

Rozhledy matematicko-fyzikální

František Jáchim

Johannes Kepler – hledač harmonie světa

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 1, 25–36

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148881>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2021

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Johannes Kepler – hledač harmonie světa

František Jáchim, Základní škola Dukelská, Strakonice

Abstrakt. On the occasion of the 400th anniversary of the publication of Kepler's book *Harmonices mundi*, we show Kepler's motivation to search for the interrelation between the motion of planets and geometry of their orbits. Briefly described the Kepler's cosmological model is created by inserting Platonic solids into the space between the spheres of planetary orbits. Kepler's laws were based essentially on Tycho Brahe's observations of Mars. At the end of the article, some examples of using the 3rd Kepler's law for calculations are given.



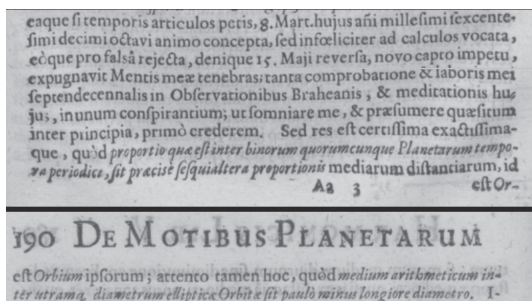
Obr. 1: Podobizna J. Keplera od neznámého autora z roku 1611

Roku 1619 vyšlo v Linci dílo *Harmonices mundi libri V (Pět knih o harmonii světa¹⁾*), jehož autorem je Johannes Kepler (1571–1630), astronom a matematik, který působil dvanáct let v Praze poblíž dvora císaře Rudolfa II. A po dobu asi jednoho roku také blízký spolupracovník neméně známé osobnosti Tychona Brahe. Kdesi uprostřed textu právě zmíněného díla, na stranách 189 a 190 páté knihy, je tato věta (obr. 2):

(i) *Sed res est certissima exactissimaque, quòd proportio quae est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit praecisè sesquialtera proportionis mediarum distantiarum, id est Orbium ipsorum; . . .*

¹⁾ Obvykle se název díla překládá *Harmonie světa*, čemuž gramaticky odpovídá nominativ *Harmonice mundi*.

(i) *Je ale absolutně jisté a exaktní, že poměr, který existuje mezi periodami oběhu kterýchkoli dvou planet, je přesně poměrem třípolovinových mocnin jejich středních vzdáleností, tj. sfér samotných; . . .*



Obr. 2: Text v knize *Harmonices mundi libri V*

Umocníme-li právě zmíněný vztah na druhou, dostaneme dnešní formulaci 3. Keplerova zákona:

Druhé mocniny dob oběhu planet jsou ve stejném poměru jako třetí mocniny jejich hlavních poloos.

V předchozích řádcích čteme vysvětlení, jak Kepler k tomuto vztahu došel:

8. března tohoto roku 1618, přeje-li si někdo přesný údaj času, se tento poměr vynořil v mé mysli. Neměl jsem však štěstí, když jsem jej ověřoval výpočtem, takže jsem jej zavrhl jako chybný. Konečně se však dne 15. května opět vrátil a v novém náporu přemohl temnoty mého ducha. Vyplýnul přitom tak dokonalý souhlas mezi mou sedmnáctiletou prací nad Brahovými pozorováními a mou současnou úvahou, že jsem se zprvu domníval, že jsem snil a že jsem hledaný vztah vložil do výchozích předpokladů.²⁾

Rok 2018 znamenal velké vítězství pro lineckého astronoma-amatéra Ing. Ericha Meyera; podařilo se mu totiž identifikovat dům, ve kterém Kepler v době objevu třetího zákona bydlel. V korespondenci se uváděla Hofgasse, ale bez čísla. Téměř detektivním pátráním v Keplerových poznámkách a korespondenci vyhledal záznamy o pozorováních zatmění

²⁾<https://www.physics.muni.cz/astrohistorie/node10.html>; 2020-12-01.

Měsíce.³⁾ Rozhodující bylo zatmění 26. 8. 1616, kdy Měsíc krátce po maximu zatmění zašel za budovu hradu a konec zatmění již Kepler nemohl pozorovat, jak sám píše. Erich Meyer spočítal, že takto mohl Kepler vidět průběh zatmění jen z domu v Hofgasse 7, nejspíš ze třetího patra; jiné domy v ulici nevyhovovaly. Příběh pátrání pak zveřejnil slavnostně rakouský tisk a na dům byla umístěna pamětní deska připomínající objev 3. Keplerova zákona.

