Učitel matematiky

Alice Králová

Konstrukce společných tečen dvou kuželoseček

Učitel matematiky, Vol. 25 (2017), No. 4, 193–214

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/149106

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2017

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

KONSTRUKCE SPOLEČNÝCH TEČEN DVOU KUŽELOSEČEK

Alice Králová

Copak se v tomto článku dozvím nového a zajímavého?

V předloženém textu se snažím vyřešit úlohu, jak zkonstruovat společné tečny dvou kuželoseček.[1] Všichni umíme pomocí stejnolehlosti sestrojit společné tečny dvou kružnic, co si ale počít, když místo kružnic budou zadané například dvě elipsy? S touto úlohou jsem se kupodivu nesetkala ani při svém studiu matematiky a deskriptivní geometrie na vysoké škole, ani jsem ji nenašla v žádné z běžně dostupných učebnic geometrie. Proto si myslím, že poskytnutí řešení tohoto problému může být pro učitele matematiky opravdovým přínosem.

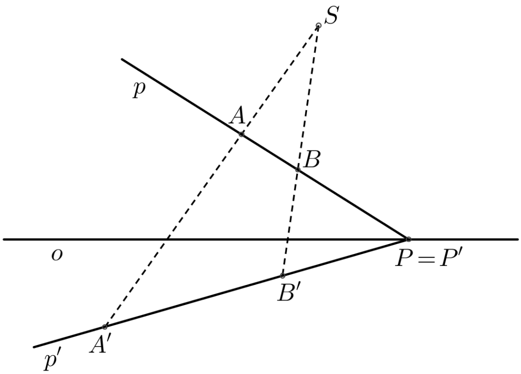
Definice základních pojmů

Řešení naší úlohy je založeno na využití tří základních geometrických pojmů, které spolu zdánlivě nesouvisejí, nicméně které posléze „smontujeme" dohromady, což nám poskytne požadovaný výsledek.

Prvním pojmem, s nímž budeme pracovat, je *středová kolineace v rovině.*[2]

[1] Mám samozřejmě na mysli dvě regulární kuželosečky, tedy elipsu, parabolu nebo hyperbolu.

[2] Středovou kolineaci v rovině lze vytvořit tak, že vezmeme „perspektivní kolineaci" v prostoru realizovanou středovým promítáním z bodu S mezi dvěma různoběžnými rovinami ρ a σ, $S \notin \rho, S \notin \sigma$. Tu následně promítneme z dalšího bodu O do společné průmětny π, $O \notin \rho, O \notin \sigma, O \notin \pi$. Zavádět kolineaci v rovině tímto způsobem je ovšem dosti zdlouhavé a pro naše konstrukce v podstatě zbytečné. Proto se v tomto textu omezíme na přímou definici středové kolineace v rovině.



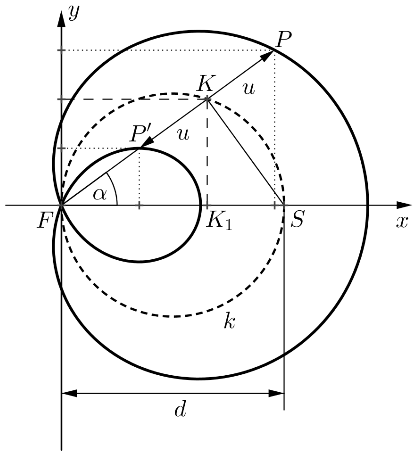
Obr. 1: Definice kolineace v rovině

Nechť je v rovině π dána přímka o – *osa kolineace* a bod S – *střed kolineace*, který na ní neleží.

Středová kolineace v rovině je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi body ležícími v rovině π definované těmito podmínkami:

- Pro libovolný bod A (*vzor*), jemuž je přiřazen bod A' (*obraz*) tak, aby $A' \neq A$, musí platit, že přímka AA' prochází středem kolineace S.
- Je-li bodu P přiřazen bod P' tak, že $P = P'$, pak tento bod musí ležet na ose kolineace a nazývá se *samodružný bod*.
- Máme-li dva libovolné vzory $A \neq B$ a jim odpovídající obrazy $A' \neq B'$, spojnice AB a $A'B'$ se buďto protínají v bodě na ose kolineace, nebo jsou to rovnoběžky s osou kolineace.

Druhým pojmem, který při řešení naší úlohy využijeme, je *Pascalova závitnice*. Jedná se o rovinnou křivku definovanou pomocí kružnice k o průměru d, bodu F, který je s ní incidentní, a zadané délky u. Veďme bodem F svazek přímek, na něž naneseme od jejich průsečíku s kružnicí k danou délku u, a to na obě dvě polopřímky, jejichž krajním bodem je zmíněný průsečík s kružnicí. Pascalovu závitnici pak vytvářejí krajní body P a P' takto sestrojených úseček o délce u.



Obr. 2: Definice Pascalovy závitnice

Pascalovu závitnici lze popsat rovnicemi v polárních souřadnicích. Nejprve zvolme jednodušší variantu, v níž souřadnicový systém zavedeme tak, že bod F je počátkem soustavy souřadnic a průměr kružnice k leží na ose x. Z důvodů, které se nám objasní později, označme druhý koncový bod průměru kružnice k na ose x jako bod S. Je tedy $|FS| = d$. Obecným bodem kružnice k nechť je bod $K[x; y]$. Jeho průmět na osu x označme jako bod $K_1[x; 0]$; úhel $\alpha = \sphericalangle SFK$.

Pro body kružnice k platí následující vztahy, které plynou z pravoúhlých trojúhelníků FK_1K a FKS (obr. 2):

$$\cos\alpha = \frac{x}{|FK|} \quad \Rightarrow \quad x = |FK| \cdot \cos\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{|FK|} \quad \Rightarrow \quad y = |FK| \cdot \sin\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{|FK|}{d} \quad \Rightarrow \quad |FK| = d \cdot \cos\alpha.$$

Pak je

$$\left.\begin{array}{l} x = d \cdot \cos^2\alpha \\ y = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin 2\alpha \end{array}\right\} \text{ pro } \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Vezmeme-li nyní v úvahu, že na polopřímku KF, resp. na polopřímku k ní opačnou, nanášíme od bodu K délku u, je Pascalova závitnice popsána těmito rovnicemi v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{|FK| \pm u} \quad \Rightarrow \quad x = (|FK| \pm u)\cdot\cos\alpha,\\ \sin\alpha &= \frac{y}{|FK| \pm u} \quad \Rightarrow \quad y = (|FK| \pm u)\cdot\sin\alpha.\end{aligned}$$

Proto je

$$\left.\begin{aligned} x &= (d\cdot\cos\alpha \pm u)\cdot\cos\alpha\\ y &= (d\cdot\cos\alpha \pm u)\cdot\sin\alpha\end{aligned}\right\} \text{ pro } \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Konstrukci společných tečen dvou kuželoseček vytvoříme v programu GeoGebra.[3] Pascalovu závitnici přitom budeme muset sestrojit v obecné poloze, v níž body $F[f_1; f_2]$ a $S[s_1; s_2]$ mají obecné souřadnice.

