Ivana Kolingerová

Triangulace s hranovými kritérii - Šípkové Růženky právem nebo neprávem zapomenuté?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 65 (2020), No. 4, 223–233

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148477`

Triangulace s hranovými kritérii – Šípkové Růženky právem nebo neprávem zapomenuté?

Ivana Kolingerová

Abstrakt. Planární triangulace zadané množiny bodů je častým základem aplikací, proto vzniklo mnoho metod, jak triangulaci zkonstruovat. Všechny metody se snaží dospět k trojúhelníkům „co nejrovnostrannějším“, což je možné zařídit optimalizací úhlových nebo hranových kritérií. Vzhledem k vynikajícím vlastnostem, všestrannosti a snadné konstrukci Delaunayovy triangulace, nejdůležitější a nejznámější představitelky úhlových kritérií, stojí ostatní typy triangulace, zejména hranově optimalizované, poněkud ve stínu. V tomto článku chceme připomenout dvě nejvýznamnější méně úspěšné hranově optimalizované konkurentky Delaunayovy triangulace, a to greedy triangulaci a lokálně optimální triangulaci, a předložit argumenty ve prospěch i v neprospěch jejich častějšího využití.

1. Úvod

Konstrukce planární triangulace množiny bodů je zajímavý geometrický problém, navíc potřebný pro řadu úloh, což nám poskytuje „alibi“ se jím zabývat. Protože množina bodů může být triangulována (exponenciálně) mnoha způsoby, vzniklo mnoho typů triangulace i algoritmů jejich konstrukce. Většinou je snaha vyhýbat se trojúhelníkům s příliš ostrými nebo tupými úhly, proto je přirozeným kritériem lokální (tj. v každé dvojici sousedních trojúhelníků) nebo dokonce globální (v celé triangulaci) maximalizace minimálního úhlu nebo minimalizace maximálního úhlu, ale cíle lze dosáhnout i preferencí krátkých hran.

Pro většinu aplikačních úloh je zcela postačující zvolit obecně známou Delaunayovu triangulaci (DT), poskytující triangulaci maximalizující minimální úhel globálně i lokálně. Tato volba je navíc podpořena faktem, že v „prakticky využitelné“ triangulaci, tedy takové, která byla konstruována s ohledem na dobrý tvar trojúhelníků, se vysoké procento hran shoduje s hranami v DT. Např. experimenty s triangulovaným terénním modelem ukázaly více než 90 % hran DT [30]. Přesto je možné, že se automatickou volbou DT o něco ochuzujeme – možná by dané aplikaci lépe vyhovovala jiná triangulace?

V tomto článku se podíváme na vlastnosti a konkrétní ukázky dvou hranově optimalizovaných triangulací, a to greedy a lokálně minimální triangulace, a uděláme si názor na jejich případnou užitečnost pro některé třídy problémů.

Prof. Dr. Ing. Ivana Kolingerová, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, e-mail: `kolinger@kiv.zcu.cz`

2. Triangulace jako optimalizační úloha

Předpokládáme vstupní data v podobě množiny bodů, typicky ležících v rovině nebo v tzv. „2.5D“, tj. bodů, které sice obsahují třetí (výškovou) souřadnici, ale žádné dva body neleží „nad sebou“. Pokud není v dalším textu řečeno jinak, tato třetí souřadnice není využita. Triangulace na těchto bodech může být definována s důrazem na hrany nebo na trojúhelníky:

Definice 1a (Hranová definice triangulace). Triangulace $T(P)$ množiny bodů $P = \{p_i : i = 0, \ldots, n-1\}$ v rovině je maximální množina hran E takových, že

- hrany z E se protínají jen v bodech z P,
- hrany z E dělí konvexní obal P na trojúhelníky.

Definice 1b (Simplexová definice triangulace). Triangulace $T(P)$ množiny bodů $P = \{p_i : i = 0, \ldots, n-1\}$ v rovině je rozklad konvexního obalu P na trojúhelníky.

Připomeňme, že hrany tvořící hranici konvexního obalu P patří do každé triangulace P.

Triangulace lze podle optimalizačních kritérií kategorizovat do následujících tříd:

- S optimalizací velikosti úhlů.

  Nejznámějším kritériem je maximalizace minimálního úhlu u Delaunayovy triangulace, viz např. [4], [9], [52], [53], [57], ale existuje také minimalizace maximálního úhlu [19], minimálního úhlu [20], maximální excentricity (infimum přes všechny vzdálenosti mezi vrcholy trojúhelníku a středem kružnice opsané) [7], [8] i další kombinace a deriváty těchto kritérií.

