Rozhledy matematicko-fyzikální

Tereza Bártlová

Příběh jedné konstanty

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 2, 11–15

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148445`

L i t e r a t u r a

[1] Navarro, J.: *Tajemné π. Lze udělat kvadraturu kruhu?* Dokořán, Praha, 2018.

[2] Gielis, J.: *The Geometrical Beauty of Plants.* Atlantis Press, Paris, 2017.

[3] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Catenary. [online]. c2019 [cit. 9. 11. 2019]. Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary`

[4] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: The Old Packhorse Bridge, Carrbridge by Aviemore. [online]. c2019 [citováno 9. 11. 2019]. Dostupné z: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Old_Packhorse_Bridge,_Carrbridge_by_Aviemore._-_geograph.org.uk_-_58243.jpg`

[5] Bellos, A.: *Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech.* Dokořán, Praha, 2016.

Příběh jedné konstanty

Tereza Bártlová, MFF UK Praha

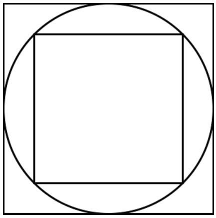
V matematice nepracujeme často s konstantami, rozhodně ne tolik jako ve fyzice, zato však matematické konstanty nezřídka tvoří pilíř nějaké ucelené teorie. Geometrii vévodí jedna ze základních a nejstarších v matematice – konstanta π, jejíž hodnota je přibližně 3,14.

Už dávní myslitelé věděli, že číslo π úzce souvisí s vlastnostmi kruhu. Jeho přesné vyčíslení je však zaměstnávalo po celá tisíciletí, patrně už od doby, kdy se člověk poprvé pokusil nakreslit dokonalý kruh.

První, kdo se skutečně systematicky touto konstantou zabýval, byl *Archimédés ze Syrakus.* Pochopil, že hledaná konstanta souvisí s obvodem kruhu. V dnešním matematickém jazyce bychom tuto vlastnost mohli vyjádřit vztahem

$$o = 2 \cdot \pi \cdot r,$$

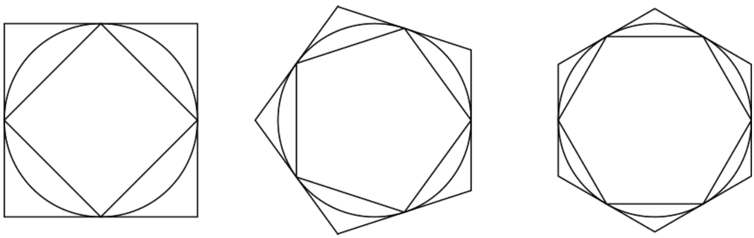
kde o vyjadřuje obvod kruhu a r značí jeho poloměr. Přesné vyčíslení obvodu kruhu však s sebou nese potíže, neboť je tvořen křivkou. Archimédés si uvědomoval, že je daleko jednodušší změřit délku úsečky než křivky, a tak problém zjednodušil. Místo toho, aby se pokoušel složitě měřit obvod kružnice, narýsoval dva mnohoúhelníky, mezi které kružnici „uvěznil“. Jeden mnohoúhelník byl do kružnice vepsaný a druhý kružnici obsahoval, neboli byl dané kružnici opsaný (obr. 1).



Obr. 1

Archimédovi bylo jasné, že obvod kružnice bude vždy menší než obvod opsaného mnohoúhelníku a současně větší než obvod mnohoúhelníku vepsaného. Když obvody obou mnohoúhelníků, jež kružnici z každé strany svíraly, změřil, dostal tím horní a dolní odhad pro obvod kružnice.

Možná, že vám to dnes nepřipadá jako převratná myšlenka, jenomže síla Archimédova objevu spočívá především v tom, že je možné oba odhady zjemnit tím, že budeme postupně zvětšovat počet stran obou mnohoúhelníků.