Proto si nyní odvoďme rovnice v polárních souřadnicích pro Pascalovu závitnici v obecné poloze. Nejprve ale rovnicemi popišme kružnici k. Opět platí vztah $|FK| = d\cdot\cos\alpha$. Dále je (obr. 3):

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\varphi) &= \frac{x'}{|FK|},\\ \sin(\alpha+\varphi) &= \frac{y'}{|FK|}.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} x = x' + f_1 = |FK|\cdot\cos(\alpha+\varphi) + f_1 = d\cdot\cos\alpha\cos(\alpha+\varphi) + f_1\\ y = y' + f_2 = |FK|\cdot\sin(\alpha+\varphi) + f_2 = d\cdot\cos\alpha\sin(\alpha+\varphi) + f_2\end{aligned}$$

opět pro $\alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Máme-li nyní rovnicemi popsat Pascalovu závitnici, v uvedených rovnicích popisujících body kružnice k pouze nahradíme

[3] Jedná se o program GeoGebra verze 5.0, což je grafický open source software, viz odkaz `https://www.geogebra.org`.

délku $|FK|$ výrazem $|FK| \pm u$, který lze vyjádřit ve tvaru $d \cdot \cos\alpha \pm u$. Je tedy

$$x = (d \cdot \cos\alpha \pm u) \cdot \cos(\alpha + \varphi) + f_1 \tag{1}$$

$$y = (d \cdot \cos\alpha \pm u) \cdot \sin(\alpha + \varphi) + f_2, \tag{2}$$

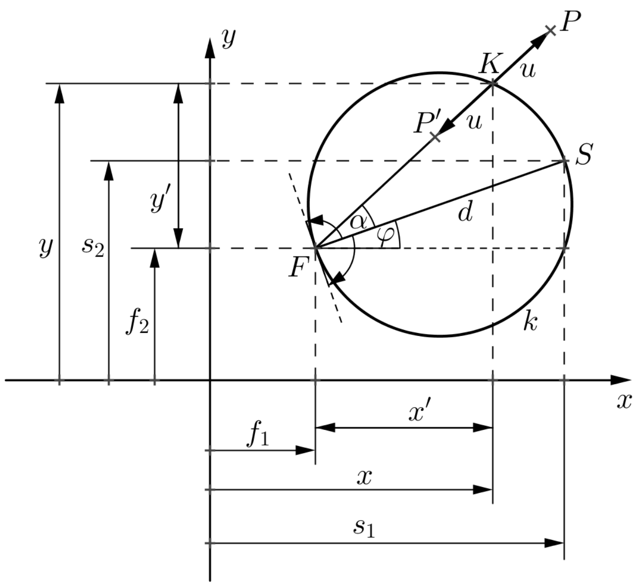
kde $\alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Délku $d = |FS|$ průměru kružnice k dopočítáme ze souřadnic bodů F a S pomocí vztahu

$$d = \sqrt{(s_1 - f_1)^2 + (s_2 - f_2)^2}\ .$$

Pro úhel φ platí, že

$$\tan\varphi = \frac{s_2 - f_2}{s_1 - f_1} \ \Rightarrow\ \varphi = \arctan\frac{s_2 - f_2}{s_1 - f_1}.$$



Obr. 3: Odvození rovnic Pascalovy závitnice v obecné poloze

Pascalova závitnice má jednu důležitou vlastnost, kterou si nyní popíšeme a kterou později využijeme v naší konstrukci. Pro jednoduchost uvažujme, že je poloha Pascalovy závitnice stejná jako v obr. 2. Body L_1 a L_2, v nichž Pascalova závitnice protíná osu x, mají x-ovou souřadnici danou výrazem $d - u$, resp. $d + u$. Úsečka L_1L_2 má tedy délku $2u$ a je průměrem kružnice l se středem v bodě S.

V obr. 2 jsme označili obecný bod kružnice k jako bod K. Protože je úsečka FS průměrem kružnice k, je $|\sphericalangle FKS| = 90°$. Přitom průměr kružnice l leží na přímce KS – viz obr. 4.

Zopakujme, že body P a P' Pascalovy závitnice leží na přímce $FK \perp KS$ tak, že $|PK| = |KP'| = u$. Jinými slovy můžeme říci, že vzdálenost bodů P a P' od přímky KS je rovna hodnotě u.

Veďme nyní body P' a P rovnoběžky t_1 a t_2 s přímkou KS, na níž leží průměr kružnice l, jejíž poloměr má velikost u. Z výše uvedeného je zřejmé, že přímky t_1 a t_2 jsou tečnami kružnice l.

Tuto vlastnost lze vyjádřit tak, že Pascalova závitnice je množinou pat kolmic, které vedeme z daného bodu F k tečnám dané kružnice l. Pascalovu závitnici nazýváme *úpatnicí* kružnice l s *pólem* F.

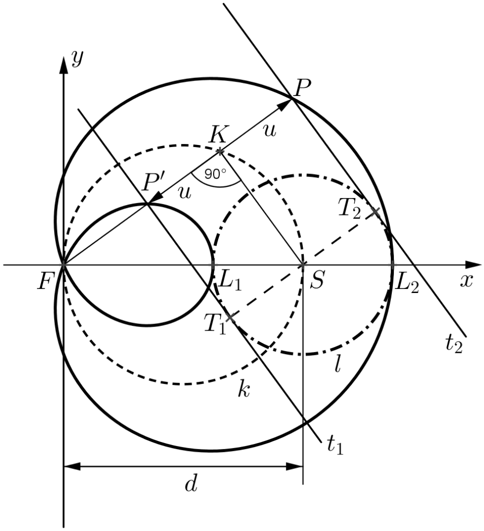
V závislosti na vzájemné poloze bodu F a kružnice l se mění pouze tvar Pascalovy závitnice, algebraické rovnice v polárních souřadnicích, které ji popisují, zůstávají stejné. Stejně tak se nemění i fakt, že je Pascalova závitnice úpatnicí kružnice l.

Obr. 4 zobrazuje Pascalovu závitnici v případě, kdy je $u < d$, což současně znamená, že bod F leží vně kružnice l.

