

Luděk Spíchal

Gielisova transformace logaritmické spirály

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 65 (2020), No. 2, 76–89

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/148249>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2020

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Gielisova transformace logaritmické spirály

Luděk Spíchal

Abstrakt. Logaritmická spirála byla od okamžiku svého objevu studována z mnoha různých pohledů. Prvotní fascinace matematiků, z nichž někteří věnovali logaritmické spirále značnou část svého tvůrčího potenciálu, se postupně přenesla do dalších oblastí nejen přírodních věd a promítá se tak např. do fyziky, biologie, ale také různých inženýrských disciplín či architektury. Článek ukazuje, že logaritmická spirála popisovaná jako hladká křivka s exponenciálně rostoucím poloměrem může být transformována do řady značně rozmanitých podob, z nichž některé jsou na jedné straně analogií reálně existujících objektů, na straně druhé pak mohou posloužit při konstrukci určitých technických zařízení či materiálů.

Úvod

Gielisovy transformace křivek byly původně představeny v souvislosti s modelováním tvarů různých biologických objektů, např. květů, plodů, uspořádání listů apod., např. [4], [5], [13]. Postupně se objevují studie poukazující na možnost využití transformovaných křivek rovněž v technických aplikacích, např. [9], [11], [12].

Záměrem článku je navázat na teoretické studie, které byly dosud provedeny v oblasti tzv. Gielisovy superformule a Gielisových křivek. Počátek uvedené problematiky sahá do 19. století a souvisí s prací francouzského matematika Gabriela Lamého, který zobecnil rovnici elipsy do tvaru

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1, \quad (1)$$

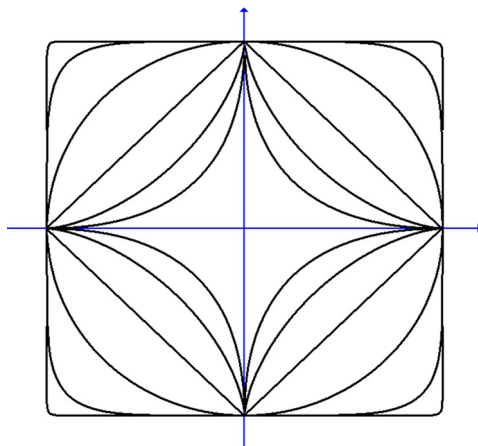
kde $a, b, n \in \mathbb{R}^+$. Křivky popsané touto rovnicí jsou označovány jako *Lamého křivky*. Na obrázku 1 vidíme několik příkladů, kde např. pro $n = 2/3$ mluvíme o *asteroidě* ($a = b$), pro $n \rightarrow \infty$ se tvar blíží obdélníku. Speciálním případem pro $n = 2$ je elipsa [3], [4], [10]. Křivku (1) lze rovněž vyjádřit v polárních souřadnicích (ρ, θ) ,

$$\rho = \left(\left| \frac{\cos \theta}{a} \right|^n + \left| \frac{\sin \theta}{b} \right|^n \right)^{-1/n}. \quad (2)$$

V polovině 20. století Lamého křivky (nejen) pro matematiku znovu objevil dánský vědec a literát Piet Hein, který pro jejich označení použil termín *superelipsa* [2]. V 90. letech minulého století pak belgický botanik Johan Gielis rovnicí (2) zobecnil nahrazením jediného exponentu n třemi nezávislými exponenty n_1, n_2, q a doplněním parametru $\frac{m\theta}{4}$ do argumentu goniometrických funkcí. Získal tak rovnici ve tvaru [3], [4]

$$\rho = \left(\left| \frac{1}{a} \cos \frac{m\theta}{4} \right|^{n_1} + \left| \frac{1}{b} \sin \frac{m\theta}{4} \right|^{n_2} \right)^{-1/q}, \quad (3)$$

Mgr. LUDĚK SPÍCHAL, Ústav matematiky a statistiky, PřF MU, Kotlářská 2, 611 53 Brno
a Česká lesnická akademie, Lesnická 9, 541 01 Trutnov, e-mail: spichal@clatrutnov.cz



Obr. 1. Lamého křivky pro $n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, 2, 6, 50$, přičemž $a = b$ (křivky pro ostatní případy získáme změnou měřítka na osách)

kde $a, b, m, n_1, n_2, q \in \mathbb{R}^+$. Gielisova transformace spočívá v nahrazení rovinné křivky určené v polárních souřadnicích rovnicí $\rho = f(\theta)$ křivkou

$$\rho = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \frac{m\theta}{4} \right|^{n_1} + \left| \frac{1}{b} \sin \frac{m\theta}{4} \right|^{n_2} \right)^{-1/q}. \quad (4)$$

Gielis použil pro označení transformačních rovnic (3) a (4) termín *superformule*. Vhodné kandidáty takových transformací, jak bude dále ukázáno, lze hledat zejména v oblasti spirál nebo křivek, které jsou v polárních souřadnicích popsány pomocí goniometrických funkcí.

