Rozhledy matematicko-fyzikální

Vlastimil Dlab

Řada trojúhelníků

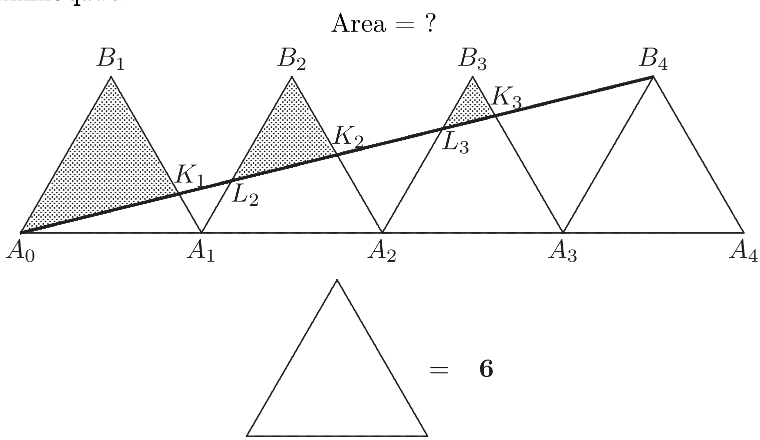
Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 96 (2021), No. 1, 18–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148879

Řada trojúhelníků

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

Nedávno mne jeden z mých přátel upozornil na zajímavý matematický problém *Triangles In a Row* zadaný na YouTube `https://youtu.be/m0xnEn9qWwo`:



Obr. 1: Triangles In a Row

Úkolem je nalézt součet obsahů označených trojúhelníků $A_0K_1B_1$, $L_2K_2B_2$ a $L_3K_3B_3$ za předpokladu, že každý z rovnostranných trojúhelníků $A_tA_{t+1}B_{t+1}$, $t = 0, 1, 2, 3$, má obsah 6.

Ve videu autor podává řešení, to je ale k mému zklamání založeno na naučeném vzorečku. Takový přístup zastínil podstatu problému a zakryl zásadní fakt, že strany a úhly trojúhelníků nehrají v úloze žádnou roli.

Vysvětleme znovu nepřiměřené užívání nabiflovaných vzorců na tomto extrémním příkladu: Úkolem je určit obsah S trojúhelníku, jehož strany jsou $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$. Bez jakéhokoliv uvažování, naučený Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2},$$

dává výsledek $S = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30$. Když si ale všimneme, že jde o pravoúhlý trojúhelník, vyhneme se několika výpočtům, protože obsah pravoúhlého trojúhelníku se rovná polovině součinu jeho odvěsen, tedy $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Připomeňme, že tento trojúhelník patří mezi (pravoúhlé) trojúhelníky splňující rovnosti $c - b = 1$ a $c + b = c^2 - b^2 = a^2$. Ty tvoří posloupnost trojúhelníků o stranách

$$a = 2k + 1,\ b = 2k(k + 1),\ c = 2k(k + 1) + 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, \ldots$$

Dalším příkladem může být užití kosinové věty k důkazu rovnosti $u^2 + v^2 = 2(a^2 + b^2)$ mezi úhlopříčkami u, v a stranami a a b rovnoběžníku. Ušetříme si spoustu práce, když k důkazu použijeme Pythagorovu větu (viz článek [1] a reakci [4]).

Nyní se vraťme k naší úloze týkající se součtu obsahů řady trojúhelníků. Rozřešíme ji v plné obecnosti, přičemž zdůrazníme důležitou úlohu pojmu podobnosti trojúhelníků. Výsledek formulujme takto:

Věta. *Uvažujme posloupnost n libovolných shodných trojúhelníků*

$$\Delta_t = A_t A_{t+1} B_{t+1},\ t = 0, 1, \ldots, n - 1 \ \textit{(viz obr. 2).}$$

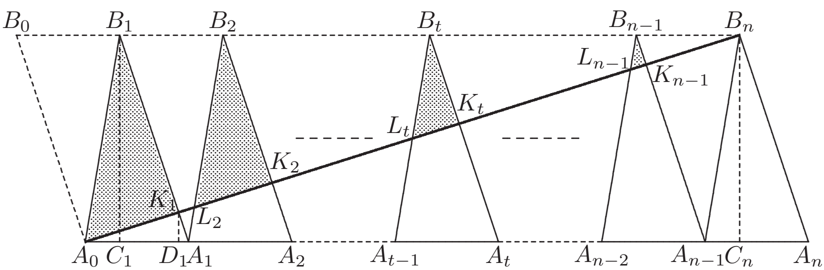
Označme obsah trojúhelníku Δ_t písmenem S. Úsečka $A_0 B_n$ definuje $n-1$ podobných trojúhelníků

$$\Omega_k = L_k K_k B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1,\ \textit{kde } L_1 := A_0.$$

Součet obsahů těchto $n - 1$ trojúhelníků je

$$\frac{2n - 1}{6}\, S.$$

Zvolíme-li tedy $n = 4$ a $S = 6$, součet obsahů je 7.