Obr. 2

Z obr. 2 je patrné, že čím větší počet stran bude mnohoúhelník mít, tím přesnější odhady pro hodnotu π dostaneme. Archimédés nakonec svou metodu vydržel opakovat tak dlouho, až se mu podařilo uvěznit kružnici mezi dva 96úhelníky, jejichž obvody spočítal. To byl vskutku heroický výkon, zejména vezmeme-li v úvahu, že neměl k dispozici soudobou algebraickou symboliku a veškeré výpočty prováděl ručně. Díky jeho píli a vytrvalosti se mu podařilo zjistit, že hodnota π leží mezi hodnotami

$$\frac{223}{71} \doteq 3{,}141 \quad \text{a} \quad \frac{22}{7} \doteq 3{,}143.$$

Ač byla jeho metoda výpočtu numericky velmi náročná, po dlouhá staletí zůstal tento výpočet ideově nepřekonán. Zástupy matematiků pouze zpřesňovaly Archimédovy výpočty a pomalu přidávaly desetinná místa postupně jedno po druhém. V 5. století našeho letopočtu čínský matematik *Cu Čchung-č'* posunul Archimédovu metodu o další krůček vpřed, když pomocí dvou 1228úhelníků dokázal určit, že se hodnota π nachází mezi čísly 3,141 592 6 a 3,141 592 7. Vzhledem k náročnosti výpočtu šlo však přidávání desetinných míst velmi pomalu, a tak se až do konce 1. tisíciletí nikomu nepodařilo číslo π určit na více než deset desetinných míst.

Poměr obvodu kružnice k jejímu průměru zkoumal v 16. století i holandský matematik *Adriaan Anthonisz*, který v roce 1585 objevil, že hodnota π leží někde mezi

$$\frac{377}{120} \quad \text{a} \quad \frac{333}{106}.$$

Jeho syn, *Adriaan Metius*, pak tuto hodnotu ještě zpřesnil a aproximoval číslo π pomocí zlomku

$$\pi = \frac{355}{113} \doteq 3{,}141\,592\,9.$$

Na to, jak malý je jmenovatel zlomku, má velmi zajímavé vlastnosti, neboť dává šest platných cifer čísla π. Což je po Archimédově odhadu velmi dobrá aproximace. Na počest jeho objevitele nazýváme zlomek „Metiusovým číslem".

Na přelomu 16. a 17. století udělal velký pokrok německý matematik *Ludolph van Ceulen*, kterému se podařilo určit číslo π na 35 desetinných míst. Na svoji práci byl tak hrdý, že si tuto hodnotu nechal vytesat na vlastní náhrobek. Z úcty k jeho početnímu výkonu se číslo π někdy nazývá také „Ludolfovým číslem".

Ačkoliv z čistě praktického hlediska nemělo vůbec žádný smysl pídit se po dalších číslicích desetinného rozvoje π, protože již tato přesnost naprosto postačovala k dovršení i těch nejkolosálnějších astronomických výpočtů, jaké si lze představit, úsilí o výpočet dalších a dalších desetinných míst pokračovalo a postupně se z něj stávala výzva. Matematici mezi sebou soutěžili, kdo přidá další číslici do desetinného rozvoje. Strategie výpočtu se však postupem času měnila.

Po objevení kalkulu v polovině 17. století se matematici začali na celou věc dívat ze zcela jiného úhlu pohledu. Náročná Archimédova metoda byla postupně nahrazena několika vzorci, které zjišťování hodnoty π urychlily.

Jeden z prvních vzorců pro π, který z těchto nových metod vzešel, byl součin
$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$
který odvodil *John Wallis*. Uvedené tři tečky ve vzorci naznačují, že se jedná o nekonečný součin, tedy součin, který obsahuje nekonečný počet členů. Čím více členů se do výpočtu zahrne, tím bude výsledek přesnější.

O něco později zveřejnil *Gottfried Leibniz* slavnou nekonečnou řadu
$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$
Zajímavost této řady tkví v tom, že poukazuje na souvislost π s lichými čísly. Její jednoduchost bere dech, ale k praktickému výpočtu hodnoty π se vůbec nehodí. Sečteme-li například první dvě stovky členů, stále ještě dostaneme o dost horší aproximaci π, než ke které dospěl před dvěma tisíci lety Archimédés.

