Veronika Havelková; A. Jančařík; Tomáš Kepka

Aritmetika II – dělitelnost. Fibonacciho posloupnost

Učitel matematiky, Vol. 29 (2021), No. 1, 37–45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148844

ARITMETIKA II – DĚLITELNOST FIBONACCIHO POSLOUPNOSTI

Veronika Havelková, Antonín Jančařík, Tomáš Kepka

Úvod

Fibonacciho posloupnost je velmi známým matematickým objektem, který je spojován se jménem Leonarda Pisánského, známého také jako Fibonacci. Výhodou posloupnosti je to, že může být zavedena způsobem, který je přístupný i mladším školním žákům, a to pomocí počtu králíků v populaci (Gravett, 2009):

Číslo $F(n)$ popisuje velikost populace po n měsících, pokud předpokládáme, že

- první měsíc se narodí jediný pár,
- nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života,
- každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár,
- králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.

Fibonacciho posloupnost začíná takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Jedná se o rostoucí posloupnost, kde je každý člen definován jako součet předchozích dvou

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n).$$

Takto definovaná posloupnost má celou řadu zajímavých vlastností, se kterými lze obohatit výuku matematiky (Křížek et al., 2005). I v tomto časopise vyšly články, které se tomuto tématu věnují (Seibert, 2018; Jarošová, 2008). Naším cílem je navázat především na druhý zmiňovaný článek (Jarošová, 2008). V tomto textu se snažíme rozvinout a doplnit o důkazy především tvrzení ze zmiňovaného článku z části věnované Fibonacciho posloupnosti a dělitelnosti. U každé z vlastností uvádíme i způsob, jak příslušnou vlastnost, převážně s využitím jen elementárních matematických nástrojů, dokázat. Potvrzuje se tak, že Fibonacciho posloupnost nám poskytuje celou řadu úloh, které mohou sloužit jak k procvičení vlastností dělitelnosti přirozených čísel, tak důkazových technik, především důkazu matematickou indukcí.

Postupy, které zde budeme demonstrovat, se dají samozřejmě v přiměřené míře aplikovat na mnohem širší skupinu posloupností, ve kterých je následující člen definován pomocí předchozích dvou členů. Speciálním případem takových posloupností jsou zobecněné Fibonacciho posloupnosti (Yayenie, 2011).

Fibonacciho posloupnost a dělitelnost

Nyní přistoupíme k představení vlastností členů Fibonacciho posloupnosti. Pokud se podíváme na první členy posloupnosti, zjistíme, že zde převažují lichá čísla nad sudými. Sudý je na počátku posloupnosti jen třetí, šestý, devátý a dvanáctý člen. To nás vede k domněnce, že sudý bude každý třetí člen. Dokázat toto tvrzení není náročné.

Tvrzení 1. Člen $F(n)$ je sudý právě tehdy, když 3 dělí n.

Důkaz. Tvrzení zjevně platí pro $n < 13$. Obecně použijeme indukci podle $n > 3$.

Platí, že $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$.

Jestliže 3 dělí n, jsou čísla $F(n-1)$ a $F(n-2)$ lichá podle indukčního předpokladu a číslo $F(n)$ je součtem dvou lichých čísel a tudíž sudé.

Naopak pokud 3 nedělí n, tak právě jedno z čísel $n-1$ a $n-2$ je dělitelné třemi a podle indukčního předpokladu je jedno z čísel $F(n-1)$ a $F(n-2)$ liché a druhé sudé. Číslo $F(n)$ je tedy součtem sudého a lichého čísla, a proto je liché. □

U prvních členů Fibonacciho posloupnosti můžeme také vypozorovat, že žádná z dvojic po sobě jdoucích členů nemá společného dělitele většího než 1. I toto tvrzení lze snadno dokázat obecně.

Tvrzení 2. $NSD(F(n), F(n+1)) = 1$ pro každé $n > 0$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé pro $n < 12$. Obecně budeme opět postupovat indukcí a to pro $n > 1$. Buď $r = NSD(F(n), F(n+1))$. Dle indukčního předpokladu je $NSD(F(n-1), F(n)) = 1$. Na druhou stranu ale r dělí jak $F(n)$, tak i $F(n+1)$. Proto musí dělit i číslo $F(n+1) - F(n) = F(n-1)$. Proto r dělí i $NSD(F(n), F(n - - 1)) = 1$, a tudíž $r = 1$. □

Z důkazu předchozího tvrzení snadno vyplývá následující pozorování.