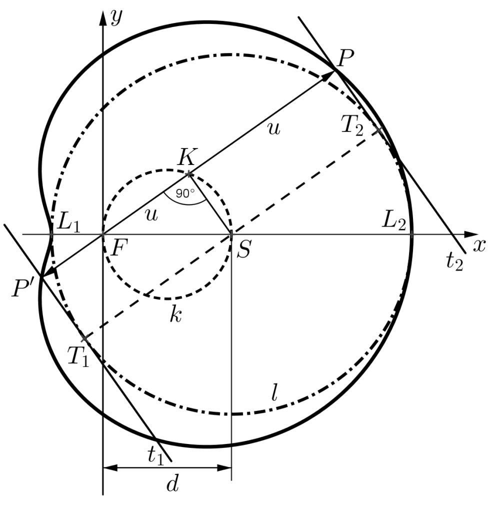
Na obr. 5 vidíme Pascalovu závitnici, je-li $u > d$, neboli bod F leží uvnitř kružnice l.

Pokud je $u = d$, tj. bod F leží na kružnici l, je bod F na Pascalově závitnici hrotem a Pascalovu závitnici nazýváme *kardioidou.*

Jednotlivé případy jsou také vykresleny v (Jarešová & Volf, 2012: s. 56).



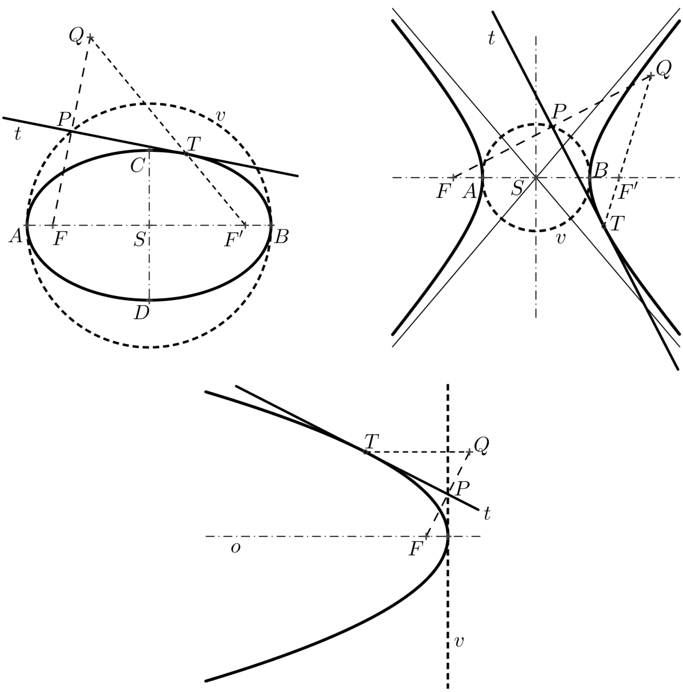
Obr. 4: Pascalova závitnice jako úpatnice kružnice l, $u < d$



Obr. 5: Pascalova závitnice jako úpatnice kružnice l, $u > d$

Na tomto místě uveďme následující skutečnost. Konstrukci společných tečen dvou kuželoseček budeme realizovat v programu GeoGebra. Ten umí přesně sestrojit pouze průsečíky Pascalovy závitnice s přímkou, zatímco přesnou polohu průsečíků Pascalovy závitnice s kružnicí určit nedokáže. To má za následek, že pokud chceme zkonstruovat společné tečny dvou kuželoseček zcela přesně, jsme nuceni zadané kuželosečky kolineací transformovat do kružnice a paraboly. Což je z hlediska volby určujících prvků kolineace velmi výrazné omezení.

Konečně třetím pojmem, který při řešení naší úlohy použijeme, je *tečna kuželosečky v daném bodě*. Přesněji řečeno v konstrukci uplatníme její vlastnosti.



Obr. 6: Vlastnosti tečny kuželosečky

Abychom mohli uvést vlastnosti tečny dané kuželosečky, musíme zmínit pojem *vrcholová kružnice* elipsy, resp. hyperboly. Jedná se o kružnici v, jejímž průměrem je hlavní osa AB elipsy nebo hyperboly. Platí, že bod P, který je patou kolmice spuštěné z některého ohniska elipsy nebo hyperboly na tečnu t této kuželosečky, leží na zmíněné vrcholové kružnici v. Najdeme-li bod Q středově souměrný k použitému ohnisku F podle bodu P, pak spojnice druhého ohniska F' kuželosečky s bodem Q protíná tečnu t v jejím bodě dotyku T.

Tečna t paraboly v bodě T má analogické vlastnosti, pouze je vrcholová kružnice nahrazena *vrcholovou tečnou* v paraboly. Protože je „druhým ohniskem paraboly“ nevlastní bod její osy o, získáme bod dotyku T na tečně t tak, že bodem Q vedeme rovnoběžku s osou o paraboly.

Společná tečna kružnice a kuželosečky

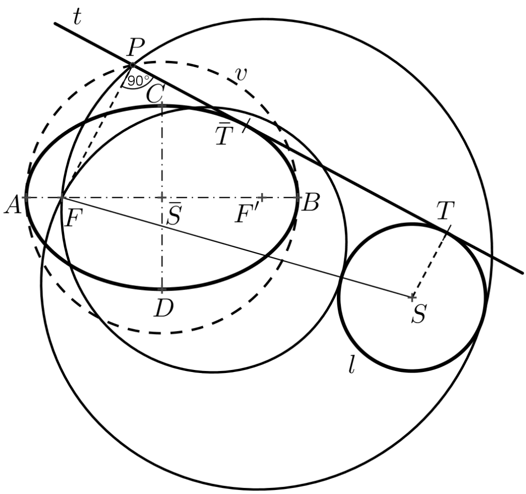
Nyní se podívejme, jakou vlastnost musí mít tečna t, která je společná pro kružnici l se středem S a kuželosečku, která není rovněž kružnicí. Zjistíme, že se nám výše uvedené pojmy začínají spojovat dohromady.

Mějme libovolnou kuželosečku, bod F nechť je jejím ohniskem, bod P nechť je patou kolmice, kterou spustíme z ohniska F na tečnu t. Protože je přímka t zároveň tečnou kružnice l, je bod P bodem úpatnice kružnice l, jejímž pólem je ohnisko F. Bod P je tedy bodem Pascalovy závitnice.

Přitom jsme řekli, že bod P leží na vrcholové kružnici elipsy nebo hyperboly, případně na vrcholové tečně paraboly. Takže ho získáme jako průsečík Pascalovy závitnice s příslušnou vrcholovou kružnicí, resp. vrcholovou tečnou.