Věta (i), ač v textu knihy nezvýrazněná, je pozoruhodná. Je třetím zákonem doplňujícím dva předchozí zákony objevené Keplerem za jeho pražského pobytu, které zveřejnil ve spisu *Astronomia nova* z roku 1609.⁴⁾

Keplerovy zákony popisující pohyb planet (ale i jiných těles ve sluneční soustavě) dnes uvádí na několika řádkách každá středoškolská učebnice fyziky. Zde jsou:

1. Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž společném ohnisku je Slunce.
2. Obsahy ploch, které jsou opsané průvodičem planety za stejné časové úseky, jsou konstantní.
3. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin jejich hlavních poloos

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \quad (1)$$

Můžeme říci, že tyto zákony popisují eleganci dění ve sluneční soustavě, pomineme-li vzájemné rušivé gravitační působení planet.

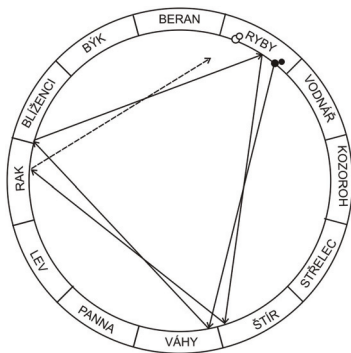
Kepler se domníval, že vesmír, jímž zde rozumějme sluneční soustavu, je harmonický, logicky uspořádaný, elegantní, a tedy krásný jak pohledem, tak činností, jako dobře sehrané soustrojí. Kepler po celý život v tuto harmonii věřil a usilovně ji hledal. Při příležitosti uplynulého 400letého výročí objevu jeho třetího zákona si tuto Keplerovu snahu znovu projdeme.

³⁾http://www.sternwarte.at/Kepler_Linz/Kepler_Linz_Hofgasse_7_EN.pdf; podrobná historie objevu, 9 stran textu od Ericha Meyera

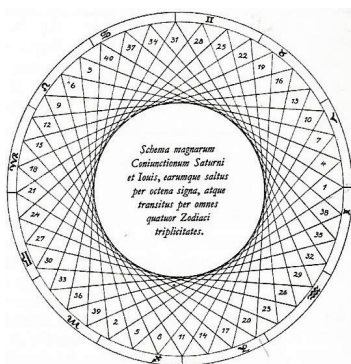
⁴⁾Kepler začal zkoumat tvar trajektorie Marsu, když se mu konečně dostaly do rukou deníky Tychoňových pozorování s polohami Marsu. Mezi lety 1602 až 1604 vyzkoušel různé druhy oválů a koncem roku 1604 vybral jako nejvhodnější elipsu. Spis *Astronomia nova* pak dokončil roku 1607, nechal ho tisknout v Heidelbergu a zveřejnil ho v Praze v roce 1609.

Tajemství vesmíru

Vše začalo zcela nenápadně u školní tabule na gymnáziu ve Štýrském Hradci, kde Kepler vyučoval studenty matematiku a astronomii. Na tabuli zakresloval do zvěrokruhu průměty několika konjunkcí Saturnu a Jupiteru. Jestliže první konjunkci zaznamenal do určitého místa, např. do znamení Ryb, druhá se zobrazila ve Štíru, třetí v Blížencích a čtvrtá opět v Rybách, ale asi o 9 stupňů posunutá ve směru zvěrokruhu (obr. 3). Zakresloval-li dále, stáčil se tento téměř uzavřený rovnostranný trojúhelník stále více, až vytvořil vzorek na obr. 4.



Obr. 3: Postup zakreslování konjunkcí Jupitera a Saturnu do zvěrokruhu. Tři po sobě jdoucí konjunkce vytvářejí téměř uzavřený rovnostranný trojúhelník



Obr. 4: Nákres řady konjunkcí Jupitera a Saturnu v Mysteriu

Zajímavé bylo i to, že poloměr zvěrokruhu k poloměru vnitřního malého kruhu byl 2 : 1, tj. přibližně stejný, jako poměr poloměrů sfér Sa-