Obr. 2: Součet obsahů $n - 1$ vyznačených trojúhelníků

Důkaz věty je zcela jednoduchý. Využívá podobnosti trojúhelníků $L_tB_nB_t$ pro $t = 1, 2, \ldots, n-1$. Jelikož $A_0A_1 = B_tB_{t+1}$ pro všechna $t = 0, 1, \ldots, n-1$, koeficient této podobnosti je

$$\frac{L_tB_t}{A_0B_1} = \frac{B_tB_n}{B_1B_n} = \frac{n-t}{n-1}.$$

Označíme-li tedy S_1 obsah trojúhelníku Ω_1, je obsah S_t trojúhelníku Ω_t pro $t = 2, 3, \ldots, n-1$ roven

$$S_t = \left(\frac{n-t}{n-1}\right)^2 S_1.$$

Hledaný součet obsahů všech trojúhelníků Ω_t se proto rovná součtu

$$\frac{S_1}{(n-1)^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right). \qquad (*)$$

Čekají nás tedy dva úkoly: Určit S_1 a sečíst $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$.

Obsah S_1 je rozdílem obsahu S trojúhelníku $A_0A_1B_1$ a obsahu trojúhelníku $A_0A_1K_1$. Výšku K_1D_1 tohoto trojúhelníku určíme opět užitím podobnosti trojúhelníků, tentokrát $A_0A_1K_1$ a $A_0A_nB_n$, jejíž koeficient je $\frac{1}{n}$. Proto

$$K_1D_1 = \frac{1}{n}B_nC_n = \frac{v}{n},$$

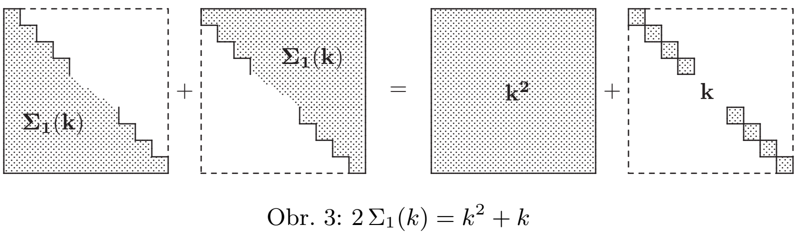
kde $v = B_1C_1$ je výška trojúhelníku $A_0A_1B_1$. Obsah S_1 nyní určíme snadno:

$$S_1 = S - \frac{1}{2}A_0A_1\frac{v}{n} = S - \frac{1}{n}S = \frac{n-1}{n}S.$$

Zbývá sečíst druhé mocniny prvních $n-1$ přirozených čísel

$$\Sigma_2(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2.$$

Součet $\Sigma_1(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$ prvních k přirozených čísel určíme snadno, třeba sestřihem $k \times k$ čtverců, jak ukazuje obr. 3.



Obr. 3: $2\,\Sigma_1(k) = k^2 + k$

Je tedy $\Sigma_1(k) = \frac{1}{2}k(k+1)$. Tohoto poznatku nyní využijeme k výpočtu součtu $\Sigma_2(k)$. Rozepišme

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = 1 + (1+1)^3 + (2+1)^3 + \cdots + (k+1)^3 =$$
$$1 + \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3\right) + 3\Sigma_2(k) + 3\Sigma_1(k) + k,$$

odkud dostáváme

$$(k+1)^3 = 1 + 3\,\Sigma_2(k) + 3\,\Sigma_1(k) + k,$$

a tedy

$$3\,\Sigma_2(k) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 1 - \frac{3k(k+1)}{2} - k,$$

tj.

$$\Sigma_2(k) = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Poznamenejme, že tohoto výsledku dosáhneme zcela obecným způsobem, jak to učinil před tisíci lety matematik-fyzik Ibn al-Haytham (965–1040), známý Alhazen, pomocí schématu, které nalezneme např. v učebnici [3] na str. 73. Zde je nutné podotknout, že součty mocnin přirozených čísel mají své místo v teorii aritmetických posloupností vyšších řádů (viz [2] či [3]).

Nyní už můžeme dokončit důkaz věty. Prostě dosadíme do rovnosti $(*)$

$$S_1 = \frac{n-1}{n}S \quad \text{a} \quad \Sigma_2(n-1) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

a dostáváme součet obsahů označených trojúhelníků Ω_t:

$$\frac{(n-1)S}{n(n-1)^2}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{2n-1}{6}\,S.$$

Poděkování. Děkuji recenzentovi za konečné úpravy textu.

Literatura

[1] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. *Učitel matematiky*, roč. 71 (2009), s. 169–182.

[2] Dlab, V.: Arithmetic progressions of higher order. *Teaching Math. Comp. Science*, roč. 9 (2011), č. 2, s. 225–239.

[3] Bečvář, J.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* Serifa, Praha, 2016.

[4] Kuřina, F.: Chvála „biflování“. *Učitel matematiky* roč. 73 (2009), s. 49–52.