Oliver Bukovianský
Algebraické identity a cirkulační matice

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 3, 14–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/148458

Algebraické identity a cirkulační matice

Oliver Bukovianský, Gymnázium Praha 5, Na Zatlance

Abstrakt. Seznámíme se s algebraickou identitou $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ a představíme si její důležité vlastnosti. Zejména se budeme věnovat jejímu vyjádření ve tvaru determinantu cirkulační matice (dále jen CM). Zaměříme se i na determinanty CM jiných řádů, které budeme rozkládat na součin ireducibilních polynomů s využitím pravidel pro determinanty. Dále definujeme Kroneckerův součin a zmíníme jeho souvislost s mocninami determinantů CM. V závěru je uveden pokročilejší problém týkající se koeficientů výsledných determinantů CM.

1. Algebraické identity

Asi každý s elementární znalostí matematiky má povědomí o následujících třech algebraických vzorcích, vztazích nebo jinak řečeno identitách:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Kromě těchto základních identit známe i komplikovanější vzorce:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

nebo

$$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7 = (a-b)^7.$$

Všechny uvedené vztahy dávají do rovnosti dvě možná vyjádření stejného výrazu. Jsou zapsané tak, aby na levé straně rovnosti byl polynom v tzv. roznásobené podobě a na pravé straně polynom v tzv. rozložené podobě. Tohoto pojmenování se budeme dále držet.

Krásu podobných rovností můžeme náležitě ocenit přidáním třetí proměnné c, díky čemuž vznikne řada zajímavějších vztahů. Jedním z nejjednodušších a nejelegantnějších polynomů tří proměnných je známá identita

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Možná jste na ni už narazili, je totiž celkem oblíbená v algebraických úlohách, například při úpravách výrazů. Skutečně platí, že velmi jednoduchý výraz na levé straně rovnosti lze rozložit na komplikovaný součin dvou závorek. K odvození vztahu samozřejmě postačuje roznásobit pravou stranu $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ a sečíst členy lišící se jen koeficientem – tím dostaneme levou stranu $a^3+b^3+c^3-3abc$ v roznásobené podobě.

Z takového postupu ale nevyplyne hlubší důvod, proč právě mezi těmito polynomy platí rovnost. Podstatu rovnosti můžeme nalézt při upravování výrazu $a^3+b^3+c^3-3abc$, ze kterého se budeme pokoušet vytvořit výše zmíněný součin dvou závorek (rozložit polynom na součin). Po několika úpravách skutečně dojdeme k pravé straně, přičemž budeme využívat elementární algebraické manipulace, jako například vytýkání závorky nebo známé vzorce:

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2= \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)= \\
&= (a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)= \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).
\end{aligned}$$

Důležité je zmínit, že závorka $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ je již dále nerozložitelná na součin polynomů nižších stupňů s reálnými koeficienty. Z toho důvodu nazvěme polynom $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ *ireducibilním nad množinou* $\mathbb{R}$ a spokojme se s jeho současnou podobou.

Polynom $a^3+b^3+c^3-3abc$ a jeho rozklad

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

mají zajímavou vlastnost, která se v souvislosti s algebraickou identitou často zmiňuje. Představíme ji na číselném triku: Posluchačovi řekneme, aby nám sdělil tři čísla, jejichž součet je roven nule. Posluchač nám bude jistě chtít ztížit situaci a nadiktuje nám tři velká čísla, samozřejmě v souladu s naší počáteční podmínkou: 589, 437, $-1\,026$. My ho poté překvapíme tvrzením, že se součet třetích mocnin těchto tří čísel rovná trojnásobku jejich součinu. Ohromený posluchač s kalkulačkou v ruce dojde v obou případech ke stejnému výsledku: $-792\,255\,654$. Důvod je prostý. Hledaná tři čísla označme proměnnými a, b, c. Rovnost $a^3+b^3+c^3=3abc$ nastane například tehdy, když pro a, b, c platí původní podmínka $a+b+c=0$, jelikož se pak bude rovnat nule i celý součin $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$, přičemž, jak víme, tento součin je jen jiným vyjádřením polynomu $a^3+b^3+c^3-3abc$.