Tvrzení 3. Pro každou trojici po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti platí, že čísla v ní obsažená jsou nesoudělná.

Důkaz. Mějme tři členy Fibonacciho posloupnosti $F(n)$, $F(n+1)$ a $F(n+2)$. Na základě Tvrzení 2 víme, že čísla $F(n)$ a $F(n+1)$ jsou nesoudělná a stejně tak i $F(n+1)$ a $F(n+2)$. Zbývá tedy dokázat, že i čísla $F(n)$ a $F(n+2)$ jsou nesoudělná.

Víme, že $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ a $F(n+1) = F(n+2) - - F(n)$. Je-li $r = NSD(F(n+2), F(n))$, pak r dělí nejen $F(n+2)$ a $F(n)$, ale i jejich rozdíl $F(n+1)$, a tudíž i $NSD(F(n), F(n + + 1)) = r$. Tedy $r = 1$. □

I toto tvrzení bylo dokázáno pouze na základě základních vlastností dělitelnosti a definice Fibonacciho posloupnosti. V podobných úvahách můžeme pokračovat i dále. Bude však nutné do tvrzení zahrnout i některé výjimky.

Pokud budeme uvažovat o čtyřech po sobě jdoucích členech Fibonacciho posloupnosti, může nastat případ, kdy dva z těchto členů budou sudé, a tudíž i soudělné. Tato situace nastává pro členy $F(n)$, $F(n+1)$, $F(n+2)$ a $F(n+3)$ v případě, že 3 dělí n. Ve všech ostatních případech jsou čísla $F(n)$, $F(n+1)$, $F(n+2)$ a $F(n+3)$ po dvou nesoudělná.

Tvrzení 4. Pokud 3 nedělí n, jsou čísla $F(n)$, $F(n+1)$, $F(n+2)$ a $F(n+3)$ po dvou nesoudělná.

Důkaz. Dle Tvrzení 3 víme, že čísla $F(n)$, $F(n+1)$ a $F(n+2)$ jsou po dvou nesoudělná a také čísla $F(n+1)$, $F(n+2)$ a $F(n+3)$ jsou po dvou nesoudělná. Stačí ověřit, že $NSD(F(n), F(n+3)) = 1$. Ovšem platí $F(n+3) = F(n+2) + F(n+1) = 2F(n+1) + F(n)$. $NSD(F(n+3), F(n)) = NSD(2F(n+1)+F(n), F(n)) = NSD(2F(n+1), F(n))$, tedy $NSD(F(n+3), F(n)) = 1$ nebo 2. Protože však $F(n)$ je liché, jsou čísla $F(n)$ a $F(n+3)$ nesoudělná. □

V Tvrzení 1 jsme se zabývali otázkou, které členy Fibonacciho posloupnosti jsou sudé. Můžeme si však položit i otázku, které ze členů posloupnosti jsou násobky tří. U prvních členů posloupnosti zjišťujeme, že se jedná o členy 4, 8, 12. I toto pozorování lze zobecnit.

Tvrzení 5. Člen $F(n)$ je dělitelný třemi právě tehdy, když 4 dělí n.

Důkaz. Je zřejmé, že tvrzení platí pro $n < 13$. Dále zjišťujeme, že $F(n+4) = F(n+3) + F(n+2) = \dots = 3F(n+1) + 2F(n)$. A tedy $F(n+4)$ je dělitelné třemi právě tehdy, když $F(n)$ je dělitelné třemi. Důkaz lze snadno dokončit pomocí indukce. □

Nyní se vraťme k našim pozorováním. Pokud máme pětici po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti $F(n)$, $F(n+1)$, $F(n+2)$, $F(n+3)$ a $F(n+4)$, obsahuje podle Tvrzení 1 dvě sudá čísla právě tehdy, když 3 nedělí $F(n+2)$. Tato posloupnost obsahuje dle Tvrzení 5 dvě čísla dělitelná třemi, pokud 4 dělí n. Ve všech ostatních případech jsou čísla v této pětici po dvou nesoudělná.

