Učitel matematiky

Jaroslav Beránek
Vybrané problémy rekreační matematiky

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 4, 251–257

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148621

VYBRANÉ PROBLÉMY REKREAČNÍ MATEMATIKY

Jaroslav Beránek

V dnešní době se občas můžeme setkat v rekreační matematice s různými matematickými hříčkami, kouzly a problémy. Tyto problémy vypadají na pohled velmi efektně, jejich matematická podstata však obvykle nebývá složitá a snadno ji zvládnou i studenti programu učitelství pro 1. stupeň ZŠ. To může přispívat k jejich motivaci ke studiu matematiky a k rozvíjení jejich matematických znalostí. Několik takových problémů nyní ukážeme.

Hádání čísla 1. (Kuncová, 2008: s. 43)
Zvolte si tři po sobě jdoucí trojciferná čísla. Sečtěte je. Určete ciferný součet vypočteného součtu, dále určete ciferný součet předchozího ciferného součtu atd. Pokračujte tak dlouho, až obdržíte jednociferné číslo. Číslo si zapamatujte. Při pohledu na původně zvolená tři čísla vám řeknu, k jakému výsledku jste došli. Jak je to možné?

Řešení. Záleží na postavení čísla dělitelného třemi mezi třemi zvolenými po sobě jdoucími čísly. Když bude v řadě jako první, dostaneme číslo 3, když bude v řadě jako druhé, dostaneme číslo 9. Bude-li jako třetí z nich, dostaneme výsledek 6.

Ilustrace (číslo dělitelné třemi je vytištěno tučně):

$$\mathbf{612} + 613 + 614 = \mathbf{1\,839} \qquad 1 + 8 + \mathbf{3} + \mathbf{9} = \mathbf{21} \qquad 2 + 1 = \mathbf{3}$$

$$311 + \mathbf{312} + 313 = \mathbf{936} \qquad \mathbf{9} + \mathbf{3} + \mathbf{6} = \mathbf{18} \qquad 1 + 8 = \mathbf{9}$$

$$910 + 911 + \mathbf{912} = \mathbf{2\,733} \qquad 2 + 7 + \mathbf{3} + \mathbf{3} = \mathbf{15} \qquad 1 + 5 = \mathbf{6}$$

Důkaz. Číslo dělitelné třemi nechť je $a = 100x + 10y + z$. Platí $x + y + z = 3p$, kde číslo $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ podle předpokladu, že zvolená čísla jsou trojciferná. Odtud plyne $3p \in \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27\}$.

a) Nechť a je na prvním místě. Platí: $(100x + 10y + z) + (100x + 10y + z + 1) + (100x + 10y + z + 2) = 3(100x + 10y + z) + 3$. Ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je $3x + 3y + 3z = 9p$, $p \in \{1, 2, ..., 9\}$, odtud tedy $9p \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. Ciferný součet čísla $9p$ je vždy roven 9. Nyní určíme ciferný součet čísla $3(100x+10y+z)+3$. S ohledem na předchozí úvahy je roven $3x+3y+(3z+3) = 9p+3$; $9p+3 \in \{12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84\}$, ciferný součet všech těchto čísel je 3 nebo 12, výsledný ciferný součet je tedy 3.

b) Nechť a je na druhém místě. Platí: $(100x+10y+z-1)+(100x+ 10y + z) + (100x + 10y + z + 1) = 3(100x + 10y + z)$. Stejně jako v prvním případě, ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je $3x + 3y + 3z = 9p$, $p \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, tedy $9p \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$. Ciferný součet čísla $9p$ je vždy roven 9.

c) Nechť a je na třetím místě. Platí: Analogicky jako v předchozích případech, ciferný součet čísla $3(100x + 10y + z)$ je vždy roven 9; Nyní určíme ciferný součet čísla $3(100x+10y+z)-3$. Ten je roven $3x+3y+(3z-3) = 9p-3$; $9p-3 \in \{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, 78\}$, ciferný součet všech těchto čísel je 6 nebo 15, výsledný ciferný součet je tedy 6.