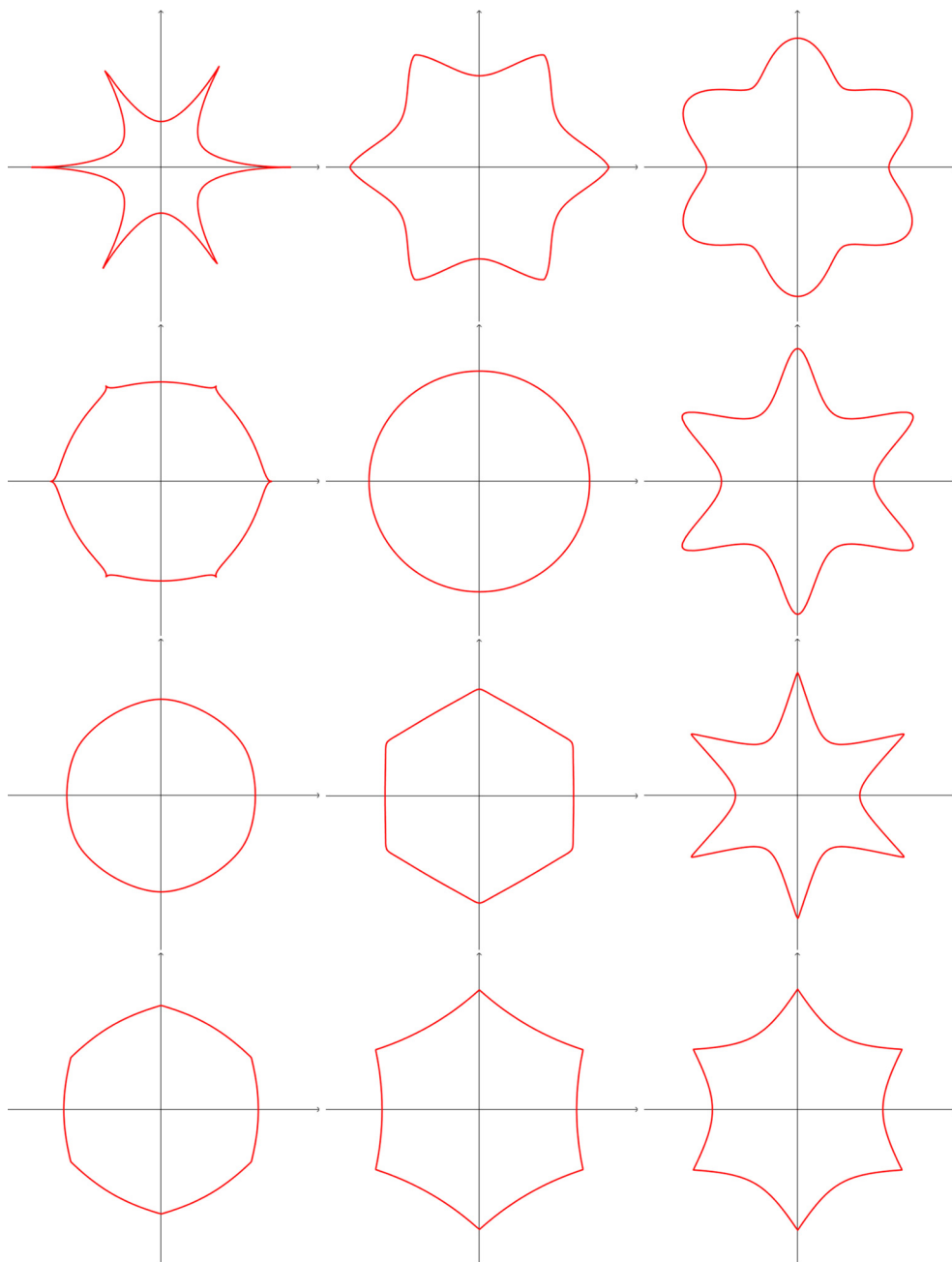
Bez újmy na obecnosti v rovnici (3) položíme $a = b = 1$ (křivky pro ostatní případy získáme změnou měřítka na osách), dále položíme $n_1 = n_2 = p$ a zavedeme označení

$$g_{m,p,q}(\theta) = \left(\left| \cos \frac{m\theta}{4} \right|^p + \left| \sin \frac{m\theta}{4} \right|^p \right)^{-1/q}. \quad (5)$$

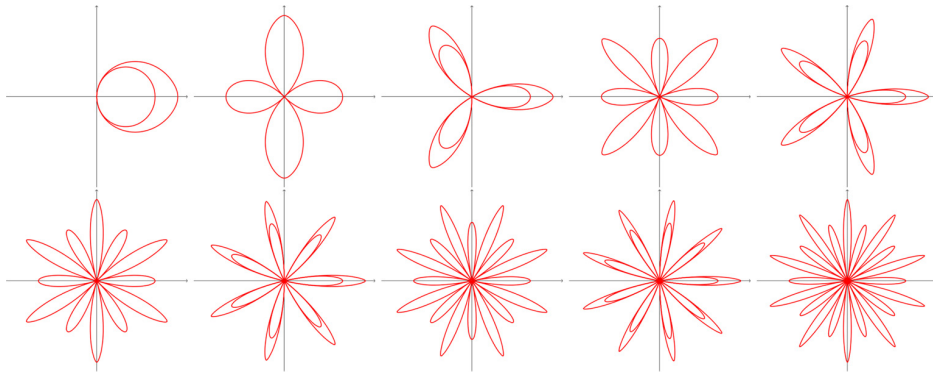
Křivku danou rovnicí $\rho = g_{m,p,q}(\theta)$ lze interpretovat jako Gielisovu transformaci jednotkové kružnice se středem v počátku, a to pro různé volby parametrů m, p, q [14]. Obr. 2 ukazuje, že tyto Gielisovy křivky, které získáme z rovnice $\rho = g_{m,p,q}(\theta)$, vytvářejí mnohem komplexnější množinu tvarů než Lamého křivky. V [3], [5], [13] lze nalézt řadu příkladů přírodních tvarů, které se Gielisovým křivkám značně podobají a lze je jimi modelovat.