- S optimalizací délek hran.

  Nejznámější, ale v praxi málo užitečná je minimalizace váhy (tj. součtu délek hran, triangulace s minimální váhou – MWT), viz např. [3], [5], [6], [15], [38], [48], praktičtější je lokální minimalizace délek hran (lokálně minimální triangulace – LMT) nebo použití nejkratších vzájemně se neprotínajících (kompatibilních) hran (greedy/hladová triangulace – GT) [57]. Lze zmínit také minimalizaci maximální délky hrany [18].

- S neplanárními kritérii.

  Rovinné triangulace většinou poskytují dobrý základ pro interpolace v E^3 s výjimkou dat, kde se vyskytuje „schod“, prudká a velká změna výšek bodů v sousedních oblastech vstupních dat. Pro taková data se osvědčily tzv. datově závislé triangulace [17], což jsou triangulace s kritérii uvažujícími také výškovou souřadnici bodů, např. se optimalizuje úhel mezi normálami sousedních trojúhelníků. Touto třídou se v článku dále zabývat nebudeme, ale poznamenejme, že jde o užitečný koncept zejména pro triangulované modely terénu a digitalizovaného obrazu.

Kritéria je možné kombinovat do složitějších funkcí [36].

Triangulace s lokálními kritérii lze obecně zavést s využitím následující definice.

Definice 2 (Lokálně optimální triangulace (LOT)). Triangulace LOT(P) množiny bodů $P = \{p_i \colon i = 0, \ldots, n-1\}$ v rovině je z hlediska daného kritéria lokálně optimální, jestliže každá dvojice sousedních trojúhelníků tvořících konvexní čtyřúhelník je z hlediska tohoto kritéria optimální.

Globálně optimální triangulace musí samozřejmě také splňovat lokální optimalitu.

Delaunayova triangulace se častěji než variantou definice 2 zavádí kritériem prázdné kružnice opsané:

Definice 3 (Delaunayova triangulace (DT)). Triangulace DT(P) množiny bodů $P = \{p_i \colon i = 0, \ldots, n-1\}$ v rovině je Delaunayova triangulace právě tehdy, jestliže kružnice opsaná libovolnému trojúhelníku z DT(P) neobsahuje ve svém vnitřku žádný bod P.

Nevýhodou LOT triangulací je nejednoznačnost – může existovat více lokálně optimálních triangulací dané množiny s výjimkou DT, která je díky své lokální i globální optimalitě jednoznačná s výjimkou singulárních případů rozložení bodů (tj. s výjimkou bodů ležících na kružnici, kde uvnitř kružnice neleží žádné body). Lokálně optimální triangulace se typicky konstruují algoritmem prohazování hran (tzv. algoritmus lokálního prohazování) – v případě, že dvojice sousedních trojúhelníků tvoří konvexní čtyřúhelník, zkontroluje se její optimalita vzhledem k danému kritériu. Pokud dvojice není optimální, nahradí se druhou možnou dvojicí. Tyto testy se opakují, dokud nejsou všechny dvojice sousedních trojúhelníků optimální. I zde je DT ve výhodě, protože pro nekonvexní čtyřúhelník je jediná jeho možná triangulace optimální ve smyslu definice 3. Pro DT také existuje mnohem větší škála možných tříd algoritmů. Pro úlohy vyžadující začlenění daných, tzv. povinných, hran existuje varianta DT, tzv. DT s omezením (constrained DT – CDT).

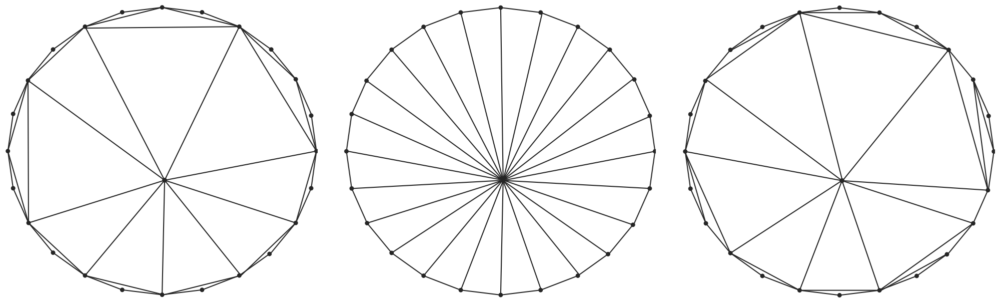
U globálních kritérií s výjimkou maximalizace minimálního úhlu bývá konstrukce složitější anebo pravděpodobně není v polynomiálním čase vůbec možná, což značně omezuje praktickou využitelnost těchto triangulací a zvyšuje jejich atraktivitu pro teoretický výzkum.