2. Cirkulační matice a jejich determinanty

Identita $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ nabízí další zajímavost. Lze ji totiž vyjádřit jako determinant takzvané *cirkulační matice*. Nejprve ke druhému pojmu názvu. Matice je tabulka čísel nebo jiných matematických objektů, neboli prvků, obecně obdélníkového tvaru. Často využívané jsou, zejména v lineární algebře, čtvercové matice se stejným počtem řádků jako sloupců. Cirkulační matice jsou speciálním typem čtvercových matic. Jejich prvky se cyklicky opakují, čehož si můžeme všimnout na obecném zápisu cirkulační matice a jejího zkráceného značení:

$$C_{n,n} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_n & c_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Circ}(c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}, c_n).$$

Pro čtenáře, kteří pojem determinant matice slyší poprvé, se ho pokusíme stručně vysvětlit (korektní definice viz [1]). Determinant lze počítat pouze ze čtvercových matic. Pokud jsou prvky matice A pouze reálná čísla, výsledkem determinantu matice A bude součet členů tvořených reálnými čísly, tudíž celý determinant bude roven reálnému číslu. Determinant se definuje pomocí permutace množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a znaménka dané permutace:

$$|A_{n,n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \dots a_{n,\pi(n)}.$$

Stručně řečeno, prvky matice se skládají do jednotlivých členů takovým způsobem, aby byly v každém členu obsaženy prvky ze všech řádků a ze všech sloupců čtvercové matice právě jednou. A znaménko $\mathrm{sgn}(\pi)$ vyjadřuje, zda je počet inverzí v dané permutaci π sudý ($\mathrm{sgn}(\pi) = 1$) nebo lichý ($\mathrm{sgn}(\pi) = -1$). Přičemž inverze v permutaci π je dvojice prvků (i, j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, taková, že $i < j$ a zároveň $\pi(i) > \pi(j)$.

Zkusme nyní spočítat determinanty z cirkulačních matic (dále v textu značené CM) obsahujících proměnné. Determinant CM 1×1 (1. řádu) je pouze samotná proměnná a. Determinant CM 2. řádu je poněkud zajímavější, jedná se dokonce o algebraickou identitu zmíněnou výše:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Nyní se dostáváme k výpočtu determinantu CM 3. řádu. Zde se opět objevuje polynom $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Seznámíme se i s determinanty CM čtvrtého a vyšších řádů. Nejprve nás ale bude zajímat rozložená forma polynomu. Po výpočtu determinantu čistě z definice jsme obdrželi výraz $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Mohli bychom výpočtem determinantu jiným způsobem obdržet ihned rozloženou formu $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$? Odpověď na otázku zní ano, nejprve ale bude třeba zmínit několik pravidel pro práci s determinanty (viz [1]).

1. Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.
2. Determinant matice obsahující lineárně závislé řádky či sloupce je roven nule.
3. Jestliže matice B vznikla z matice A prohozením dvou řádků nebo dvou sloupců, pak platí $|A| = -|B|$.
4. Jestliže matice B vznikla z matice A vynásobením jednoho řádku nebo sloupce reálným číslem c, pak platí $c|A| = |B|$.
5. Jestliže matice B vznikla z matice A přičtením libovolného násobku řádku k jinému řádku nebo libovolného násobku sloupce k jinému sloupci, pak se determinanty matic A, B rovnají.

Díky výše uvedeným pravidlům bude velmi snadné determinant CM 3. řádu vyjádřit v rozložené formě:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

V prvním kroku jsme použili pravidlo 5. (přičetli jsme druhý a třetí sloupec k prvnímu a determinant se nezměnil), ve druhém kroku jsme použili pravidlo 4.

Rozklad na součin jednotlivých polynomů vzniklých výpočtem z definice determinantu je téměř neproveditelný jednoduchým algebraickým výpočtem. Je to zřejmé u polynomu

$$a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4a^2bd + 4ab^2c - 4bc^2d + 4acd^2,$$

který je roven determinantu CM 4. řádu. Tento polynom čtyř proměnných lze upravit do tvaru součinu tří ireducibilních polynomů. Výpočet je složitý nejenom díky přílišné délce výrazu (což samo o sobě nemusí být podmínkou náročného výpočtu), ale především kvůli nutnosti použít řadu sofistikovanějších algebraických úprav působících trikově. Rozklad na součin můžeme ovšem mnohem elegantněji provést pomocí úprav determinantu, stejně jako jsme dospěli k rozkladu

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

v minulém odstavci. Nejdříve k prvnímu sloupci přičtěme všechny zbylé sloupce podle pravidla 5.:

$$\det(\mathrm{Circ}(a,b,c,d)) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ d+a+b+c & a & b & c \\ c+d+a+b & d & a & b \\ b+c+d+a & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Nyní si vzpomeňme na 4. pravidlo a z determinantu vytkněme výraz

