Daniel Tyr

Nástroje pro tvorbu daných typů středoškolských rovnic vedoucích na kvadratické rovnice. Část 2

Učitel matematiky, Vol. 27 (2019), No. 2, 111–123

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148604

NÁSTROJE PRO TVORBU DANÝCH TYPŮ STŘEDOŠKOLSKÝCH ROVNIC VEDOUCÍCH NA KVADRATICKÉ ROVNICE ČÁST 2

Daniel Tyr

5. Rovnice $a(bx+c)^2+d=a(ex+f)^2+g$

5.1. Rovnice s racionálními kořeny

Budeme postupovat obdobně jako při tvorbě rovnice (4.1.1), viz článek uvedený v předchozím čísle. Sestavme rovnici

$$a(bx+c)^2+d=a(ex+f)^2+g, \tag{5.1.1}$$

kde x je neznámá; $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Q}$; $a \neq 0$, $b \neq \pm e$. Požadujme, aby tato rovnice měla racionální kořeny $x_1=\frac{m}{n}$, $x_2=\frac{r}{s}$; kde $m,r \in \mathbb{Z}$; $n,s \in \mathbb{N}$. Připomeňme, že v předchozím článku, konkrétně v subkapitole 4.1, jsme využili skutečnosti, že výše zavedená čísla x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $\left(x-\frac{m}{n}\right)\left(x-\frac{r}{s}\right)=0$, kterou jsme následně upravili na tvar (4.1.2), tj. získali jsme rovnici

$$\left(x-\frac{ms+rn}{2ns}\right)^2+\frac{-(ms+rn)^2+4mnrs}{4n^2s^2}=0. \tag{5.1.2}$$

Nyní zavedeme substituce $A=\frac{ms+rn}{2ns}$, $B=\frac{-(ms+rn)^2+4mnrs}{4n^2s^2}$. Rovnici (5.1.2) pišme ve tvaru

$$(x-A)^2+B=0. \tag{5.1.3}$$

Nechť $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $\beta, \delta \in \mathbb{N}$; jsou čísla splňující podmínku $\alpha\delta \neq \pm\beta\gamma$. Výraz na levé straně rovnice (5.1.3) násobme číslem $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)$, dostáváme

$$\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)(x-A)^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\delta^2}\right)B = 0, \tag{5.1.4}$$

po úpravě obdržíme

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha}{\beta}A\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}B = \left(\frac{\gamma}{\delta}x - \frac{\gamma}{\delta}A\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\delta^2}B. \tag{5.1.5}$$

Nechť $v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $w \in \mathbb{N}$. Rovnici (5.1.5) zapišme ve tvaru

$$\frac{v}{w}\left(\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha}{\beta}A\right)^2 + \frac{v}{w}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}B = \frac{v}{w}\left(\frac{\gamma}{\delta}x - \frac{\gamma}{\delta}A\right)^2 + \frac{v}{w}\cdot\frac{\gamma^2}{\delta^2}B. \tag{5.1.6}$$

Dostáváme tak požadovanou rovnici (5.1.1), pro úplnost zbývá již jen položit $a = \frac{v}{w}$, $b = \frac{\alpha}{\beta}$, $c = -\frac{\alpha}{\beta}A$, $d = \frac{v}{w} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2}B$, $e = \frac{\gamma}{\delta}$, $f = -\frac{\gamma}{\delta}A$, $g = \frac{v}{w} \cdot \frac{\gamma^2}{\delta^2}B$. Shrňme, že uživatel nástroje zadá:

1. Racionální kořeny $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{r}{s}$ (tím jsou stanovena čísla A, B).
2. Nenulová celá čísla α, γ a přirozená čísla β, δ taková, že bude platit $\alpha\delta \neq \pm\beta\gamma$.
3. Nenulové racionální číslo $\frac{v}{w}$.