Nicméně jsme také zmínili, že při realizaci této konstrukce v programu GeoGebra máme problém, protože GeoGebra neumí přesně určit průsečíky Pascalovy závitnice s kružnicí.

Proto se budeme snažit zadané dvě kuželosečky kolineárně transformovat do kružnice a paraboly, aby bylo možné jejich společné tečny sestrojit zcela přesně.



Obr. 7: Společná tečna elipsy a kružnice

V programu GeoGebra vykreslíme Pascalovu závitnici v obecné poloze pomocí rovnic 1 a 2. Použijeme příkaz ve tvaru

$$p = \texttt{Krivka}[\mathsf{Rovnice}\ 1,\ \mathsf{Rovnice}\ 2,\ \alpha,\ -\pi/2,\ \pi/2].$$

Před zadáním tohoto příkazu si ale musíme nachystat hodnoty d, u, φ, f_1 a f_2.

Hodnotu $d = |FS|$ určíme příkazem

$$d = \texttt{Vzdalenost}[F, S].$$

Hodnota u je rovna poloměru zadané kružnice l.

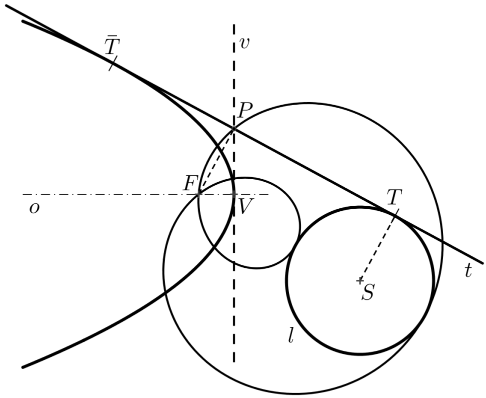
Abychom mohli dopočítat velikost úhlu φ, musíme definovat hodnoty s_1, s_2, f_1 a f_2, které udávají x-ové a y-ové souřadnice bodů S a F. K tomu použijeme příkaz ve tvaru souřadnice(název bodu), konkrétně $s_1 = \mathsf{x}(S)$ pro určení x-ové souřadnice bodu S a $s_2 = \mathsf{y}(S)$ pro y-ovou souřadnici bodu S. Stejným způsobem získáme hodnoty f_1 a f_2.

Potom už hodnotu úhlu φ dopočítáme pomocí příkazu

$$\varphi = \texttt{atan}((s_2 - f_2)/(s_1 - f_1)).$$

Kolineární transformace zadaných kuželoseček

Abychom mohli sestrojit společné tečny dvou kuželoseček, je třeba je kolineárně transformovat do kružnice a kuželosečky, kterou je v ideálním případě parabola. Na základě toho, co bylo uvedeno výše, jsme potom již schopni úlohu vyřešit.



Obr. 8: Společná tečna paraboly a kružnice

Podívejme se nejprve na konstrukci společných tečen dvou elips. Z toho, co zjistíme, se pak pokusíme navrhnout postup řešení pro jinak zadanou dvojici kuželoseček.

Důležitou vlastností kolineace v rovině π je, že některé vlastní body roviny π se zobrazí do nevlastních bodů roviny π na její nevlastní přímku u'_∞. Tyto body, jejichž obrazy jsou na nevlastní přímce u'_∞, leží na *úběžnici* u, která je rovnoběžná s osou o kolineace.[4] Přitom je kolineace jednoznačně určena, pokud zadáme polohu osy o kolineace, úběžnice u a středu S kolineace.

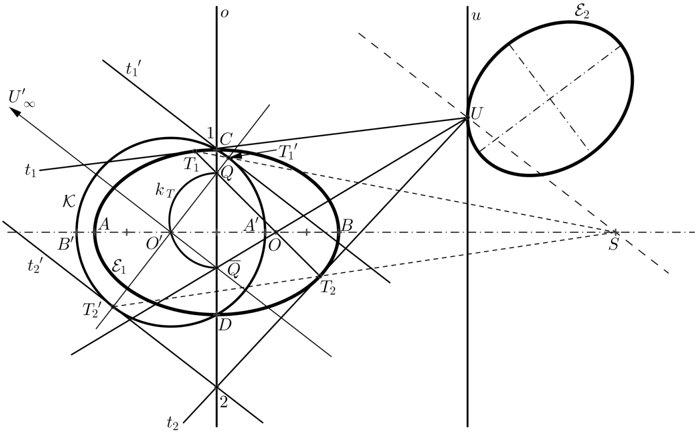
Nechť jsou tedy dány dvě elipsy $\mathcal{E}_1$ a $\mathcal{E}_2$, které jsou vůči sobě v obecné poloze. Elipsu $\mathcal{E}_1$ chceme kolinárně transformovat do kružnice $\mathcal{K}$, z elipsy $\mathcal{E}_2$ chceme v téže kolineaci „vyrobit“ parabolu $\mathcal{P}$.

[4] Z této vlastnosti kolineace plyne, že kolineárním obrazem kružnice je elipsa, parabola nebo hyperbola v závislosti na počtu průsečíků mezi uvažovanou kružnicí a úběžnicí kolineace.

Osu o kolineace volme tak, aby splývala s vedlejší osou CD elipsy $\mathcal{E}_1$. Aby z elipsy $\mathcal{E}_2$ mohla vzniknout parabola, musí mít s úběžnicí u společný právě jeden bod, volme proto úběžnici u kolineace tak, aby to byla tečna elipsy $\mathcal{E}_2$ rovnoběžná s osou o kolineace. Bod dotyku mezi $\mathcal{E}_2$ a u označme jako bod U.[5] Jeho obrazem bude nevlastní bod U'_∞ (obr. 9).

Dále budeme předpokládat, že střed S kolineace leží na hlavní ose $\leftrightarrow AB$ elipsy $\mathcal{E}_1$. Kdybychom polohu bodu S zvolili pevně, pak bude obrazem elipsy $\mathcal{E}_1$ opět elipsa. Pokud má ale z elipsy $\mathcal{E}_1$ vzniknout kružnice $\mathcal{K}$, získáme přesnou polohu bodu S až jako důsledek této podmínky.

Na tomto místě poznamenejme, že musí být splněn požadavek, aby se elipsa $\mathcal{E}_1$ a úběžnice u vzájemně neprotínaly. Vzhledem k tomu, že úběžnici u jako tečnu elipsy $\mathcal{E}_2$ můžeme volit ve dvou různých polohách, lze tuto podmínku snadno dodržet. Naše možnosti, jak výše uvedenou podmínku splnit, jsou rozšířeny také tím, že si můžeme vhodně zvolit, kterou ze zadaných elips označíme jako elipsu $\mathcal{E}_1$ a kterou jako elipsu $\mathcal{E}_2$.