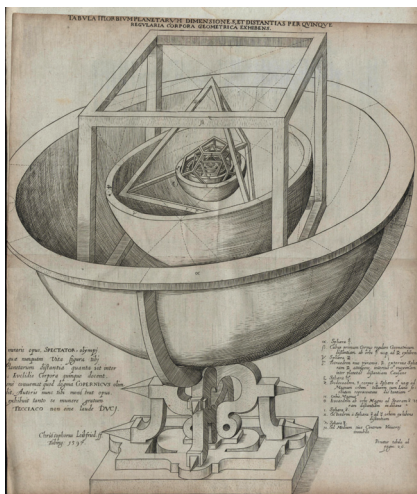
turnu a Jupiteru. Náhoda? Ale byl tu jistý motiv: Jestliže lze mezi dráhy Jupiteru a Saturnu skoro přesně vložit rovnostranný trojúhelník, nedaly by se pravidelné mnohoúhelníky vkládat i mezi sféry ostatních planet? Pravidelných mnohoúhelníků bylo k dispozici mnoho. Které však vybrat, aby poměr poloměru kružnice opsané a vepsané odpovídal právě poměru velikostí sfér dvojice planet? Planety se ovšem nepohybují v rovině, nýbrž v prostoru. Proto se nabízela myšlenka pravidelné mnohoúhelníky nahradit pravidelnými mnohostěny. Těch už nebylo hodně, nýbrž pouze pět: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn (obr. 5). Jedná se o tzv. platónská tělesa. Antičtí učenci jim přiřadili základní stavební látky světa (tzv. živly⁵⁾), dvanáctistěnu přiřadili vesmír jako celek.



Obr. 5: Pět tzv. platónských těles, jejich plášť je tvořen pravidelnými vždy stejnými mnohoúhelníky

Jelikož planet bylo v té době známo právě šest, podařila se Keplerovi unikátní sestava: Do sféry Saturnu vložil krychli tak, aby se svými vrcholy právě zevnitř Saturnovy sféry dotýkala, a naopak, aby krychle v sobě těsně uzavírala sféru Jupitera. A tak pokračoval blíž ke Slunci. Mezi sféru Jupiteru a Marsu vložil čtyřstěn, mezi Mars a Zemi dvanáctistěn, mezi Zemi a Venuší dvacetistěn a mezi Venuší a Merkur osmistěn. Sféra planety byla tedy vždy jednomu tělesu opsána a druhému vepsána. Keplerův model vesmíru je na obr. 6.

⁵⁾Zemi, vodu, vzduch a oheň.



Obr. 6: Keplerův model vesmíru

Detaily tohoto modelu vesmíru Kepler vylíčil ve spisu zkráceně nazývaném *Mysterium cosmographicum* (*Tajemství vesmíru*) vydaném v roce 1596 a znovu roku 1621.⁶⁾ Na své dílo byl pyšný, domníval se, že našel opravdové uspořádání planet se Sluncem ve středu jejich sfér a i poměry jejich vzdáleností. Pohledem dneška sice Keplerův model posuzujeme jako fantazijní, avšak jistě budeme žasnout nad relativními vzdálenostmi planet od Slunce, jak vycházely z jeho modelu – viz tabulka.

Planeta	Vzdálenost v <i>Mysteriu</i>	Vzdálenost skutečná
Merkur	0,429	0,387
Venuše	0,762	0,723
Země	1,000	1,000
Mars	1,440	1,524
Jupiter	5,261	5,202
Saturn	9,163	9,567

⁶⁾ Celý název díla je *Úvod k pojednáním o vesmíru, jenž obsahuje kosmografické tajemství obdivuhodných rozměrů nebeských sfér a skutečné a konkrétní přičiny počtu, velikosti a periodického pohybu nebes, ukázané s pomocí pěti pravidelných geometrických těles*. Někdy se uvádí rok vydání 1597 (viz obr. 6), na titulním listu však je 1596.

Knihu proto poslal dánskému astronomovi Tychonovi Brahe s očekáváním jejího ocenění. Nestalo se tak. Tycho Brahe sice Keplerovi poslal spíše zdvořilostní dopis než zhodnocení knihy, Keplerovu učitelí Michaelu Mästlinovi ale psal o knize velmi kriticky.

