Milan Hejný

Cíle vyučování matematice

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 3, 160–168

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148611

CÍLE VYUČOVÁNÍ MATEMATICE

Milan Hejný

Na proces vzdělávání hledíme jako na cílesledný duševní pohyb vychovatele. Ptáme se na cíl, který je sledován, a na postupy, kterými je cíle dosahováno.

Rozhodující roli zde hraje učitel, jeho osobnost, jeho vztah k žákům. Naše přesvědčení o osobnosti učitele formuloval před bezmála 400 lety Jan Amos Komenský v Analytické didaktice:

„Přirozená povaha lidská jest svobodna, miluje dobrovolnost, hrozí se donucování. – A tak chce být vedena tam, kam směřuje, nechce být vláčena, strkána, donucována. Z toho tedy plyne, že učitelé nevrlí, panovití a tlukoucí jsou nepřátelé rodu lidského a že jsou od přirozenosti vhodní leda k tomu, aby nadání ubíjeli a docela hubili, nikoli však aby je povznášeli a zušlechťovali. Sem náležejí také suší a neplodní pedanti, kteří vyučují jen zaschlými pravidly a nedovedou ducha zabaviti, aby ho oblomili; vytvářejí z žáků tvory znechucené, nebo tvory sobě podobné, prkenné panáky."

Tedy: „Úřad učitelský musí být prost veškeré nevrlosti, vše musí být konáno s otcovskou náklonností."

Hierarchie cílů vyučování

Když jsem v roce 1975 začínal učit na základní škole, dal mi otec[1] radu, která se pak stala hlavním vodítkem mých úvah o cílech vyučování. Rada zněla: „Hleď, aby tvoje snaha naučit žáky matematice nepřevýšila tvoji snahu vychovat slušné lidi."

[1]Vít Hejný (1904 Litovel – 1977 Martin), učitel střední ekonomické školy. Jeho písemná pozůstalost začala vycházet až 35 let po jeho smrti pod názvem Archiv Víta Hejného I (2012) a Archiv Víta Hejného II (2016). Obě publikace vydalo EDIS – vydavatelstvo Žilinské univerzity.

Základní přesvědčení, které přebíráme od Víta Hejného, zní: „Úlohou školy je rozvíjet žáka v oblasti intelektuální, osobnostní i sociální. Přispět k formování jeho hodnotového systému, ve kterém je pevně zabudována potřeba propojit osobní štěstí s prospěšností jiným lidem a potřeba intelektuální práce.“ Z těchto hodnot kvalitního života vychází i naše hierarchie cílů vyučování matematice. Je dána mírou, kterou jednotlivé cíle přispívají k formování budoucího občana. Občana sebevědomého, odpovědného a společnosti užitečného. Jsou to:

- vztah žáka k matematice a kauzálnímu kritickému myšlení vůbec,
- schopnosti sociální,
- schopnosti kognitivní, meta-kognitivní,
- znalosti.

Podívejme se blíže na první tři ze čtyř uvedených položek.

Vztah žáka k matematice charakterizuje jeho:

- intelektuální sebedůvěra,
- radost z intelektuální práce,
- potřeba řešit, případně i tvořit matematické úlohy,
- potřeba sdílet svoje myšlenky se spolužáky, rodiči atp.

K sociálním schopnostem řadíme především:

- schopnost žáka pracovat v týmu,
- mít dobrou interakci se spolužáky,
- umět pomáhat a přijímat pomoc.

Ke schopnostem kognitivním a meta-kognitivním patří zejména:

- zvídavost
- potřeba porozumět pojmům, vztahům a procesům, nebo je dokonce odhalovat,
- hledání řešitelských strategií,
- experimentování,
- evidence jevů,
- organizace souboru jevu,
- tvorba a prověřování hypotéz,
- zobecňování,
- abstrahování,

- argumentace,
- zvládání, případně i tvorba vhodného jazyka,
- efektivní práce s chybou,
- efektivní využití času.

Poslední položce, znalostem, věnujeme zbytek článku, protože právě sem směřuje didaktika matematiky.

Porozumění v matematice

Klíčovým pojmem našich úvah je jev *porozumění*, protože právě to určuje kvalitu žákovy znalosti. Dva příběhy dají čtenáři konkrétnější představu.

Ilustrace 1. V šestém ročníku jsem žákům vypravoval legendu o malém Karlu Gaussovi, který trikem sečetl všechna čísla od 1 do 100. Třída pak, dokonce několika různými způsoby, odhalila vztah

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \tag{$\star$}$$

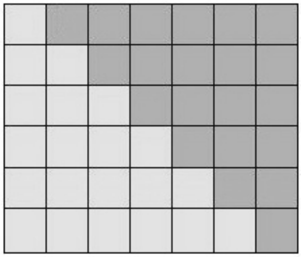
Vztah dostal jméno „Gaussův trik". V sedmém ročníku jsem zkoumal, jak se tento poznatek „uhnízdil" ve vědomí jednotlivých žáků. Nástroj výzkumu byla i úloha 1.