Příkladem použití Gielisovy transformace křivky může být např. transformace Grandiho růžice (obr. 3) určená rovnicí

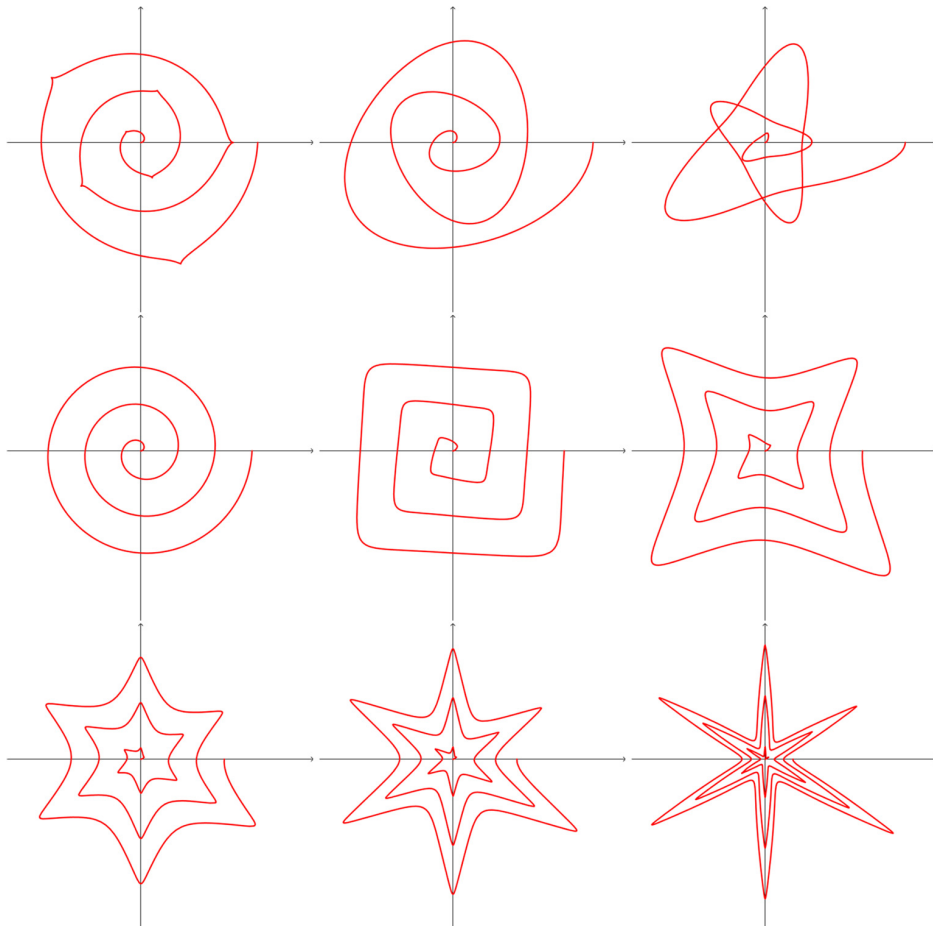
$$\rho = \cos(m\theta) \left(\left| \cos \frac{m\theta}{4} \right|^p + \left| \sin \frac{m\theta}{4} \right|^p \right)^{-1/q}, \quad (6)$$



Obr. 2. Gielisovy mnohoúhelníky popsané rovnicí $\rho = g_{m,p,q}(\theta)$, kde $m = 6$: první řada $q = 0,5$ (zleva: $p = 0,5$, $p = 1,5$, $p = 2,5$); druhá řada $q = 5$ (zleva: $p = 0,5$, $p = 2$, $p = 10$); třetí řada $q = 50$ (zleva: $p = 5$, $p = 20$, $p = 100$); čtvrtá řada $q = 500$ (zleva: $p = 100$, $p = 300$, $p = 500$)



Obr. 3. Gielisovy transformace Grandiho růžice ($p = q = 40$) pro $m = 1$ až $m = 10$



Obr. 4. Gielisovy transformace části Archimédovy spirály ($\theta \geq 0$): první řada $m = 2,5$, $q = 3$ (zleva: $p = 0,5$, $p = 4$, $p = 10$); druhá řada $m = 4$, $q = 10$ (zleva: $p = 2$, $p = 10$, $p = 20$); třetí řada $m = 6$, $q = 20$ (zleva: $p = 30$, $p = 50$, $p = 100$)

kde $\rho = \cos(m\theta)$ je rovnice Grandiho růžice v polárních souřadnicích.¹ V případě spirál je jednoduchým příkladem transformace Archimédovy spirály (obr. 4) určená rovnicí

$$\rho = a\theta \left(\left| \cos \frac{m\theta}{4} \right|^p + \left| \sin \frac{m\theta}{4} \right|^p \right)^{-1/q}, \quad (7)$$

kde $\rho = a\theta$ je rovnice Archimédovy spirály v polárních souřadnicích.