Hádání čísla 2. (Kuncová, 2008)
Zvolte si libovolné přirozené číslo od 1 do 9. Vynásobte toto číslo nejprve číslem 9 a součin potom ještě číslem 12 345 679 a sdělte mi výsledek; podle něj poznám číslo, které jste si mysleli.

Řešení. Je velmi jednoduché, uvedeme jej bez komentáře:

$$1 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 111\,111\,111$$
$$2 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 222\,222\,222$$
$$3 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 333\,333\,333$$
$$4 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 444\,444\,444$$
$$5 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 555\,555\,555$$
$$6 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 666\,666\,666$$
$$7 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 777\,777\,777$$

$$8 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 888\,888\,888$$
$$9 \cdot 9 \cdot 12\,345\,679 = 999\,999\,999$$

Určení zašifrovaného data. (Pereľman, 1985: s. 95)
Zvolte si libovolné datum v roce (den, měsíc). Toto datum zašifrujte takto: Číslo označující den v měsíci vynásobte číslem 12, číslo označující měsíc v roce vynásobte číslem 31. Oba součiny sečtěte. Sdělíte-li mi součet, vypočítám z něho myšlené datum.

Řešení. Označíme-li číslo dne v měsíci jako x, číslo měsíce v roce jako y a vypočtený součet jako c, vede úloha k řešení neurčité rovnice

$$12x + 31y = c,$$

kde $x, y \in \mathbb{N}, x \leq 31, y \leq 12, c \in \mathbb{N}, 43 \leq c \leq 744$. Tato rovnice je vždy řešitelná, neboť čísla 12 a 31 jsou nesoudělná. V oboru $\mathbb{N}$ vždy existuje jediné řešení $[x, y]$. Jako příklad zvolme datum 24. 4., tedy $x = 24, y = 4, c = 288 + 124 = 412$. Jediným řešením neurčité rovnice $12x + 31y = 412$ v oboru $\mathbb{N}$ je $x = 24, y = 4$.

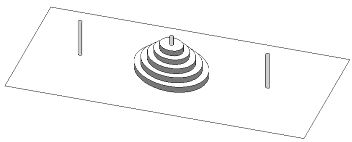
Důležité je nyní dokázat, že v oboru přirozených čísel existuje pro každé přípustné číslo c vždy jediné řešení. Postupujeme sporem. Nechť pro dané číslo c existují dvě různá řešení $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $x_1, x_2 \leq 31$, $y_1, y_2 \leq 12$. Platí tedy

$$12x_1 + 31y_1 = c,$$
$$12x_2 + 31y_2 = c.$$

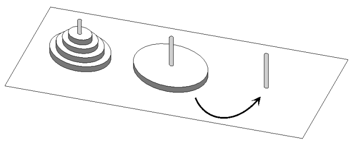
Odečteme druhou rovnici od první, dostaneme $12(x_1 - x_2) + {} + 31(y_1 - y_2) = 0$. Číslo $12(x_1 - x_2)$ musí být dělitelné číslem 31. Protože $1 \leq x_1, x_2 \leq 31$, platí $x_1 - x_2 \leq 31$. Číslo $12(x_1 - x_2)$ může být tedy dělitelné číslem 31 pouze pro $x_1 - x_2 = 0$, tj. $x_1 = x_2$. Pak ale platí $31(y_1 - y_2) = 0$, tedy $y_1 = y_2$. Dohromady tedy $[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$.