Obr. 9: Odvození určujících prvků kolineace

[5]Konstrukce tečny elipsy rovnoběžné se směrem patří mezi základní konstrukce v deskriptivní geometrii, a proto ji zde nebudeme popisovat – viz (Pomykalová, 2012: s. 43, příklad 4.6).

Jelikož vedlejší vrcholy C a D elipsy $\mathcal{E}_1$ leží na ose o kolineace, jsou samodružné, a proto jsou to zároveň body kružnice $\mathcal{K}$. Poznamenejme ale, že *kolineace nezachovává dělicí poměr*, takže obrazem středu elipsy $\mathcal{E}_1$ **není** střed kružnice $\mathcal{K}$. Úsečka CD je pouze tětivou kružnice $\mathcal{K}$, nikoli jejím průměrem.

Řekli jsme, že střed S kolineace je bodem na hlavní ose $\leftrightarrow AB$ elipsy $\mathcal{E}_1$, takže její hlavní vrcholy A a B leží na kolineárním paprsku a jejich obrazy A' a B' jsou s tímto kolineárním paprskem rovněž incidentní. Takže je $A'B' \subset \leftrightarrow AB$.

Protože jsou tečny elipsy $\mathcal{E}_1$ v bodech A a B rovnoběžné s osou o kolineace, musí být tečny kružnice $\mathcal{K}$ v bodech A' a B' také rovnoběžné s osou o. (Všechny čtyři tečny se protínají ve společném nevlastním bodě na ose o kolineace, z čehož vyplývá jejich rovnoběžnost. Navíc jsou tečny v bodech A' a B' hledané kružnice $\mathcal{K}$ kolmé na $A'B'$.) Úsečka $A'B'$ je tedy průměrem kružnice $\mathcal{K}$.

V této chvíli se dostáváme k nejdůležitějšímu „fíglu“, který použijeme, abychom elipsu $\mathcal{E}_1$ skutečně kolineárně transformovali do kružnice $\mathcal{K}$.

Veďme z bodu U, což je bod dotyku elipsy $\mathcal{E}_2$ s úběžnicí u, tečny t_1 a t_2 k elipse $\mathcal{E}_1$. Body dotyku označme T_1 a T_2.[6] Protože je nevlastní bod U'_∞ obrazem bodu U, přímky t'_1 a t'_2, které jsou obrazy tečen t_1 a t_2 a které bodem U'_∞ musí procházet, jsou tudíž spolu vzájemně rovnoběžné.

Vzhledem k tomu, že je kolineárním obrazem tečny dané křivky opět tečna obrazu této křivky a obrazem bodu dotyku mezi tečnou a křivkou je rovněž bod dotyku mezi jejich obrazy, budou přímky t'_1 a t'_2 tečnami kružnice $\mathcal{K}$ s body dotyku T'_1 a T'_2, jakožto obrazy bodů T_1 a T_2. Z rovnoběžnosti tečen t'_1 a t'_2 plyne, že úsečka $T'_1T'_2$ je **průměrem** kružnice $\mathcal{K}$.

Teoreticky nyní víme, že střed O' kružnice $\mathcal{K}$ je průsečíkem přímky AB s úsečkou $T'_1T'_2$, prakticky bod O' ale zatím najít nemůžeme, protože polohu úsečky $T'_1T'_2$ neznáme, neboť neznáme polohu středu S kolineace.

[6] Konstrukce tečen z bodu k elipse – viz (Pomykalová, 2012: s. 41, příklad 4.5), v programu GeoGebra existuje pro konstrukci tečen explicitní příkaz.

Proto si všimněme ještě jedné vlastnosti, která je z hlediska konstrukce bodu O' zcela zásadní. Vzorem středu O' kružnice $\mathcal{K}$ je bod O na přímce AB, který ale není středem elipsy $\mathcal{E}_1$. Kolineárním obrazem přímky OU je spojnice bodů O' a U'_∞, která je rovnoběžná s tečnami t'_1 a t'_2 kružnice $\mathcal{K}$. Úsečka $T'_1T'_2$ a spojnice $O'U'_\infty$ jsou proto na sebe **kolmé**.

Získáme-li dva body Q a $\overline{Q}$, z nichž jeden leží na přímce $T'_1T'_2$ a druhý na spojnici $O'U'_\infty$, pak je bod O' nutně bodem Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem $Q\overline{Q}$. Těmito body Q a $\overline{Q}$ jsou ale samodružné body na ose o kolineace, které vzniknou jako její průsečíky s přímkami T_1T_2 a OU, přičemž bod O jsme získali jako průsečík přímky AB s přímkou T_1T_2.

Známe-li polohu bodu O' jakožto průsečíku přímky AB s Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem $Q\overline{Q}$, kružnici $\mathcal{K}$ pak už snadno sestrojíme pomocí jejího středu O' a bodu C, resp. D, kterým musí procházet.

Protože bod U leží na přímce $O\overline{Q}$, je bod U'_∞ nevlastním bodem přímky $\overline{Q}O'$. Spojnice bodu U s bodem U'_∞, tj. rovnoběžka s přímkou $\overline{Q}O'$ vedená bodem U, je kolineárním paprskem a protíná přímku AB ve středu S kolineace.

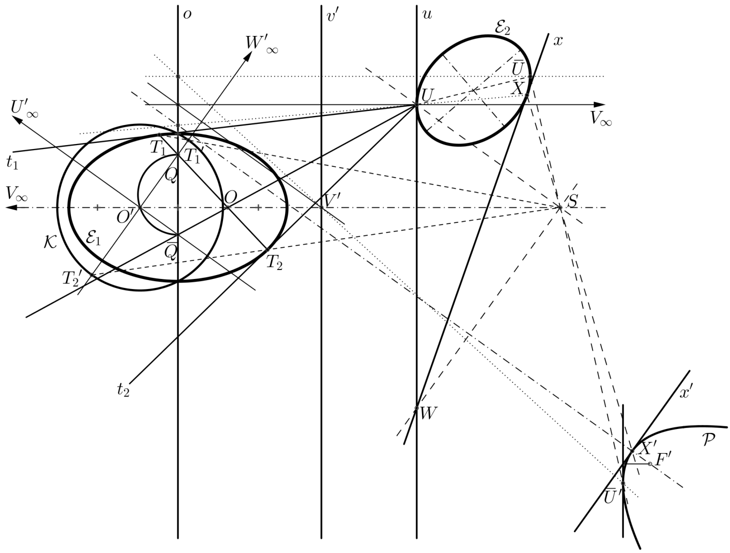
Průsečíky přímky QO' s kružnicí $\mathcal{K}$ jsou body dotyku T'_1 a T'_2. Který z těchto dvou průsečíků máme označit jako bod T'_1 a který jako bod T'_2, poznáme podle toho, že $T'_1 \in \leftrightarrow ST_1$ a $T'_2 \in \leftrightarrow ST_2$.