$(a+b+c+d)$. V prvním sloupci díky této úpravě zbudou samé jedničky:

$$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Je dobré zmínit, že vytknutá závorka je již jedním ze tří hledaných polynomů tvořících rozklad. Nyní se z determinantu pokusíme vytknout druhou závorku pomocí výše zmíněných pravidel. Sčítání sloupců ale nikam nevede, asi nelze sestavit výraz, který bychom mohli vytknout s využitím 4. pravidla. Zaměřme se proto na řádky. Přičtení všech řádků k prvnímu opět nikam nevede. K libovolnému řádku determinantu můžeme přičíst ale i libovolný násobek jiného řádku, jak nám říká 5. pravidlo. Proto od prvního řádku můžeme odečíst druhý a čtvrtý řádek a následně přičíst třetí řádek:

$$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1-1+1-1 & b-a+d-c & c-b+a-d & d-c+b-a \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Nejen že se zbavíme jedniček, ale po vytknutí -1 ze vzniklých výrazů získáme shodnou závorku, která násobí všechny prvky prvního řádku:

$$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 0 & -(a-b+c-d) & (a-b+c-d) & -(a-b+c-d) \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix},$$

přičemž je zřejmé, že nulu lze přepsat takto: $0(a-b+c-d)$. Nyní je jasné, že závorku lze vytknout před determinant:

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}.$$

Pokud bychom se snažili ze zbylého determinantu vytknout další ireducibilní polynom, naše snaha by se nám nevyplatila. Výsledek determinantu je totiž ireducibilní polynom. Proto nám nezbude nic jiného, než determinant spočítat z definice nebo využít Laplaceův rozvoj, abychom dospěli ke kompletnímu rozkladu na součin polynomů.

Laplaceův rozvoj je další metodou sloužící k zrychlení výpočtu determinantu. Pomocí rozvoje jsme schopni determinant matice n-tého řádu upravit na součet determinantů řádů $n-1$, což může v mnoha případech výpočet usnadnit. Definici Laplaceova rozvoje je možné nalézt např. v [1].

Ukážeme, jak k úpravě determinantu

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & d & a \end{vmatrix}$$

dojdeme pomocí rozvoje. Kvůli usnadnění výpočtu pomocí rozvoje upravíme determinant tak, aby jeden z jeho řádků nebo sloupců obsahoval co největší množství nul. Pokud se nám podaří takový řádek či sloupec sestavit pomocí známých úprav, budeme mít šanci, že se tím výpočet velmi zredukuje. Mnoho determinantů nižších řádů se vynuluje kvůli tomu, že je budeme násobit právě některými nulovými prvky sestaveného řádku nebo sloupce. V našem případě je nejvhodnější rozvoj provádět podle prvního řádku, který upravíme. Třetí sloupec přičteme ke čtvrtému sloupci a druhý sloupec přičteme ke třetímu sloupci:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b & b+c \\ 1 & d & d+a & a+b \\ 1 & c & c+d & d+a \end{vmatrix}.$$

Tím vzniklo v prvním řádku dostatečné množství nul. Použijeme Laplaceův rozvoj (viz [1]) a dostaneme:

$$(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & a+b & b+c \\ 1 & d+a & a+b \\ 1 & c+d & d+a \end{vmatrix}.$$

Náš výpočet tak přešel k výpočtu determinantu matice 3×3. Výsledkem je ireducibilní polynom $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd$. Celý rozklad pak vypadá následovně:

$$\det(\mathrm{Circ}(a,b,c,d)) =$$
$$= a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4a^2bd + 4ab^2c - 4bc^2d + 4acd^2 =$$
$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd).$$

3. Kroneckerův součin

Co kdybychom některou proměnnou nebo proměnné v CM nahradili nulou? Tím se bezpochyby cirkulačnost matice nezmění. Podstatně se ale změní výsledný determinant, jak je vidět v ukázce, kde u determinantu CM 3. řádu došlo k nahrazení proměnné c nulou:

$$\det(\mathrm{Circ}(a,b,0)) = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab).$$

My budeme věnovat pozornost především pravidelnému nahrazování proměnných nulou. Pokud nahradíme například v determinantu CM 4. řádu každou druhou proměnnou nulou, vznikne následující polynom v rozložené formě, který je roven druhé mocnině determinantu CM 2. řádu:

$$\det(\mathrm{Circ}(a,0,c,0)) = \begin{vmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & c & 0 & a \end{vmatrix} = [(a+c)(a-c)]^2 = (\det(\mathrm{Circ}(a,c)))^2.$$

Podobně náhradou čtyř z proměnných v CM 6. řádu obdržíme velmi podobný výsledek:

$$\det(\mathrm{Circ}(a,0,0,d,0,0)) = [(a+d)(a-d)]^3 = (\det(\mathrm{Circ}(a,d)))^3.$$

Nebo náhradou za každou druhou proměnnou, ovšem znovu s determinantem CM 6. řádu, obdržíme:

$$\det(\mathrm{Circ}(a,0,c,0,e,0)) =$$
$$= [(a+c+e)(a^2+c^2+e^2-ac-ae-ce)]^2 = (\det(\mathrm{Circ}(a,c,e)))^2.$$