Úloha 1. Pro které nejmenší přirozené číslo n je $1+2+\cdots+n >$ $> 10\,000$?

Uvedeme řešení tří žáků.

Aleš kreslil obrázek a komentoval (obr. 1): „Vezmu jen například šest. Přidám totéž vzhůru nohama. Dohromady je jich (píše) $6 \cdot 7 = 42$. Polovina je 21. Tak je to i pro to n. Mám tedy najít nejmenší n, pro které je (píše) $n \cdot (n+1) > 20\,000$." Hoch na kalkulačce zjistil $\sqrt{20\,000} \doteq 141$. Zkusil $141 \cdot 142 = 20\,022$ a pak i $140 \cdot 141 = 19\,740$. Výsledek $n = 141$ dvakrát podtrhnul.

Bětka si vzpomněla na vztah ($\star$). Nebyla si jista, tak jej prověřila pro $n = 3$. Na otázku, jak ví, že ten vzoreček platí, řekla: „Jo, to je s tím malým Gaussem. Napíši si (píše $1 + 2 + 3 + \cdots +$ $+ 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$) a spojím (obloučky naznačuje



Obr. 1

součty $1+100$, $2+99$, až $50+51$; ke každému obloučku připíše 101 a zapíše výsledek $101\cdot 50 = 5\,050$).“ Během výkladu se dívka několikrát zamyslela, občas napsala něco, co pak škrtla. Pak metodou pokus-omyl hledala pomocí kalkulačky číslo n. První pokus byl $201\cdot 100$, druhý pokus byl $151\cdot 75$, třetí pokus byl $141\cdot 70 = 9\,870$. To už bylo velice nadějné. Dívka napsala $142\,\cdot$ a nevěděla, zda může napsat desetinné číslo 70,5. Po chvíli ale zajásala a napsala $9\,870 + 141 = 10\,011$. Prohlásila: „Hotovo, je to číslo sto čtyřicet jedna.“

Žák Cyril vyhledal v sešitě vzoreček ($\star$). Na otázku, jak ví, že ten vzoreček platí, překvapeně řekl: „To je přeci ten Gaussův trik.“ Na otázku „Jak jsme to vyvodili?“ odpověděl „Jo, to si již nepamatuji“.

Komentář. Aleš vzorci ($\star$) rozumí zcela. Pamatuje si, jak jej vloni sám objevil. Teď svůj objev zopakoval, vztah ($\star$) neuvedl. I druhou část úlohy – hledání čísla n – udělal elegantně s dobrým vhledem do odmocnin. Hoch rozumí vztahu ($\star$) zejména proto, že jej sám odhalil.

Bětka má pro vztah ($\star$) zatím jen částečné porozumění, neboť si není jista, zda platí i pro liché n. Nicméně ví, jak se vyvodí, a umí tuto myšlenku účinně používat. Zejména objeví, že $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n-1)\cdot n}{2} + n$, a to jí umožní zvládat i lichá n.

Žák Cyril nemá v podstatě žádné porozumění vztahu ($\star$).

Ilustrace 2 se týká vzorce $S = \frac{z \cdot v}{2}$ pro obsah trojúhelníka. Uvažujeme o tomto poznatku uloženém ve vědomí čtyř žáků. Všichni uvedený vztah znají, ale každý z nich jinak odpověděl na otázku, proč tento vztah platí.

- Dana doplnila trojúhelník na rovnoběžník a ten pomocí rozdělení na dvě části a přesunem jedné z nich změnila na obdélník o rozměrech $z \times v$.
- Emil ostroúhlý trojúhelník rozdělil výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky a každý z nich doplnil na obdélník. S tupoúhlým trojúhelníkem si ale neporadil.
- Frýda uměla vzorec zdůvodnit jen pro pravoúhlý trojúhelník.
- Gustav řekl, že vzoreček je v učebnici, a on si jej pamatuje.

Komentář. Je jasné, jak zde od Dany ke Gustavovi ubývá porozumění pro daný vzoreček. Klíčová otázka je, zda Gustav ustrne na přesvědčení, že mu stačí znát vzorec, nebo se u něj probudí potřeba vzorci porozumět.