Zastavme se u kritéria minimalizace váhy triangulace. Triangulace s minimální váhou (MWT) je výzkumným snem několika generací, Mulzer a Rotte v [51] však přinesli důkaz NP-obtížnosti konstrukce MWT pro obecné množiny. Jedním směrem výzkumu MWT bylo i hodnocení různých triangulací po stránce vzdálenosti jejich váhy od váhy MWT. Váha DT může mít od váhy MWT vzdálenost $\Omega(n)$, není tedy v některých případech o nic lepší než kterákoliv jiná triangulace [31]. GT pak dosahuje vzdálenosti $\Omega(\sqrt{n})$ od optima [42]. V průměru a pro rovnoměrně rozložené body[1] se však obě triangulace chovají lépe [49], [45]. Výzkum se také orientoval na využití podgrafů MWT v kombinaci s dynamickým programováním, které pro některá rozložení bodů poskytují řešení v polynomiálním čase [6], pro některá data je ale výsledný MWT podgraf nesouvislý a pro získání zbylých částí MWT je zapotřebí exponenciální algoritmus. Nejnovější algoritmy jsou schopny zpracovat i některá neuniformní data o velikosti miliónů bodů v několika minutách [24], přestože zvládnutí všech možných konfigurací bodů v rozumném čase nebude nikdy možné.

[1] Body, jejichž souřadnice jsou vybírány rovnoměrně náhodně v zadaném intervalu hodnot.

3. Greedy triangulace

Definice 4 (Greedy triangulace (GT)). Greedy triangulace GT(P) množiny bodů $P = \{p_i\colon i = 0, \ldots, n-1\}$ v rovině je triangulace sestrojená greedy (hladovým) algoritmem, který při postupu od nejkratší k nejdelší hraně seznamu všech možných hran nad P seřazeného vzestupně přijme každou hranu neprotínající hrany již přijaté.



Obr. 1. Příklad triangulací pro porovnání: a) greedy triangulace, b) Delaunayova triangulace, c) lokálně minimální triangulace

Obr. 1 ukazuje typické chování. V obr. 1a GT generuje některé trojúhelníky tvarově velmi pěkné za cenu problematických trojúhelníků u hranice konvexního obalu. DT trojúhelníky v obr. 1b příliš nenadchnou, ale vyloženě problematických trojúhelníků jsme ušetřeni. Toto chování ovšem obecně nelze zaručit. Tvarové vlastnosti trojúhelníků v GT je navzdory výše uvedenému pozorování nutno hodnotit ve prospěch DT, pro kterou jsou kromě úhlového kritéria dokázány další zajímavé vlastnosti [52], zatímco pro GT podobné důkazy neexistují. Jistá pozornost byla vlastnostem GT věnována v oblasti aproximací úplných grafů [12].

Obr. 1 je nutné relativizovat ještě z jiného úhlu pohledu, pro rovnoměrně rozložené body můžeme očekávat vysokou podobnost GT a DT. Cho v [28] ukazuje, že pro taková data lze čekat minimálně 40 % společných hran.

GT lze snadno zkonstruovat hrubou silou – vygenerujeme všechny možné potenciální hrany jako všechny možné spojnice mezi všemi vrcholy a seřadíme je v pořadí rostoucí délky. Nejkratší hranu přijmeme do triangulace. Pokračujeme greedy (hladovým) algoritmem – potenciální hrana, která je na řadě, je přijata do triangulace, pokud neprotíná žádnou již přijatou hranu. Tento algoritmus je snadný, ale málo efektivní – časová složitost je $O(n^3)$ a paměťová $O(n^2)$.

Gilbert v [22] využil pro urychlení datovou strukturu založenou na úhlovém dělení a úsečkovém stromu, což sníží časovou složitost na $O(n^2 \log n)$, ale paměťové nároky spíše zhorší. Výhodou tohoto řešení je nezávislost na rozložení bodů.

Protože každý GT algoritmus, který nejprve vygeneruje všechny možné hrany, bude zatížen paměťovou složitostí $O(n^2)$ na jejich uložení a časovou složitostí $O(n^2 \log n)$ na jejich seřazení, novější metody se snaží generovat pouze kratší potenciální hrany, často s využitím nějaké „zakázané oblasti“ – okolí hrany, kde nemůže ležet žádný další vrchol triangulace. Ve většině případů je takováto redukce možná pouze pro rovnoměrně rozložené body.