Dodejme, že pokud budeme požadovat, aby koeficienty rovnice (5.1.6) byly celočíselné, stačí vhodně zvolit čísla $v, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby platilo $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}, \frac{v}{w} \in \mathbb{Z}$ a rovnici (5.1.6) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} &\frac{v}{w}\left(2ns\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\alpha}{\beta}(ms+rn)\right)^2 + \frac{v\alpha^2}{w\beta^2}\left(-(ms+rn)^2 + 4mnrs\right) = \\ &\quad \frac{v}{w}\left(2ns\frac{\gamma}{\delta}x - \frac{\gamma}{\delta}(ms+rn)\right)^2 + \frac{v\gamma^2}{w\delta^2}\left(-(ms+rn)^2 + 4mnrs\right). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

5.2. Rovnice s iracionálními kořeny

Vytvořme generátor rovnice

$$a(bx+c)^2+d=a(ex+f)^2+g, \tag{5.2.1}$$

kde x je neznámá; $a,b,c,d,e,f,g\in\mathbb{Z}$; $a\neq 0$, $b\neq\pm e$. Budeme klást požadavek, aby výše uvedená rovnice získaná generováním měla iracionální kořeny. Uvažujme pomocnou rovnici

$$p(qx+r)^2+s=p(tx+u)^2+v, \tag{5.2.2}$$

kde x je neznámá; $p,q,r,t,u,v\in\mathbb{Z}$; $s\in\mathbb{Q}$; $p\neq 0$, $q\neq 0$, $q\neq\pm t$. Rovnici (5.2.2) pišme ve tvaru

$$\left(pq^2-pt^2\right)x^2+(2pqr-2ptu)x+\left(pr^2+s-pu^2-v\right)=0. \tag{5.2.3}$$

Diskriminantem rovnice (5.2.3) je výraz

$$D=(2pqr-2ptu)^2-4ps\left(q^2-t^2\right)-4p\left(q^2-t^2\right)\left(pr^2-pu^2-v\right). \tag{5.2.4}$$

Nechť $k\in\mathbb{Z}$. Aby rovnice (5.2.2) měla iracionální kořeny, položme

$$\begin{aligned}(2pqr-2ptu)^2-4ps\left(q^2-t^2\right)&\\ -4p\left(q^2-t^2\right)\left(pr^2-pu^2-v\right)&=k^2+1,\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

odtud

$$s=\frac{k^2+1+4p\left(q^2-t^2\right)\left(pr^2-pu^2-v\right)-(2pqr-2ptu)^2}{4ps\left(t^2-q^2\right)}. \tag{5.2.6}$$

Nyní proveďme následující kroky:

1. Generujme celá čísla $r,u,v\in\langle -3;3\rangle$.
2. Generujme nenulová celá čísla $p,q,k\in\langle -3;3\rangle$.
3. Vypočítejme číslo[1] $t=|q|+1$.

[1] Tento způsob zavedení čísla t zajišťuje splnění podmínky $q\neq\pm t$.

Dosazením vztahu (5.2.6) do rovnice (5.2.2) obdržíme

$$\begin{aligned} 4p^2\left(t^2-q^2\right)(qx+r)^2+\mathrm{Num}(s) = \\ 4p^2\left(t^2-q^2\right)(tx+u)^2+4pv\left(t^2-q^2\right), \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

kde $\mathrm{Num}(s)$ značí čitatel zlomku (5.2.6).
Označíme-li $a = 4p^2\left(t^2-q^2\right)$, $b = q$, $c = r$, $d = \mathrm{Num}(s)$, $e = t$, $f = u$, $g = 4pv\left(t^2-q^2\right)$, pak rovnice (5.2.7) získá podobu $a(bx+c)^2+d = a(ex+f)^2+g$, kde $a,b,c,d,e,f,g \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq \pm e$. Pokud dodatečně vygenerujeme nenulové racionální číslo w a jeho třetí mocninou vynásobíme výrazy na obou stranách rovnice (5.2.7), získáváme rovnici s racionálními koeficienty a iracionálními kořeny. Získanou rovnici zadejme ve tvaru

$$\begin{aligned} 4p^2w\left(t^2-q^2\right)(qwx+rw)^2+\mathrm{Num}(s)w^3 = \\ 4p^2w\left(t^2-q^2\right)(twx+uw)^2+4pvw^3\left(t^2-q^2\right). \end{aligned}$$