Keplerova teorie mnohostěňů nedokázala vysvětlit několik závěrů z pozorování. Dráha planety neměla střed ve středu Slunce, ale poněkud stranou (zdálo se, že v žádném významném bodě), také nebylo možné vysvětlit souvislost mezi vzdáleností planety a dobou jejího oběhu. Kepler se sice snažil nalézt nějaký matematický vztah mezi vzdáleností planety od Slunce a dobou oběhu,⁷⁾ ale ani tuto relaci se mu nepodařilo do modelu uspokojivě doplnit.

Nová astronomie

Koncepci *Mysteria* Tycho Brahe sice odsoudil, ale uznal, že autor je velmi schopný matematik, a tak následovala nabídka – pozvání k němu do Prahy. Od roku 1600 do jara roku 1612 působil Kepler v Praze. Ačkoli stále hledal vesmírnou harmonii, mohl se tentokrát opírat o neobyčejně přesná pozorování Tychona Brahe. Od něj také dostal první úkol pro svoji práci – pečlivě prozkoumat záznamy o pohybu Marsu, v nichž Tycho Brahe nenalézal žádnou zákonitost. Bohužel přímá spolupráce obou trvala pouze asi rok a byla ukončena Tychonovou smrtí v říjnu 1601. Problému běhu Marsu oblohou se ale Kepler věnoval celých dalších 8 let.

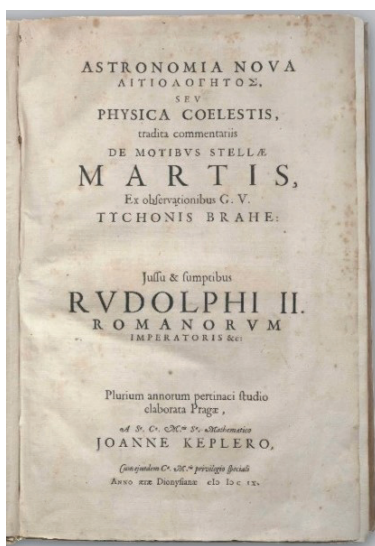
Jako první exaktní vztah odhalil souvislost rychlosti planety a její vzdálenosti od Slunce. Zjistil, že je-li planeta dále, pohybuje se pomaleji, je-li ke Slunci blíže, je její pohyb rychlejší. Dokázal nalézt matematickou formulaci tohoto jevu. Je to *zákon konstantní plošné rychlosti* (dnes uváděný jako 2. Keplerův zákon). Druhou otázkou, již se zabýval, byl tvar planetárních drah. Někdy ke konci roku 1604 problém konečně rozřešil: drahou Marsu je elipsa, v jejímž jednom ohnisku je Slunce. Tím byl objeven *zákon drah* (1. Keplerův zákon). Celá cesta k objevu prvních dvou zákonů je obsažena v Keplerově spisu *Astronomia nova (Nová astronomie)*⁸⁾, vydaném v Praze roku 1609 (obr. 7). Je to možná nejvýznamnější

⁷⁾Domníval se, že rozdíl oběžných dob dvou planet může být dvojnásobkem rozdílů jejich vzdáleností od Slunce $T_1 - T_2 = 2(a_1 - a_2)$.

⁸⁾Celý název díla je *Nová astronomie, založená na studiu příčin čili nebeská fyzika, podávaná v komentářích o pohybu planety Marsu, kterou na základě pozorování urozeného pána Tychona Brahe, z rozkazu a na náklad Rudolfa II., císaře římského etc., vypracoval za několikaletého vytrvalého studia v Praze Johannes Kepler, matematik svatého císařského veličenstva.*

FYZIKA

vědecká kniha, jaká kdy byla v Praze vydána, což bylo oceněno i vydáním poštovní známky ke čtyřsetletému jubileu (obr. 8).



Obr. 7: Titulní list knihy *Astronomia nova*, popisující cestu k nalezení tvaru dráhy Marsu



Obr. 8: Známká České pošty k Mezinárodnímu roku astronomie 2009

Zdálo se, že harmonie a elegance v pohybu planet byla nalezena a že Kepler mohl být šťastný. Ovšem vědecký úspěch je jen jednou stranou mince života. Od roku 1610 byla jeho manželka Barbara těžce nemocná a rok nato zemřela. Tři jejich děti dostaly neštovice, zemřel šestiletý syn Friedrich. Také společenské klima se v Praze výrazně změnilo. Rudolf II. byl zbaven moci po pozvání pasovského vojska do Prahy, které zde zanechalo nerasmazatelné stopy násilí a drancování. V lednu 1612 Rudolf II. zemřel a krátce nato i Martin Bacháček, rektor pražské univer-

zity a Keplerův přítel. Kepler tak ztratil část rodiny, ochránce i přátele a k Praze jej již nic nepoutalo. Po neúspěšné snaze dostat se na univerzitu do Tübingenu se Kepler se zbytkem rodiny odebral do Lince. Zde došlo k završení jeho astronomického díla, zatímco pobyt v Praze připomíná památník před Gymnáziem Jana Keplera na Pohořelci (obr. 9).