Hlavolam „Hanojská věž“. (Fuchs, 2000)
Hlavolam „Hanojská věž“ byl poprvé uveřejněn zhruba v polovině 19. století. Za jeho autora je považován významný francouzský matematik Eduard Lucas. Hlavolam „Hanojská věž“ tvoří tři

vertikální tyčky, ne něž je navlečeno n kruhových disků s otvory uprostřed. Tyto disky mají navzájem různé poloměry a jsou poskládány do věže tak, že poloměr každého disku je větší než poloměr kteréhokoliv disku nad ním (obr. 1). Úkolem hlavolamu je přenést věž na jinou tyčku tak, že v každém kroku lze přenést pouze jeden disk z jedné tyčky na druhou a nikdy přitom nesmí být položen větší disk na menší. Parville v článku z roku 1884 uvádí legendu, podle níž mniši v utajovaném tibetském klášteře pracují na přemístění věže tvořené 64 zlatými disky. Ve chvíli, kdy práci dokončí, nastane konec světa.



Obr. 1



Obr. 2

Nyní se budeme hlavolamu věnovat z matematického hlediska. Označme H_n minimální počet kroků k přemístění věže o n deskách. Problémem je určit předpis pro výpočet H_n. Odvodíme rekurentní vztah pro H_n. Předpokládejme, že pro n desek věže je počet kroků roven H_n. Počet desek na tyčkách po každém kroku označíme jako trojici (n_1, n_2, n_3), přičemž musí platit $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Např. pro $n = 3$ je jedno možné řešení hlavolamu vyjádřeno jako posloupnost trojic $(3, 0, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 0, 3)$. Nyní přidáme jednu desku (zřejmě její poloměr musí být větší než poloměr kterékoliv z předchozích n desek). Výchozí stav desek na tyčkách pro $n + 1$ desek je tedy např. $(0, n + 1, 0)$. K přechodu do stavu $(n, 1, 0)$ je třeba H_n kroků. Nyní přemístíme největší desku na třetí tyčku, vznikne stav $(n, 0, 1)$ (obr. 2). Pro přechod do stavu $(0, 0, n + 1)$ je opět potřeba H_n kroků. Při všech krocích kromě prostředního zůstává přidaná největší deska na stejném místě úplně dole, tzn. přesun libovolné z původních n desek na ni neodporuje pravidlům hlavolamu. Odtud plyne rekurentní vztah $H_{n+1} = 2H_n + 1$. $(\star)$ Určit vztah pro přímý výpočet hodnot H_n je obtížnější. Využijeme induktivní postup. Zřejmě platí $H_0 = 0$, $H_1 = 1$, dále snadno určíme přímo řešením hlavolamu $H_2 = 3$, $H_3 = 7$. Pro vyšší hodnoty n je již určení složitější. I z těchto prvních několika hodnot je však možné vyslovit hypotézu $H_n = 2^n - 1$ a dokázat ji matematickou indukcí s využitím rekurentního vztahu $(\star)$. Tento důkaz již provádět nebudeme.

Dyadické početní kouzlo. (Beránek, 1998:, s. 74)
Na stole je rozloženo šest tabulek označených A, B, C, D, E, F. Myslete si nyní libovolné přirozené číslo od 1 do 63 a oznamte mi, ve kterých tabulkách je toto číslo obsaženo. Z toho je okamžitě možné určit, které číslo jste si mysleli.

Řešení. Zmíněné tabulky jsou na obrázku 3:

A	1	3	5	7	**B**	2	3	6	7	**C**	4	5	6	7
	9	11	13	15		10	11	14	15		12	13	14	15
	17	19	21	23		18	19	22	23		20	21	22	23
	25	27	29	31		26	27	30	31		28	29	30	31
	33	35	37	39		34	35	38	39		36	37	38	39
	41	43	45	47		42	43	46	47		44	45	46	47
	49	51	53	55		50	51	54	55		52	53	54	55
	57	59	61	63		58	59	62	63		60	61	62	63
D	8	9	10	11	**E**	16	17	18	19	**F**	32	33	34	35
	12	13	14	15		20	21	22	23		36	37	38	39
	24	25	26	27		24	25	26	27		40	41	42	43
	28	29	30	31		28	29	30	31		44	45	46	47
	40	41	42	43		48	49	50	51		48	49	50	51
	44	45	46	47		52	53	54	55		52	53	54	55
	56	57	58	59		56	57	58	59		56	57	58	59
	60	61	62	63		60	61	62	63		60	61	62	63

