a Hercegovina	0	0	4	95
Tádžikistán	0	0	3	95
Makao	1	0	0	94
Nový Zéland	0	0	3	94
Kypr	0	0	5	93
Mongolsko	0	1	2	93
Turkmenistán	0	0	2	93
Švédsko	0	1	2	91
Indie	0	0	3	90
Slovinsko	0	0	2	90
Portugalsko	0	0	2	89
Španělsko	0	0	3	86
Sýrie	0	1	0	85
Lotyšsko	0	0	3	84
Moldavsko	0	1	0	83
Švýcarsko	0	0	1	83
Kolumbie	0	0	1	81
JAR	0	0	2	81
Belgie	0	1	2	80
Irsko	0	0	2	80
Srí Lanka	0	0	3	80
Dánsko	0	0	1	77
Makedonie	0	0	1	77
Kyrgyzstán	0	0	2	75
Maroko	0	0	1	75
Slovensko	0	0	1	75

	G	S	B	body
Rakousko	0	2	0	74
Estonsko	0	1	0	72
Norsko	0	0	2	71
Alžírsko	0	0	1	70
Litva	0	0	2	69
Uzbekistán (5)	0	1	0	69
Albánie	0	0	1	67
Chile	0	0	1	67
Ekvádor	0	0	1	66
Tunisko (5)	0	0	1	59
Venezuela (5)	0	0	2	59
Kostarika	0	0	0	58
Pákistán	0	0	1	58
Salvádor(4)	0	0	1	57
Finsko	0	0	0	56
Kosovo (5)	0	0	1	55
Portoriko (5)	0	0	0	55
Nigérie (4)	0	0	0	51
Paraguay	0	0	0	48
Island	0	0	0	45
Lucembursko	0	0	1	45
Nikaragua (4)	0	0	1	44
Uruguay	0	0	0	43

	G	S	B	body
Černá Hora (4)	0	0	1	42
Bolívie	0	0	0	41
Lichtenštejnsko (3)	0	0	0	22
Uganda	0	0	0	22
Guatemala (4)	0	0	0	20
Botswana	0	0	0	19
Myanmar	0	0	0	15
Panama (1)	0	0	0	15
Trinidad a Tobago (1)	0	0	0	15
Kuba (1)	0	0	0	13
Irák (4)	0	0	0	13
Honduras (2)	0	0	0	12
Kambodža	0	0	0	11
Pobřeží slonoviny	0	0	0	11
Keňa	0	0	0	8
Ghana (1)	0	0	0	6
Tanzánie (2)	0	0	0	5
Egypt (3)	0	0	0	3
Nepál	0	0	0	3

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Pro dané celé číslo $a_0 > 1$ definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pro každé $n \geq 0$ předpisem

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{pokud } \sqrt{a_n} \text{ je celé číslo,} \\ a_n + 3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny hodnoty a_0, pro které existuje číslo A takové, že rovnost $a_n = A$ platí pro nekonečně mnoho indexů n.

(*Jihoafrická republika*)

2. Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Nalezněte všechny funkce $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f\bigl(f(x)f(y)\bigr) + f(x+y) = f(xy).$$

(*Albánie*)

3. Lovec a neviditelný zajíc hrají hru v eukleidovské rovině. Zajícova počáteční poloha A_0 a lovcova počáteční poloha B_0 jsou stejné. Po $n-1$ kolech hry se zajíc nachází v bodě A_{n-1} a lovec v bodě B_{n-1}. V n-tém kole postupně proběhnou tři věci:

(i) Zajíc se neviděn přesune do bodu A_n takového, že vzdálenost mezi A_{n-1} a A_n je přesně 1.

(ii) Sledovací zařízení nahlásí lovci bod P_n. Jediná záruka poskytnutá sledovacím zařízením je, že vzdálenost mezi P_n a A_n je nejvýše 1.

(iii) Lovec se viditelně přesune do bodu B_n takového, že vzdálenost mezi B_{n-1} a B_n je přesně 1.

Může lovec vždy (tj. bez ohledu na to, jak se hýbe zajíc, a na to, jaké body hlásí sledovací zařízení) volit své pohyby tak, aby měl jistotu, že po 10^9 kolech bude vzdálenost mezi ním a zajícem nejvýše 100? (*Rakousko*)

4. Je dána kružnice Ω a na ní různé body R, S takové, že RS není průměr Ω. Označme ℓ tečnu kružnice Ω vedenou bodem R. Nechť T je takový bod, že S je střed úsečky RT. Bod J je zvolen na kratším oblouku RS kružnice Ω tak, že kružnice Γ opsaná trojúhelníku JST protíná přímku ℓ ve dvou různých bodech. Označme A ten průsečík kružnice Γ a přímky ℓ, který leží blíže bodu R. Přímka AJ protíná kružnici Ω podruhé v bodě K. Dokažte, že přímka KT je tečna kružnice Γ. (*Lucembursko*)

5. Je dáno celé číslo $N \geq 2$. V řadě stojí $N(N+1)$ navzájem různě vysokých fotbalistů. Trenér Vrba chce vyřadit některých $N(N-1)$ z nich tak, aby nová řada sestávající ze zbylých $2N$ fotbalistů splňovala následujících N podmínek:

(i) nikdo nestojí mezi dvěma nejvyššími fotbalisty,

(ii) nikdo nestojí mezi třetím a čtvrtým nejvyšším fotbalistou,
⋮
(N) nikdo nestojí mezi dvěma nejnižšími fotbalisty.

Dokažte, že je to vždy možné. (*Rusko*)

6. Uspořádaná dvojice (x, y) celých čísel je *primitivní mřížový bod*, jestliže největší společný dělitel čísel x a y je 1. Dokažte, že pro libovolnou konečnou množinu S primitivních mřížových bodů existuje kladné celé číslo n a celá čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ taková, že pro každou dvojici (x, y) z S platí

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(*USA*)

Josef Tkadlec
IST Austria
Am Campus 1
3400 Klosterneuburg
Rakousko
e-mail: josef.tkadlec@gmail.com