V článku budou zkoumány vlastnosti křivek vznikajících Gielisovými transformacemi logaritmických spirál. Logaritmická spirála je rovinná křivka určená rovnicí

$$\rho = ae^{b\theta}, \quad (8)$$

kde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hodnota koeficientu a odpovídá volbě $\theta = 0$, pro neposunutou spirálu má tento bod souřadnice $[a, 0]$. Pro koeficient b platí, že $b = \cotg \phi$, kde ϕ je tečný úhel, který svírá tečna spirály a průvodič v daném bodě, přičemž velikost úhlu nezávisí na volbě bodu (je konstantní). Pro $b < 0$ je logaritmická spirála pravotočivá, pro $b > 0$ je logaritmická spirála levotočivá.

Tvary podobné logaritmické spirále se přirozeně vyskytují u živočichů (např. schránka loďenky, rohy muflonů), v lidské anatomii (tvar žeber), ale také v botanice (např. při tvorbě listů, uspořádání šupin šišek) [6], [7].

Matsuura se v článku [10] detailně zabývá vlastnostmi Gielisových křivek definovaných rovnicí $\rho = g_{m,p,q}(\theta)$. Zavádí pojem Gielisových pravidelných mnohoúhelníků, které srovnává s pravidelnými mnohoúhelníky. Detailně se rovněž zabývá křivostí Gielisových křivek a dále odkazuje na řadu aplikací Gielisovy superformule zahrnujících např. modelování v buněčné biologii, numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, numerická řešení pohybu částic v supratekutých kapalinách aj.

V tomto článku porovnáme známá fakta o transformacích Gielisových křivek [10] s Gielisovou transformací logaritmické spirály, přičemž zavedeme pojmy *subspirála* ($p < 2$) a *superspirála* ($p > 2$). V dalších částech vyšetříme křivost subspirály a superspirály a posoudíme vliv parametru m na tvar spirál. Na závěr poukážeme na některé příklady přírodních tvarů analogických transformovaným spirálám.

1. Gielisova transformace logaritmické spirály

Užitím rovnic (5) a (8) obdržíme rovnici

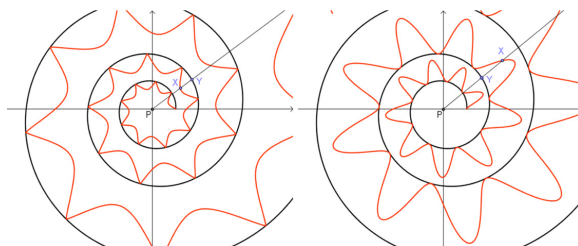
$$g_{a,b,m,p,q}(\theta) = ae^{b\theta} \left(\left| \cos \frac{m\theta}{4} \right|^p + \left| \sin \frac{m\theta}{4} \right|^p \right)^{-1/q}, \quad (9)$$

kteřá určuje Gielisovu transformaci logaritmické spirály. Rovinné křivky získané podle rovnice (9) budeme označovat symbolem $G_{a,b,m,p,q}$, tj. $G_{a,b,m,p,q}(\theta) = g_{a,b,m,p,q}(\theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta)$, logaritmickou spirálu symbolem $G_{a,b}$, tj. $G_{a,b}(\theta) = ae^{b\theta}(\cos \theta, \sin \theta)$. Na obr. 5 a 6 jsou znázorněny příklady transformací logaritmické spirály podle rovnice (9).

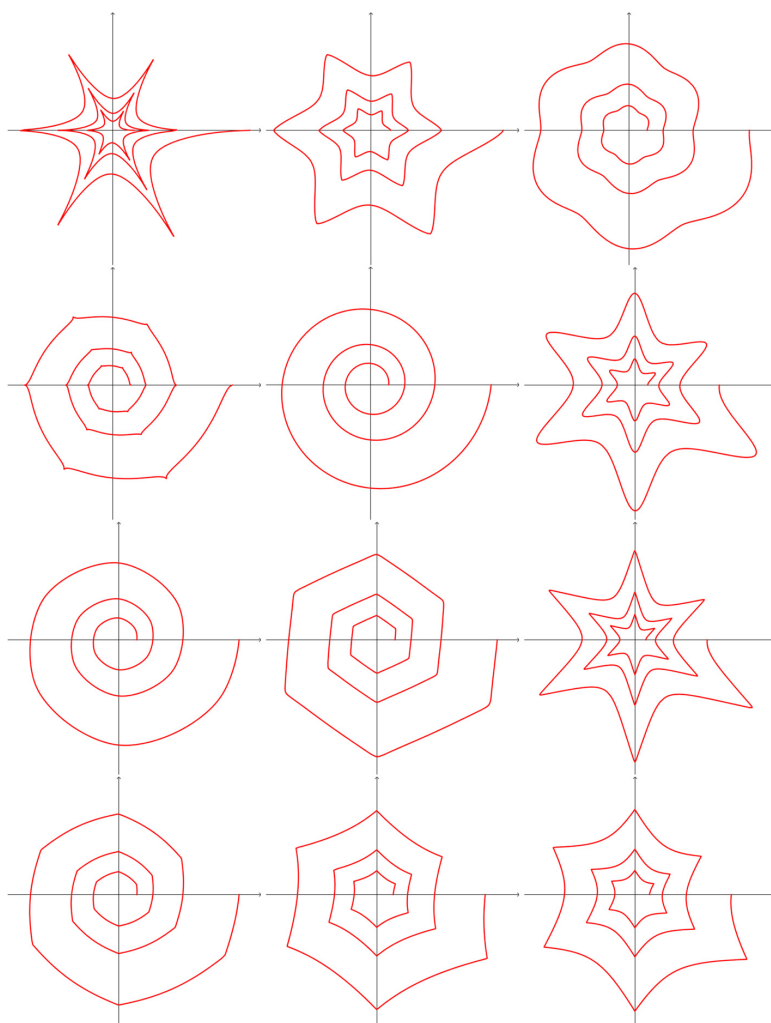
V článku budeme užívat následující termíny (obr. 5):