Nyní můžeme upřesnit naše chápání termínu porozumění: Poznatek, který je ve vědomí žáka kauzálně propojen na další poznatky a/nebo na životní zkušenosti, nazveme *znalostí*, nebo poznatkem *organickým*. Znalost, která je propojena na životní zkušenosti žáka, nazveme *sémanticky ukotvenou*. Znalost, která je propojena na jiné matematické poznatky žáka, nazveme *strukturálně ukotvenou*. V dalším mluvíme též o sémantickém porozumění a strukturálním porozumění. Poznatek, který takové ukotvení postrádá, nazveme *formální*. Jestliže navíc nositel formálního poznatku odmítá nabídku získat pro poznatek porozumění, mluvíme o poznatku *silně formálním*.

Porozumění pojmu, vztahu, procesu nebo argumentu je jev dynamický. O tom je následující ilustrace.

Ilustrace 3. Ptám se pětiletého vnuka, kolik je dvě a tři. Vnuk se zeptá, zda jde o jablka, a ukáže na ta v košíku. Souhlasím. On vybere dvě jablka, pak tři a spočítá, že je jich pět. Ukážu na jeho autíčka a ptám se, kolik je dvě autíčka a tři autíčka. Hoch opět manipulativně najde odpověď. O rok později spolu chodíme po schodech nahoru a dolů. Ptám se hocha „vystoupám o dva schody a pak o tři schody, o kolik schodů vystoupám?" Hoch bez počítání řekne „o pět". Ptám se, jak to ví. Odpoví „protože dvě a tři je pět" a ukazuje mi to na prstech.

Komentář. V pěti letech hoch získal sérii zkušeností se sémanticky ukotvenými výpočty, například se vztahem $2^* + 3^* = 5^*$. (Hvězdičkou označujeme sémantické ukotvení čísla. Tedy 2^* znamená 2 jablka, nebo 2 autíčka apod.) Hoch zjistil, že výsledek nezávisí na tom, zda počítá jablka, prsty nebo autíčka. Z těchto zkušeností si abstrakcí vytvořil strukturální spoj $2+3=5$. Hoch tomuto poznatku rozumí, protože se k němu dopracoval sám. Kdykoli je schopen podat vysvětlení, proč je to tak. Třeba pomocí prstů, které se tedy stávají asi hlavním nástrojem na práci s malými čísly.

Abstraktní poznání $2+3=5$ není ještě ukončeno. Je opřeno o obecné poznání $2^*+3^*=5^*$, ve kterém jak 2^*, tak 3^* je počet jistých manipulovatelných objektů. Ale tato čísla mohou být i počty kroků. A i tuto úlohu hoch v ilustraci bezpečně zvládl. Nevíme, zda hoch uměl sečíst i pomíjivé zvuky, nebo dokonce situaci, kde 2^* značí druhé podlaží a 3^* přestěhování se o 3 podlaží výše.

Václav Šimerka před 150 lety ve své učebnici určené vyšším gymnáziím a reálným školám odlišuje objekty 1^* a 1 i jazykově. Objekt 1^* nazývá jednicí a číslici 1, o níž mluví jako o čtence, nazývá jedna: „Tak v čísle sedm krejcarů jest jednice krejcar; v čísle deset koní jest tím kůň, ..." (Šimerka, 1868: s. 5)

Čím bohatší je sémantické ukotvení matematického jevu ve vědomí žáka, tím kvalitnější je jeho znalost daného jevu. To osvětlí další dvě ilustrace.

Ilustrace 4. Dva příběhy hledání součtu $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ i odhalení vztahu $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Radka (3. roč.) dostala kruh jako obrázek dortu a úlohu: Kolik je polovina a třetina dortu? Dívka obrázek dortu rozdělila na šestiny. Třetinu (2 kousky) vybarvila zeleně, polovinu (3 kousky) hnědě a řekla, že jsou to tři kousky a dva kousky, tedy pět kousků. Na můj dotaz, jak veliký je ten kousek, odpověděla, že jeden je šestina. Výsledný zlomek nenapsala, protože to ještě neumí. Zeptal jsem se Radky, kolik by to bylo, kdybych k těm pěti kouskům přidal i ten šestý. Můj dotaz se jí asi zdál pitomý, protože reagovala otázkou: „To jako že jsem to nemusela krájet?"

Veronika (4. roč.) dostala již úlohu strukturální: Kolik je polovina a třetina dohromady? Dlouho se dívala na ciferník hodin, a aniž by cokoli psala, odpověděla „padesát minut". Zeptal jsem se jí, kolik by to bylo, kdybychom přidali ještě šestinu. Chvíli uvažovala, pak si na prstech počítala a řekla: „Jo, deset minut (pauza), dohromady je to hodina, tedy 60 minut."