Tvrzení 6. Nechť $F(n)$, $F(n+1)$, $F(n+2)$, $F(n+3)$ a $F(n+4)$ je pět po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti. Těchto pět čísel je po dvou nesoudělných právě tehdy, když 3 dělí $n+2$ a 4 nedělí n.

Důkaz. Jedna implikace je zřejmá.

Předpokládejme tedy, že 3 dělí $n+2$ a 4 nedělí n. Podle Tvrzení 4 jsou čtveřice čísel $F(n)$, $F(n+1)$, $F(n+2)$ a $F(n+3)$ a $F(n+1)$, $F(n+2)$, $F(n+3)$ a $F(n+4)$ po dvou nesoudělné. Zbývá dokázat, že jsou také nesoudělná čísla $F(n)$ a $F(n+4)$. Pokud existuje takové prvočíslo p, které dělí $F(n+4)$ i $F(n)$, tak ze vztahu $F(n+4) = 3F(n+1) + 2F(n)$ vyplývá, že p musí dělit i $3F(n+1)$. Protože však 4 nedělí n, tak 3 nedělí $F(n)$ a musí platit, že p dělí $F(n+1)$. To je však ve sporu s pozorováním, že $NSD(F(n), F(n+1)) = 1$. Žádné takové prvočíslo p tedy neexistuje a $NSD(F(n), F(n+4)) = 1$. □

Pokračovati v úvahách tímto směrem již nemá smysl, protože v posloupnosti šesti a více členů Fibonacciho posloupnosti již dle Tvrzení 1 jistě nalezneme minimálně dvě sudá čísla, a tudíž nemůže nastat případ, že by tato čísla byla po dvou nesoudělná.

Ukážeme si ale jinou důležitou vlastnost Fibonacciho posloupnosti. Jedná se o pomocné tvrzení, které budeme v dalším textu využívat při důkazu, že Fibonacciho posloupnost je dělitelnostní a silně dělitelnostní. Opět se jedná o tvrzení, ve kterém v rámci důkazu matematickou indukcí využíváme pouze rekurzivní definici členů Fibonacciho posloupnosti. I přes svoji stručnost se jedná o důkaz technicky náročnější než u předchozích pozorování.

Tvrzení 7. $F(n+m+1) = F(n+1)F(m+1) + F(n)F(m)$ pro všechna $n, m > 0$.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí přes m. Pro $m = 1$ dostáváme základní formuli Fibonacciho posloupnosti $F(n+2) = F(n+1)F(2) + F(n)F(1) = F(n+1) + F(n)$.

Pro $m = 2$ dostáváme $F(n+3) = F(n+1)F(3) + F(n)F(2) = 2F(n+1) + F(n) = F(n+2) + F(n+1)$.

Vidíme tedy, že vztah platí pro $m = 1$ a $m = 2$. Předpokládejme tedy, že $m > 2$ a postupujme indukcí.

$F(n+m+1) = F(n+m) + F(n+m–1)$. Podle indukčního předpokladu platí: $F(n+m) = F(n+1)F(m) + F(n)F(m–1)$ a $F(n+m–1) = F(n+1)F(m–1) + F(n)F(m–2)$.

Tedy platí:

$F(n+m+1) = F(n+m) + F(n+m–1) = F(n+1)F(m) + F(n)F(m–1) + F(n+1)F(m–1) + F(n)F(m–2) = F(n+1)(F(m) + F(m–1)) + F(n)(F(m–1) + F(m–2)) = F(n+1)F(m+1) + F(n)F(m)$. □

Položíme-li $n = m$, dostáváme vztah $F(2n+1) = F(n+1)^2 + F(n)^2$.

Zvolíme-li $m = n - 1$, obdržíme po jednoduchých úpravách rovnost $F(2n) = F(n)(F(n) + 2F(n-1))$.

Dělitelnostní a silně dělitelnostní posloupnosti

Nyní si ukážeme dvě zajímavé vlastnosti Fibonacciho posloupnosti, tedy že Fibonacciho posloupnost je dělitelnostní i silně dělitelností. Nejprve zavedeme pojem dělitelnostní posloupnosti a ukážeme, že Fibonacciho posloupnost je posloupností dělitelnostní.