5.3. Rovnice nemající reálné kořeny

Vytvořme generátor rovnice

$$a(bx+c)^2+d = a(ex+f)^2+g, \tag{5.3.1}$$

kde x je neznámá; $a,b,c,d,e,f,g \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq \pm e$. Budeme klást požadavek, aby výše uvedená rovnice získaná generováním neměla reálné kořeny. Uvažujme pomocnou rovnici

$$p(qx+r)^2+s = p(tx+u)^2+v, \tag{5.3.2}$$

kde x je neznámá; $p,q,r,t,u,v \in \mathbb{Z}$; $s \in \mathbb{Q}$; $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p \neq \pm q$. Rovnici (5.3.2) pišme ve tvaru

$$\left(pq^2-pt^2\right)x^2+(2pqr-2ptu)x+\left(pr^2+s-pu^2-v\right) = 0. \tag{5.3.3}$$

Diskriminantem rovnice (5.3.3) je výraz

$$D = (2pqr-2ptu)^2-4ps\left(q^2-t^2\right)-4p\left(q^2-t^2\right)\left(pr^2-pu^2-v\right). \tag{5.3.4}$$

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Aby rovnice (5.3.2) neměla reálné kořeny, položme

$$(2pqr - 2ptu)^2 - 4ps\left(q^2 - t^2\right) - 4p\left(q^2 - t^2\right)\left(pr^2 - pu^2 - v\right) = -k, \tag{5.3.5}$$

odtud

$$s = \frac{k - 4p\left(q^2 - t^2\right)\left(pr^2 - pu^2 - v\right) + (2pqr - 2ptu)^2}{4ps\left(q^2 - t^2\right)}. \tag{5.3.6}$$

Nyní proveďme následující kroky:

1. Generujme přirozené číslo $k \in \langle 1; 3\rangle$.
2. Generujme nenulová celá čísla $p, q \in \langle -3; 3\rangle$.
3. Generujeme celé číslo $r, u, v \in \langle -3; 3\rangle$.
4. Vypočítejme číslo $t = |q| + 1$.

Dosazením vztahu (5.3.6) do rovnice (5.3.2) obdržíme

$$4p^2\left(q^2 - t^2\right)(qx + r)^2 + \mathrm{Num}(s) = 4p^2\left(q^2 - t^2\right)(tx + u)^2 + 4pv\left(q^2 - t^2\right), \tag{5.3.7}$$

kde $\mathrm{Num}(s)$ značí čitatel zlomku (5.3.6).
Označíme-li $a = 4p^2\left(q^2 - t^2\right)$, $b = q$, $c = r$, $d = \mathrm{Num}(s)$, $e = t$, $f = u$, $g = 4pv\left(q^2 - t^2\right)$, pak rovnice (5.3.7) získá podobu $a(bx + c)^2 + d = a(ex + f)^2 + g$, kde $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b \neq \pm e$. Pokud dodatečně vygenerujeme nenulové racionální číslo w a jeho třetí mocninou násobíme výrazy na obou stranách rovnice (5.3.7), získáváme rovnici s racionálními koeficienty. Tu zadejme ve tvaru

$$4p^2w\left(q^2 - t^2\right)(qwx + rw)^2 + \mathrm{Num}(s)w^3 = 4p^2w\left(t^2 - q^2\right)(twx + uw)^2 + 4pvw^3\left(q^2 - t^2\right).$$

6. Rovnice $\frac{x+\alpha}{x+\beta} + x + \gamma = \delta$

6.1. Rovnice s racionálními kořeny

Sestavme rovnici

$$\frac{x + \alpha}{x + \beta} + x + \gamma = \delta, \tag{6.1.1}$$

kde $x1$ je neznámá, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$; $\alpha \neq \beta$, $x \neq -\beta$. Požadujme, aby tato rovnice měla racionální kořeny $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{r}{s}$; kde $m, r \in \mathbb{Z}$; $n, s \in \mathbb{N}$.