Obr. 9: Pomník Tychona Brahe a Johennesa Keplera v Praze na Pohořelci

Harmonie světa

Kepler tušil, že musí existovat nějaká souvislost mezi rychlostmi planet v periheliu a aféliu⁹⁾ ve vztahu k jejich vzdálenostem od Slunce, a to i mezi planetami navzájem. Jak je ale uvedeno na začátku tohoto článku, třetí zákon – harmonický – vyjadřující tuto souvislost (1), objevil až po letech hledání dne 15. května roku 1618. Dílo *Harmonie světa*, vydané roku 1619 v Linci, připsal anglickému králi Jakubovi I. a vyjádřil naději, že tato harmonie nalezená ve vesmíru pomůže usmířit znesvářené církve. Paradoxně v tento čas vypukla v Evropě třicetiletá válka.

Vraťme se nyní k 3. Keplerovu zákonu. Až po objevení gravitačního zákona (roku 1687 Isaacem Newtonem) došlo k upřesnění 3. Keplerova zákona na tvar

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{M + m_1}{M + m_2}, \quad (2)$$

⁹⁾ Perihelium – bod, v němž je planeta ke Slunci nejbližší, afélium – bod, v němž je planeta od Slunce nejdále.

kde M je hmotnost centrálního tělesa (např. Slunce), m_1 a m_2 jsou hmotnosti těles (např. planet) obíhajících kolem ústředního tělesa. V případě planet a Slunce platí, že $m_1, m_2 \ll M$, a vztah (2) přechází s dostatečnou přesností ve vztah (1). Vztah (1) můžeme také zapsat v dalším tvaru, a vyjádřit tak podíl druhé mocniny oběžných dob dvou planety a třetích mocnin jejich hlavních poloos. Zobecnění pro pohyb více těles kolem Slunce lze psát jako

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \dots = \text{konst.} \quad (3)$$

S užitím gravitačního zákona a jednotek SI lze tuto konstantu zapsat ve tvaru

$$\frac{4\pi^2}{GM},$$

kde $M \doteq 1,98 \cdot 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce a $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³·s⁻²·kg⁻¹ gravitační konstanta. Hodnota konstanty ve vztahu (3) v jednotkách SI je pak $2,99 \cdot 10^{-19}$ m⁻³·s².

Pro čtenáře bude ale jistě zajímavější vypočítat poměry T^2/a^3 pro planety sluneční soustavy, užijeme-li jednotkové údaje pro Zemi ($a = 1$ AU, $T = 1$ rok). Pohlédneme-li do následující tabulky, vidíme, že hodnota této konstanty je s dosti velkou přesností pro všechny planety číselně rovna jedné.

Planeta	T [roky]	a [AU]	T^2/a^3
Merkur	0,241	0,387	1,002
Venuše	0,615	0,723	1,001
Země	1,000	1,000	1,000
Mars	1,888	1,524	1,007
Jupiter	11,862	5,203	0,999
Saturn	29,458	9,540	0,999
Uran	84,011	19,180	1,000
Neptun	164,790	30,060	1,000

Několik výpočtů

Hlavní poloosa planetky Ceres

Když ředitel hvězdárny v Palermu Giuseppe Piazzi (1746–1826) pracoval na svém katalogu hvězd,¹⁰⁾ navečer dne 1. ledna 1801 zaznamenal těleso osmé hvězdné velikosti, které do následující noci změnilo svou polohu. Jak se ukázalo později, nebylo ani kometou ani planetou. Těleso bylo označeno jako planetka a dostalo název Ceres. Pokud budeme chtít znát, v jaké vzdálenosti od Slunce se první objevená planetka pohybuje, s užitím 3. Keplerova zákona a znalostí doby oběhu Země a hlavní poloosy její dráhy, můžeme při znalosti oběžné doby Cerery ($T_c = 4,6$ roku) vypočítat hlavní poloosu její dráhy. Jako druhé těleso do 3. Keplerova zákona použijeme údaje pro Zemi ($T_z = 1$ rok, $a_z = 1$ AU):

$$\frac{T_c^2}{T_z^2} = \frac{a_c^3}{a_z^3},$$

z čehož po úpravě získáme

$$a_c = \sqrt[3]{\frac{T_c^2}{T_z^2}} \cdot a_z = \sqrt[3]{\frac{4,6^2}{1^2}} \cdot 1 \text{ AU} = 2,77 \text{ AU}.$$

Planetka Ceres obíhá po elipse s hlavní poloosou 2,77 AU.