Dělitelnostní posloupností nazveme takovou posloupnost $a(n)$, ve které pro každé n, m přirozené platí následující tvrzení. Nechť n dělí m, potom $a(n)$ dělí $a(m)$.

Pojem dělitelnostní posloupnosti se poprvé objevuje ve 30. letech 20. století (Hall, 1936; Ward, 1937). Úplná charakteristika dělitelnostních posloupností byla nalezena až koncem 20. století (Bézivin et al., 1990). Příkladem dělitelnostní posloupnosti jsou konstantní posloupnost či posloupnost Mersenneových čísel.

Věta 1. Fibonacciho posloupnost je dělitelnostní.

Důkaz. Nechť n dělí m. Musíme ověřit, že $F(n)$ dělí $F(m)$. Je-li $m = 1, 2$, je tvrzení zřejmé.

Je-li $n = m$, je tvrzení také triviální. Zbývá tedy vyšetřit případ, kdy $m > n > 0$ a n dělí m.

Nechť $m = tn$ a budeme postupovat indukcí podle t. V důkazu využijeme formuli z Tvrzení 7.

Víme, že $F(m) = F(tn) = F((n-1) + t(n-1) + 1) = $ $= F(n)F((t-1)(n+1)) + F(n-1)F((t-1)n)$. Z indukčního předpokladu ale víme, že $F(n)$ dělí $F(t-1)n$. Tedy $F(n)$ dělí $F(m)$. $\square$

Předchozí věta (a definice dělitelnostní posloupnosti) je vyslovena ve formě implikace. Pokud n dělí m, tak i $F(n)$ dělí $F(m)$. Je zřejmé, že opačná implikace neplatí, protože $F(2)$ dělí $F(3)$, ale 3 není sudé číslo. Nicméně pokud tento případ vynecháme, můžeme implikaci obrátit.

Věta 2. Pro všechna n, m přirozená, n různé od 2 platí: jestliže $F(n)$ dělí $F(m)$, pak n dělí m.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé pro $n = 1$ a pro $n = m$. Musíme tedy tvrzení dokázat pro $n > 2$ a $m > n$.

Budeme postupovat indukcí dle $t = m - n$.

Pro $t = 1$ nemůže případ $F(n)$ dělí $F(m)$ nastat dle Tvrzení 2. Je tedy $t > 1$ a podle Tvrzení 7 můžeme psát $F(m) = F(n + t) = F(n + (t - 1) + 1) = F(n + 1)F(t) + F(n)F(t–1)$. Protože $F(n)$ dělí $F(m)$, tak také $F(n)$ dělí $F(n + 1)F(t)$. Protože $F(n)$ a $F(n+1)$ jsou nesoudělná, tak také $F(n)$ dělí $F(t)$. Současně ale víme, že $t < m$, a tudíž $t - n < m - n$, a lze tedy použít indukční předpoklad. Zjišťujeme, že n dělí t, a tudíž n dělí i $m = n + t$. □

Dostáváme se tak k poslednímu tvrzení, které jsme slíbili v tomto článku dokázati.

Posloupnost $a(n)$ nazveme silně dělitelností, pokud pro všechna n, m přirozená platí $NSD(a(n), a(m)) = a(NSD(n, m))$.

Věta 3. Fibonacciho posloupnost je silně dělitelnostní.

Důkaz. Musíme dokázat, že $NSD(F(n),F(m)) = F(NSD(n,m))$.

Je zjevné, že tato rovnost platí pro $n = 1, 2$ i $m = 1, 2$. Také zjevně nastává pro $n = m$. Vzhledem k symetrii dané rovnosti můžeme bez újmy na obecnosti po zbytek důkazu předpokládat, že $m > n > 1$. Budeme postupovat indukcí dle $n + m$.

Máme $m = rn + s, r > 0$, $0 \leq s < n$. Je-li $s = 0$, pak n dělí m, $F(n)$ dělí $F(m)$ a $NSD(F(n), F(m)) = F(n)$ a $NSD(n, m) = n$.