- (i) Pól spirály je bod, ke kterému se spirála blíží pro $\theta \rightarrow -\infty$. Pro neposunutou spirálu se nachází v počátku souřadné soustavy.

¹Číslo m udává počet okvětních lístků růžice. Pokud je m liché, pak má růžice m lístků. V případě, že je m sudé, má růžice $2m$ lístků.



Obr. 5. Gielisova transformace části logaritmické spirály ($\theta \geq 0$, vlevo $p < 2$, vpravo $p > 2$)



Obr. 6. Gielisovy transformace části logaritmické spirály ($\theta \geq 0$, $m = 6$, $b = 0,1$) podle rovnice (9): první řada $q = 0,5$ (zleva: $p = 0,5$, $p = 1,8$, $p = 2,2$); druhá řada $q = 5$ (zleva: $p = 0,5$, $p = 2$, $p = 10$); třetí řada $q = 50$ (zleva: $p = 5$, $p = 20$, $p = 100$); čtvrtá řada $q = 500$ (zleva: $p = 100$, $p = 300$, $p = 500$)

- (ii) Kotevním bodem $G_{a,b,m,p,q}$ budeme rozumět takový bod $G_{a,b}$, jehož poloha se při transformaci nemění, tj. platí $G_{a,b,m,p,q}(\theta) = G_{a,b}(\theta)$.
- (iii) Vrcholem $G_{a,b,m,p,q}$ budeme rozumět bod $G_{a,b,m,p,q}$ odpovídající hodnotě θ , kde $g_{m,p,q}$ má lokální maximum (později ukážeme, že pro $p < 2$ jsou vrcholy totožné s kotevními body).
- (iv) Závitem spirály budeme rozumět část křivky, kde θ je z intervalu $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ pro jisté $k \in \mathbb{Z}$.

V následujících tvrzeních jsou shrnuty některé vlastnosti transformovaných spirál, důkazy tvrzení přenecháváme čtenáři.

Lemma 1.1. *Parametr m určuje počet kotevních bodů $G_{a,b,m,p,q}$ na jednom závitě spirály následujícím způsobem:*

- (i) Pro $m \in \mathbb{N}$ má spirála na jednom závitě právě m kotevních bodů.
- (ii) Pro $m \notin \mathbb{N}$ odpovídá počet kotevních bodů na jednom závitě hodnotě $\lceil m \rceil$, tj. nejbližšímu vyššímu celému číslu.

Lemma 1.2. *Funkce $g_{m,p,q}$ má následující vlastnosti:*

- Pro $p < 2$ a $k \in \mathbb{Z}$ je rostoucí na intervalu $\left[\frac{(2k-1)\pi}{m}, \frac{2k\pi}{m} \right]$ a klesající na intervalu $\left[\frac{2k\pi}{m}, \frac{(2k+1)\pi}{m} \right]$.
- Pro $p = 2$ je konstatní na celé reálné ose.
- Pro $p > 2$ a $k \in \mathbb{Z}$ je rostoucí na intervalu $\left[\frac{2k\pi}{m}, \frac{(2k+1)\pi}{m} \right]$ a klesající na intervalu $\left[\frac{(2k+1)\pi}{m}, \frac{2(k+1)\pi}{m} \right]$.
- Pro každé $\theta = \frac{2k\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$, je $g_{m,p,q}(\theta) = 1$.

Z předchozího lemmatu vyplývá následující důsledek.

Důsledek 1.3.

- (i) Jestliže $p = 2$, pak $G_{a,b,m,p,q}$ je logaritmická spirála $G_{a,b}$.
- (ii) Necht $p < 2$ a body X, Y leží na stejných závitech spirál $G_{a,b,m,p,q}$ a $G_{a,b}$ a současně na jedné polopřímce vycházející z pólu spirály. Pak platí, že $|PX| \leq |PY|$, kde P je pól spirály. Jestliže $p > 2$, pak platí opačná nerovnost, tj. $|PX| \geq |PY|$.
- (iii) Jestliže $p < 2$, pak kotevní body i vrcholy $G_{a,b,m,p,q}$ odpovídají volbě $\theta = \frac{2k\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$. Jestliže $p > 2$, pak kotevní body $G_{a,b,m,p,q}$ odpovídají volbě $\theta = \frac{2k\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$, a vrcholy volbě $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Věta 1.4. *Funkce $g_{a,b,m,p,q}$ má následující vlastnosti:*

- (i) $g_{a,b,m,p,q}\left(\theta + \frac{2\pi}{m}\right) = e^{2\pi b/m} g_{a,b,m,p,q}(\theta)$.
- (ii) $\lim_{q \rightarrow \infty} g_{a,b,m,p,q}(\theta) = ae^{b\theta}$.