Další zajímavou nekonečnou řadou, ve které se π objevuje, je
$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$$
již odvodil matematik *Leonhard Euler*. Ač je tato řada efektivnější než předchozí, postupným přidáváním dalších a dalších členů se ke skutečné hodnotě π přibližujeme stále dost pomalu. Je tedy jasné, že ne všechna vyjádření π jsou vhodná pro jeho výpočet.

Teprve matematici následujících generací vymysleli řady, které tyto výpočty zvládají rychleji. Na začátku 18. století *John Machin* vyvinul jednu z nejrychlejších, byť ne tak elegantních řad, která využívá vztahu
$$\pi=16\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$
S její pomocí rozdrtil všechny dosavadní rekordy a vypočítal π na sto desetinných míst.

Machinův vzorec s ještě větším zápalem zužitkovali k výpočtu další badatelé. Mezi ně patřil například anglický amatérský matematik *William Shanks*, jenž hledání dalších desetinných míst π zasvětil většinu života. Jemu se podařilo vypočítat 707 číslic. Později se však zjistilo, že při výpočtu 527. desetinného místa udělal chybu, což ovlivnilo všechny následující číslice. Uvážíme-li ale, že Shanks všechny výpočty prováděl „ručně“, je i tak jeho výkon hodný obdivu.

V 60. letech 18. století dokázal *Johann Heinrich Lambert* to, co všichni už dlouho tušili: π je iracionální číslo, z čehož mimo jiné vyplývá, že jeho desetinný rozvoj nikdy neskončí, a tudíž bychom se jeho výpočtem mohli bavit navěky. Nicméně zájem o výpočet π na mnoho desetinných míst neuhasl.

Technický vývoj postupem času způsobil, že pero a papír nahradily elektronické kalkulační stroje. Výpočty, které trvaly několik let, byly najednou hotové za několik sekund. Na konci 20. století se konečně podařilo pokořit hranici jedné miliardy číslic. To ovšem vůbec není důvod k tomu, aby vědci usnuli na vavřínech a nehledali další a další cifry. V následujících letech byly zaznamenány další pokroky, a to nejen díky rychlejšímu hardwaru, ale také díky novým algoritmům. Bylo by mylné se domnívat, že se vývoj výpočtu π zastavil. Naopak, nejnovější algoritmy výpočtu využívají poznatků z matematické analýzy či teorie pravděpodobnosti. Autorkou zatím posledního výpočtu je *Emma Harukaová Iwaová*, které se na počátku roku 2019 podařilo určit π s přesností na 31,4 bilionu číslic. Na výpočtu pracovalo 121 dní celkem 25 virtuálních počítačů. Je vidět, že číslo π dokáže potrápit nejen matematiky, ale také počítače.

Ač jsme uvedli, že znalost π s přesností na 40 desetinných míst je naprosto dostačující i pro astronomické výpočty, je nutné poznamenat, že jeho neustálé zpřesňování není zcela samoúčelné. V dnešní době se algoritmů pro výpočet hodnoty π na mnoho desetinných míst využívá například k testování integrity softwaru či hardwaru. Chyba v desetinném rozvoji totiž pomáhá odhalit chybu počítače.

Fascinace tímto číslem se však promítá i mimo sféru matematiky. Možná pro jednoduchost své definice se číslo π stalo společným tématem mezi matematiky i nematematiky. Prodlužování nekonečné řady číslic není jediná zábava – mnozí se také učí číslice nazpaměť. Aktuální světový rekord v Guinessově knize rekordů drží Ind *Suresh Kumar Sharma*, který v říjnu 2015 dokázal zpaměti odrecitovat 70 030 číslic.

Jako poctu tomuto číslu v roce 2009 americká Sněmovna reprezentantů podpořila myšlenku ustanovení 14. března jako Významného dne π. Američané totiž obvykle píší den a měsíc v opačném pořadí, tedy 3/14. Už to vidíte? Pozadu ovšem nezůstávají ani ostatní země světa. Dne 26. listopadu 2019 Generální konference UNESCO oficiálně prohlásila 14. březen za Mezinárodní den matematiky. Příznivci matematiky se tím mohou nechat inspirovat a tento den pořádně oslavit.