Nechť $a \neq b$, $x \neq -b$. Uvažujme pomocnou rovnici

$$\frac{x+a}{x+b} + x + c = 0, \tag{6.1.2}$$

kterou pišme ve tvaru

$$x^2 + (b+c+1)x + a + bc = 0. \tag{6.1.3}$$

Předpokládejme, že výše uvedená x_1, x_2 jsou kořeny rovnice (6.1.3), pak podle Viètových vzorců lze psát:

$$\frac{ms+rn}{ns} = -b - c - 1, \tag{6.1.4}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = a + bc. \tag{6.1.5}$$

Ze vztahu (6.1.5) ihned dostáváme

$$c = -\frac{ms+rn}{ns} - b - 1. \tag{6.1.6}$$

Dosazením vztahu (6.1.6) do (6.1.5) obdržíme

$$a = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} + b\left(\frac{ms+rn}{ns} + b + 1\right). \tag{6.1.7}$$

Nyní budeme požadovat splnění podmínky $a \neq b$. Pokud by platilo $a = b$, pak podle (6.1.7) získáváme rovnici

$$b^2 + b(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = 0, \tag{6.1.8}$$

kde b považujme za proměnnou. Diskriminantem této rovnice je výraz $D = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$. Má-li mít tato rovnice reálné kořeny b_1 a b_2, musí platit $D \geq 0$, tj.

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2. \tag{6.1.9}$$

Tato nerovnost[2] je platná pro všechna $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, lze ji totiž zapsat ve tvaru $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Platnost vztahu (6.1.9) tedy zaručuje, že zvolíme-li libovolná x_1, x_2; pak také získáme jistá b_1 a b_2, z nichž žádné nelze považovat za číslo b vyskytující se v rovnici (6.1.2). Dále uveďme, že pro vztahy mezi koeficienty (x_1+x_2), x_1x_2 a kořeny b_1, b_2 rovnice (6.1.8) platí (Viètovy vzorce):

$$b_1 + b_2 = -x_1 - x_2, \tag{6.1.10}$$

$$b_1 b_2 = x_1 x_2. \tag{6.1.11}$$

Shrňme, že aby platilo $a \neq b$ v rovnici (6.1.2), po zadání jejích kořenů $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{r}{s}$ zvolme takové b, že platí

$$b \neq x_1 \wedge b \neq x_2. \tag{6.1.12}$$

Nyní je vše připraveno k tomu, abychom uvedli posloupnost kroků, jejichž provedením získáme rovnici (6.1.2). Může být následující:

1. Zadáme kořeny $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{r}{s}$, kde $m, r \in \mathbb{Z}$; $n, s \in \mathbb{N}$.
2. Zvolíme racionální číslo b splňující podmínku (6.1.12).
3. Vypočítáme racionální číslo c podle vztahu (6.1.6).
4. Vypočítáme racionální číslo a podle vztahu (6.1.7).

Tím tedy získáváme rovnici (6.1.2) mající racionální kořeny x_1, x_2 a racionální koeficienty a, b, c, d. Poznamenejme, že dosadíme-li a, c podle vztahů (6.1.6), (6.1.7) do rovnice (6.1.2), obdržíme rovnici

$$\frac{x + \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} + b\left(\frac{ms+rn}{ns} + b + 1\right)}{x + b} + x - \left(\frac{ms + rn}{ns} + b + 1\right) = 0. \tag{6.1.13}$$

Označíme-li $\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} + b\left(\frac{ms+rn}{ns} + b + 1\right)$, $\beta = b$, $\gamma = -\frac{ms+rn}{ns}$, $\delta = b + 1$, obdržíme hledanou rovnici (6.1.1).