Manacher a Zobrist v [50] rozhodují o vzájemné kompatibilitě hran pravděpodobnostní metodou. Algoritmus pracuje v očekávaném čase $O(n^2)$ s využitím $O(n)$ paměti. Lingas v [46] dokáže pro rovnoměrně rozložené body zkonstruovat GT v očekávaném čase $O(n \log^{1,5} n)$. Goldman v [23] využívá CDT k redukci počtu potenciálních hran na $O(n)$, algoritmus má časovou složitost $O(n^2 \log n)$. Levcopoulos a Lingas v [44] tento přístup dále rozvíjejí a docilují snížení časové složitosti na $O(n^2)$ v nejhorším případě s pamětí $O(n)$, v případě rovnoměrného rozložení bodů je očekávaná časová složitost převodu dokonce $O(n)$. Skupina algoritmů založených na CDT je elegantní, ale implementačně složitá.

Dickerson et al. v [13] generují pouze $O(n \log n)$ „krátkých“ potenciálních hran, pro hledání využívá graf nejbližších sousedů (nearest neighbour graph – NNG) a počet hran dále eliminuje na $O(n)$ pomocí „zakázaných“ oblastí, tedy oblastí v okolí hran, pro které je dokázáno, že v nich v případě GT nemůže ležet žádný další vrchol. Pro rovnoměrně rozložené body algoritmu stačí očekávaný čas $O(n \log n)$ a paměť $O(n)$. Jak ukázali Drysdale et al. v [16], s jiným testovacím okolím a využitím bucket sortu poklesne očekávaný čas i paměťová spotřeba na $O(n)$. Připomeňme, že lineární složitost není dosažitelná v nejhorším případě, protože složitost problému triangulace je $O(n \log n)$, jak bylo dokázáno převodem z problému řazení.

Protože pro práci s triangulací obvykle potřebujeme nejen hrany, ale také trojúhelníky, musí být hranově orientované konstrukční algoritmy ještě doplněné dodatečným dohledáním trojúhelníků. I z těchto důvodů se jako nejvhodnější jeví možnost výpočtu GT z DT v čase i paměti $O(n)$ na základě algoritmu Levcopoulose a Krznarice [43]. DT umožňuje vyhnout se generování a řazení „dlouhých hran“.

Greedy algoritmus je založen na rozhodování vždy o jedné hraně. Tento princip je možné nahradit tzv. lookahead principem, kdy vytváříme kombinace dvou či více vzájemně se neprotínajících hran a ty testujeme vůči již přijatým hranám [34], [60], [21]. To umožní dále zmenšit váhu triangulace za cenu růstu algoritmické složitosti.

Porovnání složitosti konstrukce GT oproti DT tedy dopadá v neprospěch GT – algoritmická a implementační složitost konstrukce GT je minimálně stejná jako DT.

Méně obecné konfigurace bodů méně komplikují život při konstrukci GT – v DT můžeme narazit na problémy vlivem chybných výsledků testů polohy bodu vůči nadrovině nebo sféře počítaných v omezené přesnosti počítačové aritmetiky.

V praxi často potřebujeme dodatečně vložit nové anebo zrušit staré body, tzv. dynamizaci triangulace. GT z tohoto úhlu pohledu dosud nebyla zkoumána, ale dá se předpokládat, že podobné změny mohou mít globální vliv, i když dobře lokalizované změny by mohly většinu triangulace nechat nepoškozenou. Podobné chování vykazuje i DT – malé změny jsou lokální, i když teoreticky může být počet potřebných změn kvadratický, což lze dobře dokázat pro (již zmíněný) algoritmus lokálního prohazování – libovolné dvě triangulace jsou od sebe vzdálené průměrně $O(n)$ prohození hran (flipů), i když v nejhorším případě je obecně možná vzdálenost $O(n^2)$ [40]. Bylo již také dokázáno, že nalezení „flipovací vzdálenosti“ mezi dvěma triangulacemi je NP-úplné [39], [47], [56], [54].

GT pro pohybující se body – kinetickou GT – lze považovat z podstaty definice této triangulace za problematickou, zatímco kinetická DT (KDT) existuje, viz např. [1].