Dále přímka AB protíná kružnici $\mathcal{K}$ v bodech A' a B'. Jejich správné označení odvodíme z faktu, že se například spojnice AT_1 a $A'T'_1$ musí protínat na ose o kolineace.

Pro úplnost dodejme následující skutečnost. Řekli jsme, že středová kolineace v rovině je vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma množinami bodů, vzory a obrazy, které leží ve společné rovině π. Je-li obrazem určitého bodu U nevlastní bod U'_∞, pak tento bod U leží na úběžnici $u \parallel o$. Ale pokud vezmeme za vzor nevlastní bod V_∞ na nevlastní přímce roviny π, jeho obrazem V' je bod na *protiúběžnici* v', která je též rovnoběžná s osou o kolineace. Přitom platí, že orientovaná vzdálenost protiúběžnice v' od osy o kolineace je rovna orientované vzdálenosti středu S kolineace od úběžnice u – viz (Urban, 1965: s. 303). Symbolicky můžeme tento vztah zapsat jako $\overrightarrow{(v', o)} = \overrightarrow{(S, u)}$, alternativou je rovnost $\overrightarrow{(u, o)} = \overrightarrow{(S, v')}$.

Veďme bodem U rovnoběžku s přímkou AB, jejím nevlastním bodem nechť je bod V_∞. Průsečíkem s osou o kolineace pak proložme rovnoběžku s přímkou $\overline{Q}O'$, která prochází bodem U'_∞. Ta protne přímku AB v bodě V', kterým prochází protiúběžnice $v' \parallel o$. Jelikož přímka AB, $S \in AB$, prochází bodem V_∞, jedná se o kolineární paprsek, který proto musí být incidentní s bodem V'.

Nyní provedeme kolineární transformaci elipsy $\mathcal{E}_2$ do paraboly $\mathcal{P}$ (obr. 10). Protože program GeoGebra umí vykreslit kuželosečku po zadání pěti jejích různých bodů, stačí najít kolineární obrazy pěti bodů elipsy $\mathcal{E}_2$. Veďme hlavními a vedlejšími vrcholy elipsy $\mathcal{E}_2$ rovnoběžky s přímkou AB, které všechny procházejí bodem V_∞. Obrazy těchto přímek vytváří svazek přímek se středem v bodě V', přičemž jsou též incidentní s příslušnými samodružnými body na ose o kolineace. Pro nalezení obrazů vrcholů elipsy $\mathcal{E}_2$ pak ještě použijeme odpovídající kolineární paprsky.



Obr. 10: Kolineární transformace zadaných elips

Jako pátý bod elipsy $\mathcal{E}_2$ lze použít druhý krajní bod $\overline{U}$ toho průměru elipsy $\mathcal{E}_2$, jenž prochází bodem U. Tečna paraboly v bodě $\overline{U}\,'$, který je obrazem bodu $\overline{U}$, je pak nutně rovnoběžná s osou o kolineace.

Dále se tečna elipsy $\mathcal{E}_2$ v některém jejím vrcholu zobrazí do tečny paraboly $\mathcal{P}$ v obrazu tohoto vrcholu. Přitom využijeme samodružného bodu na ose o kolineace. Známe-li dvě tečny paraboly s jejich body dotyku, můžeme užitím konstrukcí (Havlíček, 1956: s. 180, konstrukce 40,1) a (Havlíček, 1956: s. 183, konstrukce 40,4) najít určující prvky paraboly, tedy polohu jejího vrcholu a ohniska.

Poznamenejme, že osa paraboly musí procházet bodem U'_∞, a je tedy rovnoběžná s přímkou $\overline{Q}O'$. Kdybychom chtěli užitím kolineace přímo sestrojit vrcholovou tečnu x' s vrcholem X' paraboly $\mathcal{P}$, užijeme mírně upravenou konstrukci (Urban, 1965: s. 338, úloha 13.5, 2. případ).

Nevlastní bod kolmice QO' k přímce $\overline{Q}O'$ označme W'_∞. Vrcholová tečna x' paraboly $\mathcal{P}$ je pak s bodem W'_∞ incidentní, neboli je rovnoběžná s přímkou QO'. Vzorem bodu W'_∞ je bod W na úběžnici u, který získáme jako její průsečík s rovnoběžkou s QO' vedenou středem S kolineace.

Jednou tečnou elipsy $\mathcal{E}_2$ procházející bodem W je samotná úběžnice u, druhou tečnou je přímka x s bodem dotyku X. Jejich obrazy budou hledaná vrcholová tečna x' a vrchol X' paraboly $\mathcal{P}$. Konstrukci paraboly pak dokončíme již zmíněnou konstrukcí (Havlíček, 1956: s. 183, konstrukce 40,4). Abychom ji mohli zrealizovat, potřebujeme ještě jednu obecnou tečnu paraboly $\mathcal{P}$, kterou si však obstaráme postupem uvedeným výše.

Tím máme celou úlohu prakticky vyřešenou, protože jsme se v této chvíli dostali do situace, kdy hledáme společné tečny kružnice $\mathcal{K}$ a paraboly $\mathcal{P}$, což je problém, jehož řešení jsme již předložili v předchozím textu.

Stručně tedy připomeňme, že sestrojíme Pascalovu závitnici s řídicí kružnicí $\mathcal{K}$ a pólem F', kterým je ohnisko paraboly $\mathcal{P}$. Průsečíky vrcholové tečny x' s Pascalovou závitnicí jsou body, kterými procházejí společné tečny kružnice $\mathcal{K}$ a paraboly $\mathcal{P}$, a to kolmo na spojnici ohniska F' a příslušného průsečíku na vrcholové tečně x'.

Dále určíme body dotyku T' a $\overline{T}'$ sestrojené tečny t' a kružnice $\mathcal{K}$, resp. paraboly $\mathcal{P}$. Kolineární transformací těchto tří prvků získáme společnou tečnu t elips $\mathcal{E}_1$ a $\mathcal{E}_2$ s bodem dotyku T na elipse $\mathcal{E}_1$ a bodem dotyku $\overline{T}$ na elipse $\mathcal{E}_2$.