Vzdálenost geostacionární družice

Podle stejného zákona lze např. také odhadnout, v jaké vzdálenosti nad povrchem Země obíhá geostacionární družice (zdánlivě „visící“ nad stejným místem zemského povrchu). Označíme-li oběžnou dobu družice $T_d = 1$ den,¹¹⁾ oběžnou dobu Měsíce $T_m = 27,32$ dnů, střední vzdálenost Měsíce od Země $a_m = 384\,000$ km, pak pro vzdálenost družice od středu Země platí (úpravou vztahu (1))

$$a_d = \sqrt[3]{\frac{T_d^2}{T_m^2}} \cdot a_m = \sqrt[3]{\frac{1^2}{27,32^2}} \cdot 384\,000 \text{ km} \doteq 42\,300 \text{ km}.$$

Družice bude ve výšce asi 36 000 km nad povrchem Země ($r = 6\,378$ km).

¹⁰⁾ Oba jím sestavené katalogy obsahovaly celkem 15 000 hvězd.

¹¹⁾ Ve skutečnosti se porovnávají siderické oběžné doby, počítané vzhledem ke hvězdám (z latinského sidus = hvězda). U geostacionární družice Země tato doba trvá zaokrouhleně 23 hodin 56 minut, tj. 1 hvězdný den; odpovídá otočce Země o 360°. Diference 4 minut je však v tomto přibližném výpočtu zanedbatelná.

Hmotnost Marsu

Na závěr si na příkladu Marsu ukažeme, jak lze vypočítat hmotnost některé z planet, u níž budeme znát dobu oběhu a vzdálenost některého jejího měsíce.

Označme a_m velkou poloosu Měsíce a T_m jeho oběžnou dobu, a_d velkou poloosu Marsova měsíce Deimos a T_d jeho oběžnou dobu, M_z hmotnost Země a M_m neznámou hmotnost Marsu. Zde musíme využít vztah (2), neboť centrální tělesa jsou v tomto případě různá (Země pro Měsíc, Mars pro Deimos). Proto z 3. Keplerova zákona pro tuto úlohu plyne

$$\frac{a_d^3}{a_m^3} = \frac{T_d^2}{T_m^2} \cdot \frac{M_m + m_d}{M_z + m_m}.$$

Jelikož hmotnosti měsíců vzhledem k hmotnosti jejich centrálních těles můžeme zanedbat, lze pro výpočet vycházet z upraveného vztahu

$$\frac{a_d^3}{a_m^3} = \frac{T_d^2}{T_m^2} \cdot \frac{M_m}{M_z},$$

který pro hmotnost Marsu dává

$$M_m = \frac{a_d^3}{a_m^3} \cdot \frac{T_m^2}{T_d^2} \cdot M_z$$

a po dosazení $a_m = 384 \cdot 10^3$ km, $a_d = 23,5 \cdot 10^3$ km, $T_m = 27,3$ dnů, $T_d = 1,26$ dnů dostáváme

$$M_m = \left(\frac{23,5 \cdot 10^3}{384 \cdot 10^3} \right)^3 \cdot \left(\frac{27,3}{1,26} \right)^2 \cdot M_z \doteq 0,107 M_z.$$

Hmotnost Marsu je tedy přibližně desetinou hmotnosti Země.

Literatura

- [1] Fergusonová, K.: *Tycho a Kepler*. Academia, Praha, 2009.
- [2] Dittrich, A.: Jak Kepler objevil své zákony. *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, roč. 42 (1913), č. 2, s. 237–240.
- [3] Zajac, R., Šebesta, J.: *Historické pramene súčasnej fyziky I*. Alfa, Bratislava, 1990.
- [4] Šolcová, A.: *Johannes Kepler*. Prometheus, Praha, 2004.