Zdá se, že s jakou frekvencí proměnné nahrazujeme nulami, takové získáváme mocniny determinantů CM nižších řádů. Naši hypotézu lze dokázat pomocí Kroneckerova součinu. Kroneckerův součin dvou matic dává matici třetí, kterou spočítáme pomocí následujícího schématu:

$$A_{m,n} \otimes B_{k,l} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kl} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}B_{k,l} & a_{12}B_{k,l} & \cdots & a_{1n}B_{k,l} \\ a_{21}B_{k,l} & a_{22}B_{k,l} & \cdots & a_{2n}B_{k,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_{k,l} & a_{m2}B_{k,l} & \cdots & a_{mn}B_{k,l} \end{pmatrix}.$$

My využijeme pro důkaz hypotézy větu (1) z článku [2], spojující determinant matice a Kroneckerův součin. Pro Kroneckerův součin čtvercových matic $A_{m,m}$, $B_{n,n}$ platí vztah:

$$\left| A_{m,m} \otimes B_{n,n} \right| = \left| (A_{m,m}) \right|^{n} \left| (B_{n,n}) \right|^{m}. \tag{1}$$

Vztah působí elegantně, ovšem velmi „nedobytně“. Proč něco takového platí? Pouze napovíme, že důkaz věty využívá vlastních čísel matic.

Pokud zmíněný vztah pro determinant Kroneckerova součinu aplikujeme na náš problém, je důkaz naší hypotézy velmi snadný. Chceme dokázat, že pro determinant obecné CM $\mathrm{Circ}(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n)$ s prvky střídavě proloženými řadou k nul

$$\det(\mathrm{Circ}(c_1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, c_2, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, c_3, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, \ldots,$$
$$\ldots, c_{n-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, c_n))$$

bude platit, že výsledný determinant vyjde jakožto jeho $k+1$ mocnina

$$(\det(\mathrm{Circ}(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n)))^{k+1}.$$

Nejprve se zaměřme na nejjednodušší případ cirkulační matice rozšiřované nulou

$$\operatorname{Circ}(a,0,b,0)=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ b & 0 & a & 0\\ 0 & b & 0 & a\end{pmatrix}.$$

Rozšířenou cirkulační matici lze přepsat jako Kroneckerův součin původní cirkulační matice s jednotkovou maticí 2×2, protože nuly v jednotkové matici způsobí vložení nul a jedničky ponechání prvků původní matice:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & b\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ b\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} & a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ b & 0 & a & 0\\ 0 & b & 0 & a\end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že i libovolnou matici

$$\operatorname{Circ}(c_1,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\times},c_2,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\times},c_3,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\times},\ldots,c_{n-1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k\times},c_n)$$

lze vyjádřit jako Kroneckerův součin příslušné $\operatorname{Circ}(c_1,c_2,\ldots,c_{n-1},c_n)$ a jednotkové matice řádu o jeden vyšší než počet vložených nul, tedy $k+1$:

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n\\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1}\\ c_{n-1} & c_n & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_1 & c_2\\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n & c_1\end{pmatrix}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}}_{I_{k+1}}.$$

Nyní to už bude velmi snadné, jelikož jednotková matice I libovolného řádu má determinant roven jedné.

Použitím vztahu (1) dostáváme:

$$\begin{aligned}
&\det(\mathrm{Circ}(c_1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, c_2, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, c_3, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, \ldots, \\
&\qquad \ldots, c_{n-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\times}, c_n)) = \\
&= \det((\mathrm{Circ}(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n)) \otimes I_{k+1}) \\
&= \det(\mathrm{Circ}(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n))^{k+1} (\det(I_{k+1}))^n \\
&= \det(\mathrm{Circ}(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n))^{k+1}.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

Úloha pro čtenáře

Na závěr uveďme zajímavost, kterou jsme vypozorovali pro členy CM. Pokud se zaměříme na determinanty CM sudých řádů, nikde zde nenajdeme člen, ve kterém by byly obsaženy všechny proměnné. Naopak pro liché řády bude platit, že tu vždy bude člen se všemi proměnnými. Důkaz obou těchto vlastností ponecháváme jako úkol pro čtenáře. Napovíme jen, že k řešení je příhodné využít vlastnosti permutací a modulární aritmetiky.

Poděkování

Děkuji doc. Ing. Ľubomíře Dvořákové, Ph.D., za nabídku k napsání článku v souvislosti s mojí prací SOČ. Vážím si její obětavé pomoci se strukturou a celkovou formou článku.

Literatura

[1] Olšák, P.: *Determinant.* [online]. [cit. 01.03.2020]. Dostupné z: http://petr.olsak.net/bilin/determinant4.pdf

[2] Schäcke, K.: *On the Kronecker product.* [online]. [cit. 01.03.2020]. Dostupné z: https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/henry/reports/kronthesisschaecke04.pdf

[3] Motl, L., Zahradník, M.: *Pěstujeme lineární algebru.* 3. vyd., Karolinum, Praha, 2002, http://matematika.cuni.cz/zahradnik-pla.html.