Nástin řešení pro ostatní dvojice kuželoseček

Domnívám se, že rýsovat celou konstrukci společných tečen dvou elips na papír pomocí pravítka a kružítka prakticky nemá smysl, protože by v podstatě vznikla nepřehledná změť čar. Mnohem rozumější je vytvořit krokovanou konstrukci v programu GeoGebra. Moje provedení této úlohy, sestávající z 35 dílčích kroků a zahrnující též postup konstrukce, můžete nalézt na mých školních stránkách `http://user.mendelu.cz/balcarko` v oddíle Kuželosečky.

Nyní si stručně rozebereme další možné způsoby zadání dvou kuželoseček.

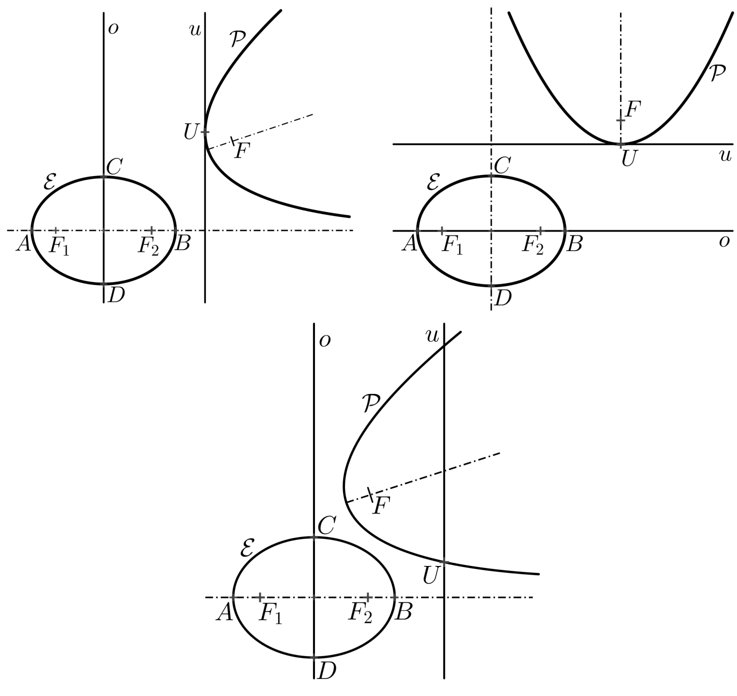
Nechť je jako dvojice kuželoseček dána elipsa s parabolou. Předpokládejme, že je jejich vzájemná poloha taková, aby jejich společné tečny skutečně existovaly. Tento požadavek je splněn, pokud elipsa neleží v části roviny, kterou lze označit jako „vnitřek paraboly“.[7] Také vynechme triviální situaci, že by existovala pouze jedna společná tečna elipsy s parabolou v jejich bodě dotyku.

Pak lze říci, že při jejich vhodném zadání lze v principu postupovat stejným způsobem, který jsme použili pro dvě elipsy. Protože však neexistuje tečna paraboly rovnoběžná s osou paraboly, musíme v situaci, že by osa paraboly byla rovnoběžná s vedlejší osou zadané elipsy, zaměnit význam hlavní a vedlejší osy elipsy $\mathcal{E}_1$.

[7] Účelem tohoto textu není podat přesný a vyčerpávající rozbor vzájemné polohy dvou kuželoseček. Proto zde nepředkládám definici „vnitřku paraboly“, ale spoléhám se na to, že je zřejmé, co mám tímto pojmem na mysli.

Potíže rovněž nastanou, pokud by tečna paraboly určující úběžnici u současně protínala zadanou elipsu $\mathcal{E}$. Pak bychom museli úběžnici u volit tak, aby byla nesečnou elipsy $\mathcal{E}$ a poté parabolu $\mathcal{P}$ v závislosti na její poloze kolinárně transformovat do elipsy nebo hyperboly. To by ovšem následně vyžadovalo konstrukci průsečíků mezi Pascalovou závitnicí a vrcholovou kružnicí elipsy, resp. hyperboly, které ale v programu GeoGebra nelze přesně sestrojit.

V každém případě je při volbě určujících prvků kolineace stěžejní transformace zadané elipsy $\mathcal{E}$ do kružnice $\mathcal{K}$. Jaká kuželosečka vznikne z paraboly $\mathcal{P}$, je podružné.



Obr. 11: Vzájemná poloha elipsy a paraboly

Podobně lze uvažovat i v případě, že je zadána elipsa $\mathcal{E}$ a hyperbola $\mathcal{H}$. Přitom tečna t hyperboly v některém jejím vlastním bodě má vlastnost, že její odchylka od vedlejší osy $\leftrightarrow CD$ hyperboly je v rozsahu $\langle O^\circ, \varphi)$, kde φ je úhel mezi některou z asymptot a vedlejší osou $\leftrightarrow CD$ hyperboly.

Opět preferujeme variantu, aby úběžnice u byla tečnou hyperboly $\mathcal{H}$, která je rovnoběžná s hlavní nebo vedlejší osou elipsy $\mathcal{E}$, a tím se hyperbola následně kolineárně transformovala do paraboly $\mathcal{P}$. Přitom ale úběžnice u nesmí elipsu $\mathcal{E}$ protínat!

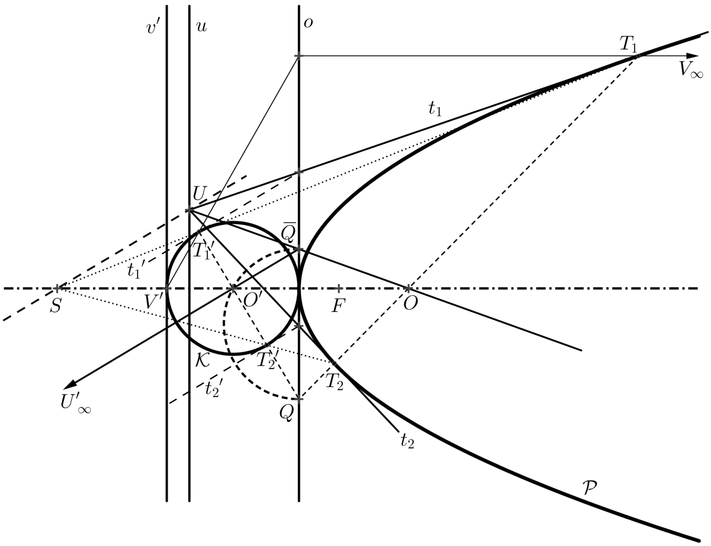
Pokud je úhel mezi hlavní, resp. vedlejší, osou elipsy a vedlejší osou $\leftrightarrow CD$ hyperboly větší než hodnota φ, volíme úběžnici u jako libovolnou rovnoběžku s hlavní nebo vedlejší osou elipsy $\mathcal{E}$ tak, aby byla nesečnou elipsy $\mathcal{E}$.