Připomeňme, že číslo b je racionální. Položme $b = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Pokud budeme požadovat, aby rovnice (6.1.13) měla raci-

[2] Pro nezáporná čísla x_1, x_2 se jedná o nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

onální kořeny a celočíselné koeficienty, stačí ji upravit na tvar

$$\frac{nsq^2x + mrq^2 + p(q(ms + rn) + ns(p + q))}{qx + p} + nsqx - q(ms + rn) = ns(p + q). \tag{6.1.14}$$

6.2. Rovnice s iracionálními kořeny

Vytvořme generátor rovnice

$$\frac{x + \alpha}{x + \beta} + x + \gamma = \delta, \tag{6.2.1}$$

kde $x1$ je neznámá, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$; $\alpha \neq \beta$, $x \neq -\beta$. Budeme klást požadavek, aby výše uvedená rovnice získaná generováním měla iracionální kořeny. Uvažujme pomocnou rovnici

$$\frac{x + a}{x + b} + x + c = 0, \tag{6.2.2}$$

kde x je neznámá; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$; $x \neq -\beta$, $\alpha \neq \beta$. Rovnici (6.2.2) pišme ve tvaru

$$x^2 + (b + c + 1)x + (a + bc) = 0. \tag{6.2.3}$$

Diskriminantem rovnice (6.2.3) je výraz

$$D = (b + c + 1)^2 - 4(a + bc). \tag{6.2.4}$$

Nechť $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aby rovnice (6.2.2) měla iracionální kořeny, položme

$$(b + c + 1)^2 - 4(a + bc) = k^2 + 1, \tag{6.2.5}$$

odtud

$$a = \frac{1}{4}\left((b - c)^2 + 2(b + c) - k^2\right). \tag{6.2.6}$$

Nyní proveďme následující kroky:

1. Generujme nenulové celé číslo $k \in \langle -5; 5 \rangle$.
2. Zvolme racionální $b, c \in \langle -3; 3 \rangle$.
3. Vypočítejme číslo a podle vztahu (6.2.6).

Je ale provedením těchto kroků zaručeno, že bude platit $a \neq b$? Ukážeme, že $a \neq b$ platí pro všechna $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i pro všechna $c \in \mathbb{Q}$. Položme $a = b$ a podle (6.2.6) dostáváme

$$b = \frac{1}{4}\left((b-c)^2 + 2(b+c) - k^2\right), \tag{6.2.7}$$

kde b považujme za neznámou (předpokládejme, že po zvolení čísla k bylo zvoleno číslo c). Diskriminantem této rovnice je výraz $4(1+k^2)$. Ten zřejmě nabývá kladných hodnot pro všechna k i pro všechna c. To tedy znamená, že počet reálných kořenů této rovnice je roven dvěma a nezávisí na volbě k ani na volbě c. Ovšem tyto kořeny nejsou racionální, neboť jsou ve tvaru $b = c + 1 \pm \sqrt{1+k^2}$. To poukazuje na to, že následujícím krokem by musela být volba iracionálního b, což není v souladu s požadavkem uvedeném v bodě 2. Tedy platí $a \neq b$.

Obdobná situace by nastala, kdybychom po volbě čísla k volili číslo b a ptali se, zda rovnice (6.2.7) s neznámou c má racionální kořeny. Taková rovnice je nemá, protože jsou ve tvaru $c = b - 1 \pm \sqrt{1+k^2}$. Tedy opět platí $a \neq b$.