Důkaz. Tvzení (i) a (ii) jsou zřejmá, plynou ihned z definice funkce $g_{a,b,m,p,q}$. \square

Polopřímka vycházející z pólu spirály podle věty 1.4(i) protíná spirálu v bodech, jejichž vzdálenost od pólu spirály tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $e^{2\pi b/m}$. Podle věty 1.4(ii) se transformovaná spirála pro $q \rightarrow \infty$ blíží k logaritmické spirále.

Pro $p < 2$ budeme nazývat $G_{a,b,m,p,q}$ *subspirálou* logaritmické spirály, pro $p > 2$ bude $G_{a,b,m,p,q}$ *superspirálou* logaritmické spirály.²

2. Křivost subspirály a superspirály

Křivost lze obecně charakterizovat jako míru odchýlení tvaru křivky od přímky, jejíž křivost je nulová. Pokud uvažíme, že spirály jsou určené rovnicí (9), a použijeme vztah pro křivost křivky zadané v polárních souřadnicích, pak obdržíme

$$\kappa_{a,b,m,p,q}(\theta) = \frac{g_{a,b,m,p,q}(\theta)^2 + 2g'_{a,b,m,p,q}(\theta)^2 - g_{a,b,m,p,q}(\theta)g''_{a,b,m,p,q}(\theta)}{(g_{a,b,m,p,q}(\theta)^2 + g'_{a,b,m,p,q}(\theta)^2)^{3/2}}. \quad (10)$$

Pro $p < 2$ funkce $x \mapsto |x|^p$ nemá 2. derivaci v nule, tudíž g nemá 2. derivaci v bodech $\frac{2k\pi}{m}$ a v těchto bodech tedy není křivost definována. Jestliže do vzorce (10) dosadíme $g_{a,b,m,p,q}(\theta) = ae^{b\theta}g_{m,p,q}(\theta)$, pak po úpravě obdržíme

$$\kappa_{a,b,m,p,q}(\theta) = \frac{1}{ae^{b\theta}} \cdot \frac{g(\theta)^2 + 2(bg(\theta) + g'(\theta))^2 - g(\theta)(b^2g(\theta) + 2bg'(\theta) + g''(\theta))}{(g(\theta)^2 + (bg(\theta) + g'(\theta))^2)^{3/2}}, \quad (11)$$

kde místo $g_{m,p,q}(\theta)$ píšeme zkráceně pouze $g(\theta)$.

Jelikož druhý zlomek ve vzorci (11) představuje $\frac{2\pi}{m}$ -periodickou funkci, postačuje vyšetřit křivost na intervalu $[0, \frac{2\pi}{m})$. Při vyšetřování křivosti transformovaných spirál se zaměříme na kotevní body a vrcholy spirál, tj. určíme křivost pro $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$, resp. $\theta = \frac{2k\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$. Vzhledem k výše uvedenému bude postačující provést výpočet pro $\theta = \frac{\pi}{m}$, resp. $\theta = 0$.

Věta 2.1. Pro křivost $\kappa_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m})$ platí následující vztahy:

(i) $\kappa_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m}) = \frac{1}{g_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m})} \cdot \frac{1}{(1+b^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{m^2p(p-2)}{16q(1+b^2)}\right).$

(ii) Pokud $p < 2$, pak platí

- $\kappa_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m}) < 0$, jestliže $q < \frac{m^2p(2-p)}{16(1+b^2)}$,
- $\kappa_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m}) = 0$, jestliže $q = \frac{m^2p(2-p)}{16(1+b^2)}$,
- $\kappa_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m}) > 0$, jestliže $q > \frac{m^2p(2-p)}{16(1+b^2)}$.

(iii) Pokud $p \geq 2$, pak $\kappa_{a,b,m,p,q}(\frac{\pi}{m}) > 0$.

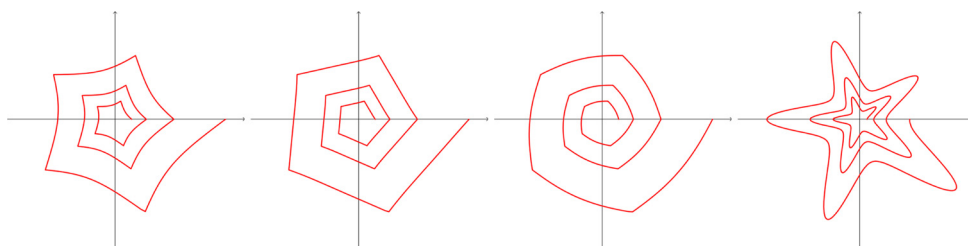
²Použitá označení jsou analogií k *subelipse* ($n < 2$) a *superelipse* ($n > 2$), které odpovídají rovnicí (1), srov. obr. 1.