GT v prostoru E^3 byla zatím zkoumána sporadicky. Trojrozměrnou obdobou planární triangulace je tetrahedralizace, tedy dělení konvexního obalu na čtyřstěny. Greedy princip může buď i v E^3 zacházet s hranami anebo se zaměřit na stěny čtyřstěnů – trojúhelníky seřazené podle jejich obsahu. Je ovšem známo, že ne všechny datové množiny lze tetrahedralizovat a že jen některé rovinné algoritmy jsou použitelné v E^3. Chin a Wang v [27] ukazují konfigurace tří či více hran, které se neprotínají, ale vzájemně se blokují takovým způsobem, že jejich konvexní obal nelze tetrahedralizovat. GT algoritmus v E^3 proto kromě protínajících se hran/stěn nesmí přijímat ani hrany/stěny vzájemně se blokující. Výsledný algoritmus založený na CDT běží v $O(n^5)$ čase s $O(n^2)$ pamětí.

Paralelizovat lze výpočet obou triangulací – u DT existuje celá řada algoritmů, viz např. inkrementální konstrukci v [11], [41], inkrementální vkládání v [29], [58], [32], [33], rozděl a panuj v [11], [26], [25], u GT by nejsnazším řešením bylo současné testování vzdálenějších potenciálních hran na průsečíky.

Hlavní praktickou výhodou GT je principiálně mnohem snazší začlenění povinných hran než do DT: přijmeme nejprve povinné hrany a ty doplníme potřebným počtem co nejkratších kompatibilních hran, což se při výpočtu hrubou silou snadno udělá, zatímco algoritmy založené na předvýběru potenciálních hran s tím mohou mít problém. Pro tuto tzv. constrained greedy triangulaci (CGT) ale zatím nebyl publikován efektivní algoritmus a jde o zajímavou výzkumnou výzvu.

GT se v praxi využívá jen málo. Výsledky využití CGT ve srovnání s CDT pro výpočet vrstevnic na modelu terénu lze najít v [35], pro reprezentaci digitalizovaného obrazu v [55]. Výsledky v obou aplikacích nebyly přesvědčivě lepší než s využitím CDT.

4. Lokálně minimální triangulace

Definice 5 (Lokálně minimální triangulace (LMT)). Lokálně minimální triangulace je lokálně optimální triangulace podle definice 2 s kritériem kratší diagonály v konvexním čtyřúhelníku.

Výraznou nevýhodou LMT je nejednoznačnost – na dané množině bodů může triangulací s tímto kritériem existovat více. Tvarové vlastnosti LMT nebyly zatím příliš zkoumány.

Pro LMT zatím nebyla dokázána žádná úhlová či jiná zajímavá vlastnost. Protože optimalizace váhy vede k podobné kvalitě trojúhelníků jako optimalizace úhlů, lze očekávat dobré tvary trojúhelníků a triangulaci podobnou GT, viz příklad na obr. 1c.

Pro LMT nebylo zatím navrženo tolik algoritmů jako pro DT nebo GT, ale po jednoduché úpravě kritéria lze snadno použít algoritmy prohazování hran nebo inkrementálního vkládání bodů vyvinuté pro DT. Testované kritérium je jednodušší, je však nutné kromě samotné délky hrany testovat konvexitu příslušné dvojice trojúhelníků.

LMT v E^3 nebyla zatím zkoumána, kritérium kratší hrany by muselo být nahrazeno obsahem trojúhelníka.

Případná paralelizace by mohla využívat podobné techniky jako DT, tedy např. paralelní práci ve vzdálených oblastech dat, kdy je malé nebezpečí zablokování (deadlocku).

LMT zatím našla využití především jako zdroj hran pro tzv. LMT skeleton, což je graf obsahující hrany přítomné ve všech LMT a důležitý základ metod výpočtu MWT [15], [2], [14], [6], [10].

LMT lze doporučit pro kinetická data, tj. pro pohybující se body, protože LMT kritérium je výpočetně jednodušší než DT kritérium, a dojde tedy k určité úspoře výpočtů. Pro udržení průběžné optimality kinetické triangulace je nutno kritérium po každé změně polohy bodů kontrolovat a triangulaci adekvátně měnit, takže i malá úspora při výpočtu kritéria má významný vliv (při hledání okamžiků topologické změny triangulace je zapotřebí opakovaně hledat kořeny polynomu, při využití LMT místo DT lze očekávat pokles stupně polynomu o dva) [59].

Pro aplikace s pohybujícími se daty, např. pro detekci kolizí, může být také zapotřebí pracovat s grafem nejbližších sousedů (NNG). Jeho hrany jsou podmnožinou DT a je snadné dokázat, že v LMT obsaženy být nemusí, v praxi však v LMT najdeme NNG hrany všechny nebo téměř všechny [37].