Komentář. Rozhodující je porozumění pojmům polovina a třetina uvnitř jednoho kontextu. Obě dívky situaci sémantizují. Radka krájí dort. Ví, že dojde-li k souběhu zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$, je nutno celek dělit na šestiny. Zatím nevíme, zda Radka umí sčítat i jiné zlomky, například $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{5}$. Víme, že vztahu $\left(\frac{1}{2}\right)^* + \left(\frac{1}{3}\right)^* = \left(\frac{5}{6}\right)^*$ rozumí, i když jej neumí zapsat.

Veronika modeluje zlomky na ciferníku: $\frac{1}{2}$ je 30 minut, $\frac{1}{3}$ je 20 minut, dohromady 50 minut. Chvíli dívce trvalo zjistit, že $\frac{1}{6}$ je 10 minut. Případný rozhovor mezi Radou a Veronikou by obohatil obě dívky o porozumění zlomkům.

Smutné jsou případy, kdy rodící se porozumění jevu je vytěsněno formálním poznáním. O tom mluví epizoda, ve které opět potkáme Veroniku, tentokrát již jako žákyni 7. ročníku.

Ilustrace 5. Veronika správně vypočítala $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$. Na můj dotaz, proč to je tak, odpověděla, že to je takové pravidlo. Ptal jsem se, proč to platí. Řekla, že to se učili, že to se tak počítá. Požádal jsem ji, aby našla součet $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Chvíli se na to dívala a pak řekla, že to ještě nebrali. Zatím umí sčítat jen dva zlomky. Navrhnul jsem ji, ať si to nakreslí. Řekla, že obrázky ji matou, a pak to pravidlo poplete. Nabídku cesty k porozumění odmítla.

Komentář. Veroničin poznatek křížového pravidla je formální. Převzala hotový návod a ten si nacvičila. Věří mu. Stejně by tomu věřila, kdyby byl návod vadný. Sčítání dvojice zlomků dívka neumí rozšířit na sčítání tří zlomků. Překvapuje, že dívka, která ve 4. ročníku dobře úlohu vyřešila pomocí ciferníku, po třech letech odmítá se k tomu vrátit.

Proč u dívky došlo ke ztrátě porozumění pro operaci sčítání zlomků? Zřejmě proto, že přirozená cesta získání znalosti pomocí mnoha konkrétních výpočtů byla přerušena. Dívce byla nabídnuta jednoduchá procedura. Ta byla provázena přesvědčením učitele, že tímto způsobem pilný žák zvládne matematiku rychle a spolehlivě. Veronika uvěřila, že je výhodnější naučit se proceduru sčítání než se po kouscích dobrat k porozumění procesu. Školní úspěšnost pak posílila přesvědčení dívky o výhodnosti této změny.

Rozhodování žáka, zda se bude učit vzorečky a nacvičovat procedury, nebo se bude snažit matematice porozumět, má vážnější dopad. Rozhoduje o tom, zda se tento žák ochotně podřídí autoritě, nebo zda bude intelektuálně autonomní. Nejen v matematice.

Poznávací proces Veroniky byl přerušen a nahrazen poznatkem importovaným do vědomí dívky zvenčí. Dívka ztratila potřebu procesu porozumět. Dokonce se v její meta-kognici vytvořila potřeba případným vnějším nabídkám o porozumění vzdorovat. Tím se v dívčině vědomí uzavřela cesta návratu k sémantickým modelům.

Potřeba porozumění se v historii objevila v Řecku někdy kolem roku 800 před Kr. Civilizace Egypta, Mezopotámie i povodí Hindu řešily otázku JAK?, Homér hledá odpovědi na otázku PROČ? Babylonský písař věděl, že $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$, pythagorejci věděli, proč je to tak. Tento posun v myšlení lidstva je srovnatelný s objevem písma. Žák, který ví, jak se zlomky sčítají, zná něco, co v brzké budoucnosti bude bezcenné. Žák, který ví, jak do situace získat vhled, který má radost z každého svého nového objevu, bude společnosti užitečný, i když počítače a roboti standardní znalosti znehodnotí.

V úvahách by bylo možné pokračovat různými směry. Jestliže se diskuze rozvine, rád se zapojím.

Abstract

The article deals with the author's view of the goals of teaching mathematics. He distinguishes four: a pupil's relationship to mathematics in general and causal thinking in particular, social abilities, cognitive and meta-cognitive abilities, knowledge. The rest of the article is devoted to the building of knowledge, in particular to the phenomenon of understanding in mathematics. Illustrations are presented of what it means to understand in mathematics.

Milan Hejný
Pedagogická fakulta
Univerzita Karlova
Magdalény Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: milan.hejny@pedf.cuni.cz