Důkaz. K důkazu tvrzení (i) stačí do vzorce (11) dosadit

$$g\left(\frac{\pi}{m}\right) = 2^{(p-2)/(2q)}, \quad g'\left(\frac{\pi}{m}\right) = 0, \quad g''\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{m^2 p(2-p)}{16q} 2^{(p-2)/(2q)}.$$

Tvrzení (ii) a (iii) vyplývají přímo z tvrzení (i). \square

V tvrzení (ii) předchozí věty je pro volbu $p < 2$ (subspirála) zmíněna závislost křivosti na hodnotě parametru q . Na obr. 7 (tři obrázky zleva) jsou znázorněny příklady tvarů křivek se zápornou (první zleva), nulovou (druhý zleva) a kladnou (druhý zprava) křivostí v bodech, které jsou „v polovině“ mezi kotevními body. Obrázek zcela vpravo znázorňuje superspirálu ($p > 2$), která má ve vrcholech kladnou křivost.



Obr. 7. Subspirála ($p = 1$, zleva postupně $q = 1$, $q = m^2 p/16$, $q = 3$) a superspirála (vpravo, $p = 10$), $m = 5$, $b = 0,1$

Věta 2.2. Necht $p > 2$. Pro křivost $\kappa_{a,b,m,p,q}(0)$ platí následující vztahy:

(i) $\kappa_{a,b,m,p,q}(0) = \frac{1}{a(1+b^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{m^2 p}{16q(1+b^2)}\right).$

(ii) Pokud

- $q < \frac{m^2 p}{16(1+b^2)}$, pak $\kappa_{a,b,m,p,q}(0) < 0$,
- $q = \frac{m^2 p}{16(1+b^2)}$, pak $\kappa_{a,b,m,p,q}(0) = 0$,
- $q > \frac{m^2 p}{16(1+b^2)}$, pak $\kappa_{a,b,m,p,q}(0) > 0$.

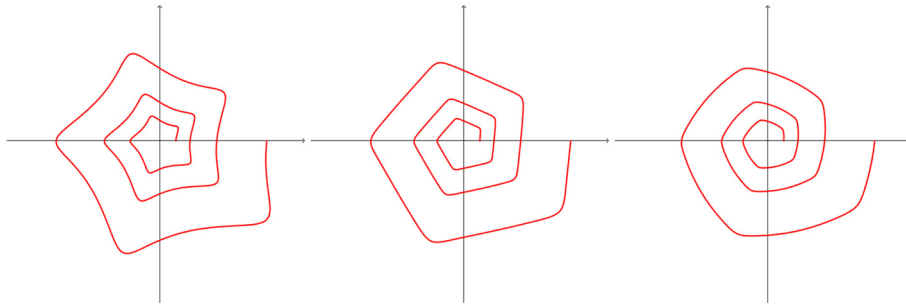
Důkaz. K důkazu tvrzení (i) stačí do vzorce (11) dosadit $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = \frac{m^2 p}{16q}$. Tvrzení (ii) přímo vyplývá z tvrzení (i). \square

Na obr. 8 jsou znázorněny příklady křivek se zápornou (vlevo), nulovou (uprostřed) a kladnou (vpravo) křivostí v kotevních bodech superspirál.

Poznámka 2.3. Pro $p = 0$ nebo $p = 2$ platí

$$\kappa_{a,b,m,p,q}(\theta) = \frac{1}{g_{a,b}(\theta)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+b^2)}},$$

což je křivost logaritmické spirály.



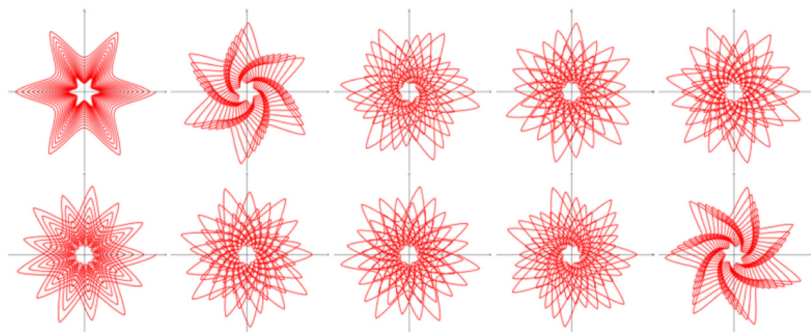
Obr. 8. Superspirála (zleva $q = 10$, $q = m^2p/16$, $q = 30$), $p = 10$, $m = 5$, $b = 0,1$

3. Gielisovy transformace logaritmické spirály pro neceločíselná m

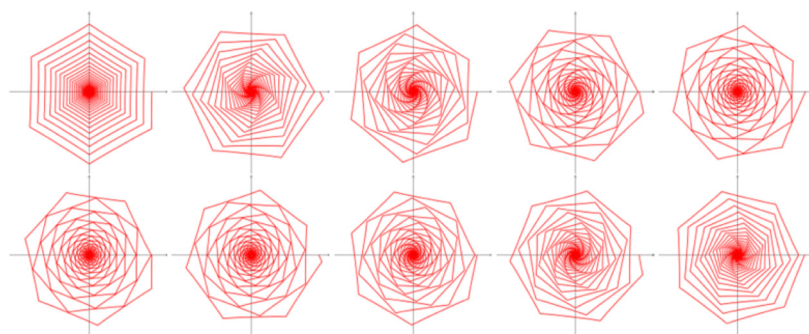
V této sekci budeme studovat závislost Gielisovy transformace logaritmické spirály na hodnotě parametru m . Jak je zřejmé z obr. 9 a 10, pro celočíselnou hodnotu parametru m leží všechny sobě odpovídající kotevní body (popř. vrcholy) jednotlivých závitů na jedné polopřímce vycházející z pólu spirály. Pro neceločíselné hodnoty m jsou posunuté o úhel α , jehož velikost závisí na počtu kotevních bodů (popř. vrcholů) spirály a hodnotě parametru m .