Vraťme se k dokončení popisu generátoru rovnice (6.2.1). Jelikož čísla b, c mají být podle kroku 2 racionální, položme $b = \frac{m}{n}$, $c = \frac{r}{s}$; kde $m, r \in \mathbb{Z}$ a $n, s \in \mathbb{N}$. Dále mějme čísla $t \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{N}$. Rovnici (6.2.2) pišme ve tvaru

$$\frac{x + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right) - k^2\right)}{x + \frac{m}{n}} + x + \frac{r}{s} + \frac{t}{u} = \frac{t}{u}. \tag{6.2.8}$$

Označíme-li $\alpha = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right) - k^2\right)$, $\beta = \frac{m}{n}$, $\gamma = \frac{r}{s} + \frac{t}{u}$, $\delta = \frac{t}{u}$; získáváme požadovanou rovnici (6.2.1), kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, $x \neq -\beta$, $\alpha \neq \beta$. Shrňme, že pro její sestavení můžeme využít např. tento postup:

1. Generujme nenulové celé číslo $k \in \langle -5; 5 \rangle$.
2. Zadáme racionální čísla $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$.

6.3. Rovnice nemající reálné kořeny

Vytvořme generátor rovnice

$$\frac{x+\alpha}{x+\beta}+x+\gamma=\delta, \tag{6.3.1}$$

kde x je neznámá; $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{Q}$; $x\neq-\beta$, $\alpha\neq\beta$. Budeme klást požadavek, aby výše uvedená rovnice získaná generováním neměla reálné kořeny. Uvažujme pomocnou rovnici

$$\frac{x+a}{x+b}+x+c=0, \tag{6.3.2}$$

kde x je neznámá; $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}$; $x\neq-\beta$, $\alpha\neq\beta$. Rovnici (6.3.2) pišme ve tvaru

$$x^2+(b+c+1)x+(a+bc)=0. \tag{6.3.3}$$

Diskriminantem rovnice (6.3.3) je výraz

$$D=(b+c+1)^2-4(a+bc). \tag{6.3.4}$$

Nechť $k\in\mathbb{N}$. Aby rovnice (6.3.2) neměla reálné kořeny, položme

$$(b+c+1)^2-4(a+bc)=-k, \tag{6.3.5}$$

odtud

$$a=\frac{\big((b-c)^2+2(b+c)+1+k\big)}{4}. \tag{6.3.6}$$

Nyní proveďme následující kroky:

1. Generujme přirozené číslo $k\in\langle 1;5\rangle$.
2. Zvolíme racionální čísla b,c.
3. Vypočítáme číslo a podle vztahu (6.3.6).

Obdobně, jako v předchozí subkapitole 6.2 lze ověřit, že provedením těchto kroků bude splněna podmínka $a\neq b$.

Vraťme se k dokončení popisu generátoru rovnice (6.3.1). Jelikož čísla b,c mají být podle kroku 2 racionální, položme $b=\frac{m}{n}$,

$c = \frac{r}{s}$; kde $m, r \in \mathbb{Z}$ a $n, s \in \mathbb{N}$. Dále mějme čísla $t \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{N}$. Pak rovnici (6.3.2) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{x + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right) + 1 + k\right)}{x + \frac{m}{n}} + x + \frac{r}{s} + \frac{t}{u} = \frac{t}{u}. \quad (6.3.7)$$

Označíme-li $\alpha = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{m}{n} - \frac{r}{s}\right)^2 + 2\left(\frac{m}{n} + \frac{r}{s}\right) + 1 + k\right)$, $\beta = \frac{m}{n}$, $\gamma = \frac{r}{s} + \frac{t}{u}$, $\delta = \frac{t}{u}$; získáváme požadovanou rovnici (6.3.1), kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$; $x \neq -\beta$, $\alpha \neq \beta$. Shrňme, že pro její sestavení můžeme využít např. tento postup:

1. Generujme přirozené číslo $k \in \langle 1; 5 \rangle$.
2. Zadáme racionální čísla $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$.

7. Rovnice $\frac{x+a}{x+b} + \frac{x+c}{x+d} = e$

7.1. Rovnice s racionálními kořeny

Sestavme rovnici

$$\frac{x+a}{x+b} + \frac{x+c}{x+d} = e, \quad (7.1.1)$$

kde x je neznámá, $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$; $a \neq b$, $c \neq d$, $x \neq -b$, $x \neq -d$. Požadujme, aby tato rovnice měla racionální kořeny $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{r}{s}$; kde $m, r \in \mathbb{Z}$; $n, s \in \mathbb{N}$.