5. Souhrn porovnání triangulací

Tab. 1 shrnuje porovnání vlastností a možností využití GT a LMT ve srovnání s DT. Pro rozhodnutí, kterou triangulaci využít, lze uvést následující doporučení:

- Pokud potřebujeme triangulaci s dokázanými tvarovými vlastnostmi, je vhodné volit DT.
- Pokud je naším hlavním zájmem jednoduchost algoritmu konstrukce i za cenu vysoké algoritmické složitosti, je vhodné volit GT.
- Pokud je pro nás nejdůležitější rychlost výpočtu i za cenu větší implementační náročnosti, jsou vhodnými kandidáty LMT nebo DT.
- Pokud naše aplikace potřebuje využít povinné hrany, je vhodné zvážit GT.
- Pokud vrcholy triangulace nově vznikají a zase zanikají anebo se dokonce pohybují, nejlepší volbou je LMT.
- Pokud si nejsme jisti, co přesně potřebujeme, je DT nejmenší riziko.

Vlastnost	DT	GT	LMT
Dokázané tvarové vlastnosti trojúhelníků	$*$		
Složitost konstrukce			$*$
Paměťové nároky	0	0	0
Snadnost využití povinných hran		$*$	
Globalita změn vlivem dodatečného přidávání nebo ubírání bodů	0	0	0
Odolnost vůči singulárním případům		$*$	
Kinetická verze			$*$
Možnost paralelizace	0	0	0
Možnost E^3 rozšíření	$*$	0	0

Tab. 1. Shrnutí vlastností Delaunayovy, greedy a lokálně minimální triangulace (hvězdička označuje triangulaci, která z hlediska dané vlastnosti dopadá nejlépe, 0 případy, kdy jsou na tom porovnávané triangulace podobně)

6. Závěr

V článku byly podány základní informace o méně často využívaných triangulacích s hranovými kritérii, a to greedy triangulaci a lokálně minimální triangulaci, a jejich srovnání se všeobecně známou Delaunayovou triangulací. Přes právem nejsilnější postavení DT mohou její konkurentky být pro některé aplikace zajímavou alternativou.

Poděkování. Tato práce byla podpořena MŠMT projektem PUNTIS (LO1506) v rámci programu NPU I. Poděkování patří také doc. RNDr. A. Slavíkovi, Ph.D., za inspirativní připomínky k rukopisu.

L i t e r a t u r a

[1] Agarwal, P. K., Kaplan, H., Rubin, N., et al.: *Kinetic Voronoi diagrams and Delaunay triangulations under polygonal distance functions.* Discrete Comput. Geom. 54 (2015), 871–904.

[2] Aichholzer, O., Aurenhammer, F., Cheng, S. W., Katoh, N., Rote, G., Taschwer, M., Xu, Y. F.: *Triangulations intersect nicely.* Discrete Comput. Geom. 16 (1996), 339–359.

[3] Aichholzer, O., Aurenhammer, F., Hainz, R.: *New results on MWT subgraphs.* TR Nr. 140. Institute for Theoretical Computer Science, Graz University of Technology, 1998.

[4] Aurenhammer, F.: *Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure.* ACM Comput. Surv. 23 (1991), 345–405.

[5] Bartánus, M., Ferko, A., Mag, R., Niepel, L., Plachetka, T., Šikudová, E.: *New heuristics for minimum weight triangulation.* In: WSCG 1996 Conference Proceedings, University of West Bohemia, Pilsen, 1996, 31–40.

[6] Beirouti, R., Snoeyink, J.: *Implementations of the LMT heuristic for minimum weight triangulation.* In: Proc. 14th Annual Symposium on Comput. Geom., Minneapolis, 1998, 96–105.

[7] Bern, M., Edelsbrunner, H., Eppstein, D., Mitchell, S., Tan, T. S.: *Edge insertion for optimal triangulations.* Discrete Comput. Geom. 10 (1993), 47–65.

[8] Bern, M., Eppstein, D.: *Mesh generation and optimal triangulation.* In: Computing in Euclidean Geometry, 2nd Edition, Lecture Notes Series on Computing, Vol. 4, World Scientific, Singapore, 1995, 47–123.

[9] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O.: *Computational geometry. Algorithms and applications.* Springer, Heidelberg, 1997.

[10] Bose, P., Devroye, L., Evans, W.: *Diamonds are not a minimum weight triangulation's best friend.* Internat. J. Comput. Geom. 12 (2002), 445–454.

[11] Cignoni, P., Montani, C., Perego, R., Scopigno, R.: *Parallel 3D Delaunay triangulation.* In: Proc. of Eurographics '93, 1993, C129–C142.