Obr. 3

Víme, že každé přirozené číslo a lze jednoznačně vyjádřit ve dvojkové (dyadické) soustavě ve tvaru

$$a = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_1 2 + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a < 2^{n+1}$, přičemž každý z koeficientů $a_0, \dots, a_n$ je buďto roven číslu jedna, nebo nula. Pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ nyní sestavíme rostoucí posloupnosti dekadických zápisů přirozených čísel, které mají ve svém dyadickém rozvoji u mocniny 2^k koeficient jedna.

$k = 0$: 1, 3, 5, 7,... tzn. všechna lichá čísla

$k = 1$: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18,...

$k = 2$: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, ..., atd.

Obecně lze tedy psát:

$k = n$: 2^n, $2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots, 2^n + 2^n - 1$, $3 \cdot 2^n, 3 \cdot 2^{n+1}$, $3 \cdot 2^{n+2}, \dots, 3 \cdot 2^n + 2^n - 1, \dots, (2p+1) \cdot 2^n, (2p+1) \cdot 2^{n+1}$, $(2p+1) \cdot 2^{n+2}, \dots, (2p+1) \cdot 2^n + 2^n - 1$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Každé přirozené číslo a je obsaženo v konečném počtu těchto posloupností, odpovídajících řádům, na kterých je v dyadickém rozvoji čísla a číslice jedna. Např. číslo 45 je obsaženo v posloupnostech pro $k = 0$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 5$, protože $45 = 1+4+8+32$. Zapíšeme-li dané posloupnosti do tabulek, pak informace, ve kterých tabulkách je číslo obsaženo, umožní určit toto číslo jako součet nejmenších prvků těchto posloupností (čísel v levém horním rohu každé tabulky). Číslo 45 je skutečně obsaženo v tabulkách A, C, D a F. Při praktické realizaci je samozřejmě nutno omezit shora rozsah přirozených čísel některým z čísel $2n - 1$. V tom případě je potřeba připravit n tabulek, z nichž každá bude obsahovat $2n - 1$ čísel. Povšimněme si, že každá z tabulek vždy končí číslem $2n - 1$. V zadání je $n = 6$, rozsah čísel je od 1 do 63, je sestaveno šest tabulek, které všechny končí číslem 63.

V příspěvku jsme uvedli několik zajímavých matematických problémů. Podobných zajímavostí existuje samozřejmě daleko více. Velmi oblíbené jsou například různé číselné početní pyramidy. To je však již námět na další příspěvek.

Literatura

[1] Beránek, J. (1998). O číselných soustavách trochu jinak. In *XVI. vědecké kolokvium, sborník* (s. 71–76). Vyškov: VVŠ PV.

[2] Beránek, J. (2006). Řešení rekurentních formulí a funkcionálních rovnic. In *XXIV. vědecké kolokvium. Sborník.* [CD-ROM]. Brno: Univerzita obrany.

[3] Fuchs, E. (2000). *Diskrétní matematika a teorie množin pro učitele.* [CD-ROM]. Brno: Masarykova Univerzita.

[4] Kuncová, V. (2008). *Historie matematiky ve vztahu k vyučování matematice na 1.stupni ZŠ* [Diplomová práce]. Brno: Pedagogická fakulta MU.

[5] Pereľman, J. I. (1985). *Zajímavá algebra.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

Abstract

The first part of the article introduces several problems from the area of recreational mathematics. Although these problems seem very impressive for non-mathematicians, their mathematical substance is not usually complicated and can be mastered by students of the primary school mathematics. The second part of the article offers the theoretical solution of a mathematics puzzle, the Tower of Hanoi.

Jaroslav Beránek
Katedra matematiky PdF MU
Poříčí 7
603 00 Brno
e-mail: beranek@ped.muni.cz