Buď tedy $s > 0$. Položme $t = NSD(n, m)$ a $w = NSD(F(n), F(m))$. Jistě platí $t = NSD(n, m) = NSD(n, rn + s) = NSD(n, s)$. Podle Věty 1 $F(t)$ dělí $F(n)$ i $F(t)$ dělí $F(m)$, tedy $F(t)$ dělí také $w = NSD(F(n), F(m))$. Zbývá dokázat, že také $NSD(F(n), F(m))$ dělí $F(t)$.

Podle Tvrzení 7 platí: $F(m) = F(rn + s) = F((rn - 1) + s + 1) = F(rn)F(s + 1) + F(rn - 1)F(s)$ (jistě je $rn - 1 > 0$).

Víme, že $NSD(F(n), F(m))$ dělí $F(n)$ a $F(n)$ dělí $F(rn)$, takže $NSD(F(n), F(m))$ dělí $F(rn)$.

Víme také, že $NSD(F(n), F(m))$ dělí $F(m)$. Tedy $NSD(F(n), F(m))$ dělí i $F(rn - 1)F(s)$.

Ovšem čísla $F(rn-1)$ a $F(rn)$ jsou po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti, a tudíž nesoudělná. Takže $NSD(F(n), F(m))$ dělí $F(s)$ a nutně $NSD(F(n), F(m))$ dělí $NSD(F(n), F(s))$.

Ovšem $n+s < n+m$, a lze tedy použít indukční předpoklad $NSD(F(n), F(s)) = F(NSD(n,s)) = F(t)$, a tedy $NSD(F(n), F(m))$ dělí $F(t)$. $\square$

Závěr

Fibonacciho posloupnost vzbuzuje zájem matematiků i široké veřejnosti po celá staletí. Přes velmi jednoduché zavedení má Fibonacciho posloupnost mnoho překvapivých vlastností. Cílem článku bylo představit některé z méně známých vlastností této posloupnosti a ukázat jejich elementární důkazy ve formě, která by měla být přístupná žákům středních škol. Za překvapivý považujeme především fakt, že Fibonacciho posloupnost je silně dělitelnostní a že tuto vlastnost můžeme dokázat pomocí elementární matematiky.

Pokud vás otázka dělitelnosti ve vztahu k Fibonacciho posloupnosti zaujala, dovolujeme si vás odkázat na aktuální výzkum Y. Q. Liho (Li, 2020).

Literatura

[1] Bézivin, J., Pethö, A., & Van der Poorten, A. (1990). A full characterisation of divisibility sequences. *American Journal of Mathematics, 112*(6), 985–1001.

[2] Gravett, E. (2009). *The rabbit problem.* Macmillan Children's.

[3] Hall, M. (1936). Divisibility sequences of third order. *American Journal of Mathematics, 58*(3), 577–584.

[4] Jarošová, M. (2008). Fibonacci a jeho čísla. *Učitel matematiky, 16*(2), 51–59.

[5] Křížek, M., Luca, F., & Somer, L. (2005). Aritmetické vlastnosti Fibonacciových čísel. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 50*(2), 127–140.

[6] Li, Y. Q. (2020). *Divisibility in generalized Fibonacci sequences.* arXiv preprint arXiv:2003.06643.

[7] Seibert, J. (2018). Fibonacciova čísla jako inspirace pro učitele. *Učitel matematiky, 26*(1), 94–100.

[8] Ward, M. (1937). Linear divisibility sequences. *Transactions of the American Mathematical Society, 41*(2), 276–286.

[9] Yayenie, O. (2011). A note on generalized Fibonacci sequences. *Applied Mathematics and Computation, 217*(12), 5603–5611.

Abstract

The aim of the article is to present examples of developing pupils' arithmetic skills. Some less known properties of the Fibonacci sequence are presented. It is shown how the Fibonacci sequence can be used in the teaching of divisibility and proof techniques. It is demonstrated that the Fibonacci sequence forms not only a divisibility sequence but also a strong divisibility one.

Veronika Havelková
e-mail: havelkovaver@gmail.com
Antonín Jančařík
e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1

Tomáš Kepka
Katedra algebry
Univerzita Karlova
Matematicko-fyzikální fakulta
Sokolovská 49/83
186 00 Praha 8
e-mail: kepka@karlin.mff.cuni.cz