[12] Das, G., Joseph, D.: *Which triangulations approximate the complete graph.* In: Proceedings of the International Symposium on Optimal Algorithms, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 401, Springer-Verlag, 1989, 168–183.

[13] Dickerson, M. T., Drysdale, R. L., McElfresh, S., Welzl, E.: *Fast greedy triangulation algorithms.* In: Proc. 10th Annual Symposium on Comput. Geom., 1994, 211–220.

[14] Dickerson, M. T., Keil, J. M., Montague, M. H.: *A large subgraph of the minimum weight triangulation.* Discrete Comput. Geom. 18 (1997), 289–304.

[15] Dickerson, M. T., Montague, M. H.: *A (usually?) connected subgraph of the minimum weight triangulation.* In: Proc. 12th Symposium on Comput. Geom., Philadelphia, 1996, 204–213.

[16] Drysdale, R. L. S., Rote, G., Aichholzer, O.: *A simple linear time greedy triangulation algorithm for uniformly distributed points.* IIG-Report-Series-408. Technische Universität Graz, 1995.

[17] Dyn, N., Levin, D., Rippa, S.: *Data dependent triangulations for piecewise linear interpolation.* IMA J. Numer. Anal. 10 (1990), 137–154.

[18] Edelsbrunner, H., Tan, T. S.: *A quadratic time algorithm for the minmax length triangulation.* SIAM J. Comput. 22 (1991), 527–551.

[19] Edelsbrunner, H., Tan, T. S., Waupotisch, R.: *An $O(N^2 \log N)$ time algorithm for the minmax angle triangulation.* SIAM J. Stat. Sci. Comput. 13 (1992), 994–1008.

[20] Eppstein, D.: *The farthest point Delaunay triangulation minimizes angles.* Comp. Geom.-Theor. Appl. 1 (1992), 143–148.

[21] Fang, Y.: *An improved Lawson local-optimization procedure and its applications.* TR, University of Victoria, 2018.

[22] Gilbert, P. D.: *New results on planar triangulations.* Tech. Rep. ACT-15. Coord. Sci. Lab., University of Illinois, Urbana, 1979.

[23] Goldman, S.: *A space efficient greedy triangulation algorithm.* Inform. Process. Lett. 32 (1989), 191–196.

[24] Haas, A.: *Solving large-scale minimum-weight triangulation instances to provable optimality.* In: 34th International Symposium on Computational Geometry, 2018, article no. 44, 14 pages.

[25] Hardwick, J. C.: *Implementation and evaluation of an efficient parallel Delaunay triangulation algorithm.* In: Proceedings of the 10th Annual Symposium on Parallel Algorithms and Architectures, 1997, 22–25.

[26] Chen, M. B., Chuang, T. R., Wu, J. J.: *Efficient parallel implementations of 2D Delaunay triangulation with high performance Fortran.* In: Proceedings of the 10th SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing, SIAM Press, 2001.

[27] Chin, F. Y., Wang, C. A.: *On greedy tetrahedralization of points in 3D.* In: Algorithms and Computation, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 834, 1994, 532–540.

[28] Cho, H. G.: *On the expected number of common edges in Delaunay and greedy triangulation.* Journal WSCG 5 (1997), 50–59.

[29] Chrisochoides, N., Sukup, F.: *Task parallel implementation of the Bawyer-Watson algorithm.* In: Proceedings of the 5th International Conference on Numerical Generation in Computational Fluid Dynamic and Related Fields, Mississippi State University, 1996.

[30] Kim, Y. S., Park, D. G., Jung, H. Y., Cho, H. G., Dong, J. J., Ku, K. J.: *An improved TIN compression using Delaunay triangulation.* In: Proceedings of Seventh Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, Seoul, 1999, 118–125.

[31] Kirkpatrick, D. G.: *A note on Delaunay and optimal triangulations.* Inform. Process. Lett. 10 (1980), 127–128.

[32] Kohout, J., Kolingerová, I., Žára, J.: *Practically oriented parallel Delaunay triangulation in E^2 for computers with shared memory.* Comput. Graph. 28 (2004), 703–718.

[33] Kohout, J., Kolingerová, I., Žára, J.: *Parallel Delaunay triangulation in E^2 and E^3 for computers with shared memory.* Parallel Comput. 31 (2005), 491–522.

[34] Kolingerová, I.: *Greedy triangulation improvement over lookahead search.* In: Computer Engineering and Informatics '99 Proceedings, STU, Košice, 1999, 34–39.