Nechť $e \neq 2$. Rovnici (7.1.1) pišme ve tvaru

$$x^2 + \frac{a+b+c+d-e(b+d)}{2-e}x + \frac{ad+bc-bde}{2-e} = 0. \quad (7.1.2)$$

Předpokládejme, že výše uvedená x_1, x_2 jsou kořeny rovnice (7.1.2), pak podle Viètových vzorců lze psát:

$$x_1 + x_2 = \frac{-a-b-c-d+e(b+d)}{2-e}, \quad (7.1.3)$$

$$x_1 x_2 = \frac{ad+bc-bde}{2-e}. \quad (7.1.4)$$

Ze vztahu (7.1.3) dostáváme

$$c = (x_1 + x_2)(e-2) - a - b - d + e(b+d). \quad (7.1.5)$$

Dosazením vztahu (7.1.5) do (7.1.4) obdržíme

$$d = \frac{(x_1 + x_2)(2 - e) + b\,(b(1 - e) + (x_1 + x_2)(2 - e) + a)}{a - b}. \tag{7.1.6}$$

Nyní budeme požadovat splnění podmínky $c \neq d$. Pokud by platilo $c = d$, pak pro $x \neq -b$, $x \neq -d$ a $e \neq 2$ podle (7.1.1) získáváme rovnici

$$\frac{x + a}{x + b} + 1 = e, \tag{7.1.7}$$

která má kořen $x = \frac{b(e-1)-a}{2-e}$. Nyní je vše připraveno k tomu, abychom uvedli posloupnost kroků, jejichž provedením získáme rovnici (7.1.1). Může být následující:

1. Zvolíme racionální a, b, e taková, že $a \neq b$ a $e \neq 2$.
2. Vypočítáme pomocné číslo $k = \frac{b(e-1)-a}{2-e}$.
3. Zadáme racionální kořeny $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = \frac{r}{s}$ různé od k i od $(-b)$.
4. Vypočítáme racionální číslo d podle vztahu (7.1.6).
5. Vypočítáme racionální číslo c podle vztahu (7.1.5).

Tím tedy získáváme rovnici (7.1.1) mající racionální kořeny x_1, x_2 a racionální koeficienty a, b, c, d, e.

8. Závěr

Tento text je souhrn odvození, která bylo potřeba provést pro daný typ rovnice. Na první pohled se sestavení rovnice může jevit velmi jednoduché, avšak po provedení podrobné analýzy dané rovnice lze namítnout, že kromě zavedení nezbytných podmínek je potřeba zvolit **vhodnou strategii**, pomocí které bude možno získat požadovanou rovnici.

Literatura

[1] Kubát, J. (2004.). *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha: Prometheus, 2004.

[2] Kubát, J., Hrubý, D. & Pilgr, J. (1996). *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum.* Praha: Prometheus.

Abstract

This paper deals with the categorization of high school equations leading to quadratic equations. For the pre-selected type of equation, a tool (simple algorithm) is then derived, whose task is to assemble the equation of the desired type. The user of the given tool usually inputs the roots of the equation and requests that the obtained equation has rational, respectively, integer coefficients. The tools (algorithms) can be implemented in many CAS systems, but for the simplicity of these algorithms, free available GeoGebra is sufficient. Recall that four types of equations were analyzed in the previous issue of the journal:

1. $ax^2 + bx + c = 0$,
2. $\frac{a}{x+b} = x + c$,
3. $ax(bx + c) = d$,
4. $a(bx + c)^2 + d = 0$.

In the next article, we will introduce other selected types of equations, which will draw on the strategies created in the previous issue of the journal.

Daniel Tyr
Střední zdravotnická škola a vyšší odborná škola zdravotnická Karlovy Vary
Poděbradská 1247/2
360 01 Karlovy Vary
e-mail: dan258@centrum.cz