Opět je prvořadé elipsu $\mathcal{E}$ kolineárně transformovat do kružnice $\mathcal{K}$. V této souvislosti poznamenejme, že při transformaci elipsy do kružnice nelze při volbě určujících prvků kolineace nahradit užití hlavní a vedlejší osy elipsy $\mathcal{E}$ jako osy o kolineace a nositelky středu S kolineace jejími sdruženými průměry. V tom případě by se elipsa $\mathcal{E}$ zobrazila do elipsy $\mathcal{E}'$ a celý postup by zkolaboval.

Ve zbývajících případech jsou dány kombinace paraboly a hyperboly.[8] Pokud je alespoň jednou ze zadaných kuželoseček parabola $\mathcal{P}$, budeme ji transformovat do kružnice $\mathcal{K}$ (obr. 12).

Osu o kolineace můžeme ztotožnit s vrcholovou tečnou paraboly $\mathcal{P}$, střed S kolineace nechť je incidentní s osou paraboly. Pokud to lze, volme úběžnici u jako tečnu druhé zadané kuželosečky, ale tak, aby parabolu $\mathcal{P}$ neprotínala. Další postup se pak shoduje s řešením úlohy pro dvě elipsy. Poznamenejme, že osu o kolineace nelze volit v ose paraboly, neboť pak by úběžnice u vždy parabolu $\mathcal{P}$ protínala.

[8] Celkový počet všech možných zadání je šest, jedná se o kombinace s opakováním ze tří prvků (elipsa, parabola, hyperbola) druhé třídy (vybíráme dvě kuželosečky).
$C'_2(3) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$. Pro odvození počtu kombinací s opakováním se používá tzv. „přihrádková" kombinatorika.



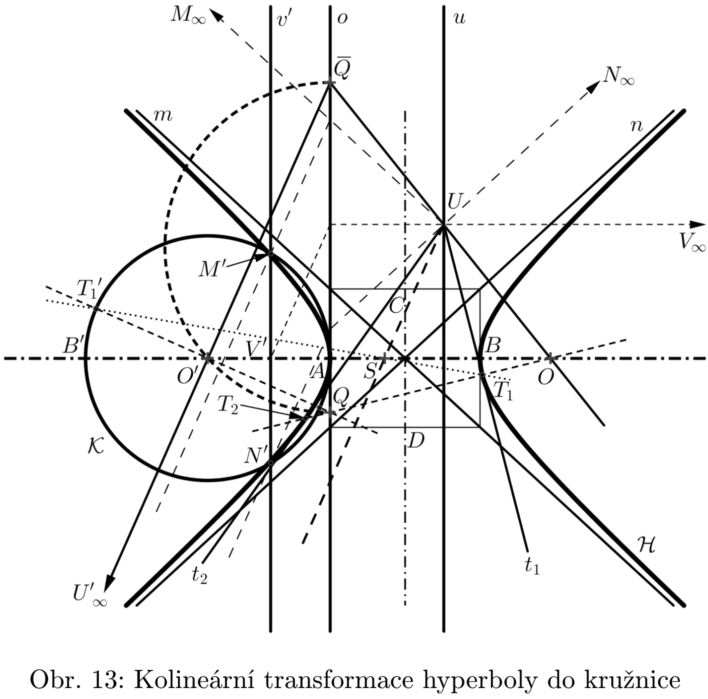
Obr. 12: Kolineární transformace paraboly do kružnice

Poslední možné zadání úlohy je kostrukce společných tečen dvou hyperbol $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$. Abychom hyperbolu $\mathcal{H}_1$ kolineárně zobrazili do kružnice $\mathcal{K}$, vedeme osu o kolineace hlavním vrcholem A rovnoběžně s její vedlejší osou $\leftrightarrow CD$. Střed S kolineace budeme hledat na její hlavní ose $\leftrightarrow AB$. Úběžnice u rovnoběžná s osou kolineace musí být zvolena tak, aby hlavní osu hyperboly $\mathcal{H}_1$ protťala ve vnitřním bodě úsečky AB. V ideálním případě přitom bude současně tečnou hyperboly $\mathcal{H}_2$.

Rovněž u hyperboly $\mathcal{H}_1$ platí, že osu o kolineace nelze volit v její hlavní ose $\leftrightarrow AB$, protože pak by úběžnice u hyperbolu $\mathcal{H}_1$ vždy protínala, tudíž by se nemohla zobrazit do kružnice $\mathcal{K}$.

Nevlastní body M_∞ a N_∞ hyperboly $\mathcal{H}_1$, které současně určují směry asymptot m a n, se zobrazí do bodů M' a N' kružnice $\mathcal{K}$ na protiúběžnici v'. Poznamenejme, že body M' a N' obecně na hyperbole $\mathcal{H}_1$ neleží, přestože v obr. 13 se může zdát, že jimi hyperbola prochází.

Tímto jsme nastínili způsob konstrukce společných tečen dvou kuželoseček. Teoreticky umíme tuto úlohu vyřešit pro všechna možná zadání dvou kuželoseček, prakticky jsme limitováni skutečností, že program GeoGebra neumí přesně sestrojit průsečíky Pascalovy závitnice s kružnicí. V každém případě považuji za zajímavé, jak se spojily tři zdánlivě nesouvisející pojmy – tečna kuželosečky, Pascalova závitnice a kolineace – do jednoho celku, což nám umožnilo najít řešení tohoto dosti obtížného problému.



Obr. 13: Kolineární transformace hyperboly do kružnice

Literatura

[1] Borecká, K., et al. (2002). *Konstruktivní geometrie.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o.

[2] Havlíček, K. (1956). *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.* Praha: SNTL.

[3] Jarešová, M. & Volf, I. (2012). *Matematika křivek.* Dostupné z `http://www.fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf`

[4] Pomykalová, E. (2012). *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Praha: Prometheus, s.r.o.

[5] Rádl, P. (2000). *Konstruktivní geometrie.* Brno: MZLU.

[6] Urban, A. (1965). *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL.

Abstract

The subject of this article is a construction of common tangents of two conic sections. At first we mention three different terms, which are the collineation, Pascal's diestock and a tangent of a conic section. Then using their properties we put these terms together to find common tangents of two ellipses. Finally we expand the ideas used for two ellipses to find common tangents in other possible assignments of two conic sections.

Alice Králová
Ústav matematiky LDF Mendelovy univerzity v Brně
Zemědělská 3
613 00 Brno
e-mail: alice.kralova@mendelu.cz