[35] Kolingerová, I., Dolák, M., Strych, V.: *Eliminating contour line artefacts by using constrained edges.* Comput. Geosci. 35 (2009), 1975–1987.

[36] Kolingerová, I., Ferko, A.: *Multicriteria-optimized triangulations.* Visual Comput. 17 (2001), 380–395.

[37] Kolingerová, I., Vomáčka, T., Maňák, M., Ferko, A.: *Neighbourhood graphs and locally minimal triangulations.* In: Transactions on Computational Science XXXIII, Springer, Heidelberg, 2018, 115–127.

[38] Krznaric, D.: *Progress in hierarchical clustering & minimum weight triangulation.* PhD Thesis. University of Lund, Sweden, 1997.

[39] Lawson, C. L.: *Transforming triangulations.* Discrete Math. 3 (1972), 365–372.

[40] Lawson, C. L.: *Software for C1 surface interpolation.* In: J. R. C. Rice: Mathematical Software III, Academic Press, New York, 1977, 161–194.

[41] Lee, F.: *Constructing the constrained Delaunay triangulation on the Intel Paragon.* In: Proceedings of the 13th Annual Symposium on Computational Geometry, ACM, 1997, 464–467.

[42] Levcopoulos, Ch.: *An $\Omega(\sqrt{n})$ lower bound for the nonoptimality of the greedy triangulation.* Inform. Process. Lett. 2 (1987), 247–251.

[43] Levcopoulos, Ch., Krznaric, D.: *The greedy triangulation can be computed from the Delaunay triangulation in linear time.* Comput. Geom. 14 (1999), 197–220.

[44] Levcopoulos, Ch., Lingas, A.: *Fast algorithms for greedy triangulation.* Proc. of the 2nd Scandinavian Workshop on Algorithm. Theory, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 447, Springer-Verlag, Berlin, 1990, 238–250.

[45] Lingas, A.: *The greedy and Delaunay triangulations are not bad in the average case.* Inform. Process. Lett. 22 (1986), 25–31.

[46] Lingas, A.: *Greedy triangulation can be efficiently implemented in the average case.* In: Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 344, 1988, 253–261.

[47] Lubiw, A., Pathak, V.: *Flip distance between two triangulations of a point-set is NP-complete.* In: 24th Canadian Conference on Computational Geometry, 2012, 127–132.

[48] Magová, I., Ferko, A., Niepel, L.: *On edges elimination for the shortest mesh.* Journal WSCG 5 (1997), 396–403.

[49] Manacher, G. K., Zobrist, A. L.: *Neither the greedy nor the Delaunay triangulation of a planar point set approximates the optimal triangulation.* Inform. Process. Lett. 9 (1979), 31–34.

[50] Manacher, G. K., Zobrist, A. L.: *Probabilistic methods with heaps for fast-average-case greedy algorithms.* Adv. Comput. Res. 1 (1983), 261–278.

[51] Mulzer, W., Rotte, G.: *Minimum-weight triangulation is NP-hard.* J. ACM 55 (2008), article no. 11, 29 pages.

[52] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K.: *Spatial tesselations: concepts and applications of Voronoi diagrams*. John Wiley, Chichester, 1992.

[53] O'Rourke, J.: *Computational geometry in C*. Cambridge University Press, New York, 1994.

[54] Osherovich, E., Bruckstein, M. M.: *All triangulations are reachable via sequences of edge flips: an elementary proof*. Comput. Aided Geom. Design 25 (2008), 157–161.

[55] Partyk, M., Polec, J., Kolingerová, I., Březina, A.: *Triangulations in a hybrid scheme for shape independent transform coding*. In: Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems, Ghent, 2003, 137–141.

[56] Pilz, A.: *Flip distance between triangulations of a planar point set is APX-hard*. Comput. Geom. 47 (2014), 589–604.

[57] Preparata, F. P., Shamos, M. I.: *Computational geometry: an introduction*. Springer, Heidelberg, 1985.

[58] Puppo, E., Davis, L. S., DeMenthon, D., Teng, A.: *Parallel terrain triangulation*. Int. J. Geogr. Inf. Syst. 8 (1994), 105–128.

[59] Vomáčka, T., Kolingerová, I., Maňák, M.: *Kinetic locally minimal triangulation: theoretical evaluation and combinatorial analysis*. Visual Comput. 36 (2020), 757–765.

[60] Yu, X., Morse, B. S., Sederberg, T. W.: *Image reconstruction using data-dependent triangulation*. IEEE Comput. Graph. 21 (2001), 62–68.