Lemma 3.1. *Nechť $c \in \mathbb{N}$ je počet kotevních bodů spirály na jednom závitě a $m \in \mathbb{R}^+$. Pak sobě odpovídající kotevní body dvou po sobě jdoucích závitů spirály jsou posunuté o úhel $\alpha = \frac{2\pi(c-m)}{m}$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat závit $[0, 2\pi)$. První kotevní bod, který neleží v tomto závitě, odpovídá volbě $\theta = \frac{2c\pi}{m}$. Jeho úhlový posun vzhledem k prvnímu kotevnímu bodu v $[0, 2\pi)$ je $\frac{2c\pi}{m} - 2\pi = \frac{2\pi(c-m)}{m}$. \square

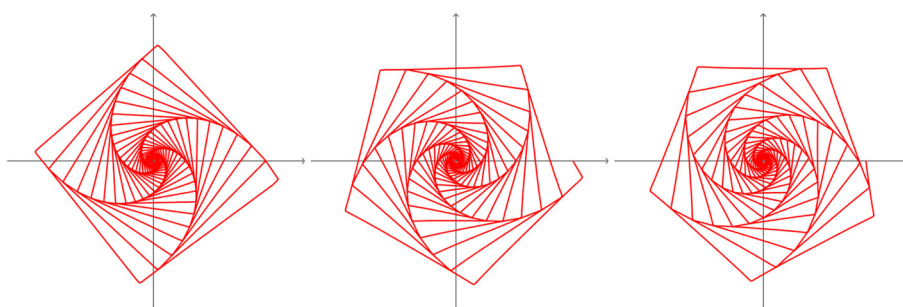


Obr. 9. Subspirály ($p \approx 1,5$, $q \approx 0,5$, $b = 0,01$) pro hodnoty parametru $m = 6,0$ (vlevo nahoře) až $m = 6,9$ (vpravo dole), $\theta \in [0, 16\pi]$



Obr. 10. Superspirály ($p \approx 100$, $q = m^2p/16$, $b = 0,01$) pro hodnoty parametru $m = 6,0$ (vlevo nahoře) až $m = 6,9$ (vpravo dole), $\theta \in [-16\pi, 16\pi]$

Pro některé hodnoty parametrů m , p , q vytvářejí transformované spirály křivky připomínající víry (obr. 11). Situaci můžeme srovnat s problémem popisovaným v literatuře jako myší problém, kde do každého rohu pravidelného n -úhelníku dáme myš. V jeden okamžik se začnou myši pohybovat nejbliže k další myši týmž směrem. Výsledná trajektorie pohybu každé jednotlivé myši odpovídá logaritmické spirále.³



Obr. 11. Gielisovy transformace logaritmické spirály připomínající víry, $b = 0,02$, $p = 100$, $q = m^2p/16$ pro $m \doteq 4,1$, $m \doteq 4,85$, $m \doteq 5,18$, $\theta \in [-16\pi, 16\pi]$

Poznámka 3.2. Vhodné hodnoty koeficientu m (jsou-li koeficienty b , p pevně zvolené) pro Gielisovy transformace logaritmické spirály připomínající víry získáme řešením rovnice

$$\left(\cos(\pi m/2) - \sin(\pi m/2)\right)^p + \left(\cos(\pi m/2) + \sin(\pi m/2)\right)^p - 2e^{\pi b m^2 p/8} = 0.$$

Např. pro volbu $b = 0,02$, $p = 100$ (obr. 11) může mít koeficient $m \in \mathbb{R}^+$ následující hodnoty (zaokrouhleno na dvě desetinná místa): 0,99; 1,01; 1,97; 2,03; 2,95; 3,06; 3,91; 4,10; 4,85; 5,18; 5,75; 6,35 a 6,57.

³Viz např. <http://mathworld.wolfram.com/MiceProblem.html>, <https://mathworld.wolfram.com/Whirl.html>

4. Přírodní tvary analogické logaritmickým spirálám

Gielis ve svých článkách a knihách, např. [4], [5], podložil své představy o možnosti modelovat tvary rostlinných či živočišných těl či jejich částí transformacemi vhodných křivek pomocí rovnice (3) velkou škálou příkladů, přičemž v převážné míře se ovšem jedná o modely uzavřených křivek (listy, květy apod.).



Autor H. Zell:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Busycon_perversum_01.JPG.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cymbiola_vespertilio_matiyensis_01.JPG.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quasimitra_bovei_01.jpg.

Obr. 12. Spirální schránky mořských měkkýšů (*Busycon perversum*, *Cymbiola vespertilio*, *Quasimitra bovei*)



Autor H. Zell:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vexillum_exasperatum_01.JPG.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tectarius_coronatus_01.JPG.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Alvania_discors_01.jpg.

Obr. 13. Spirální schránky mořských měkkýšů (*Vexillum exasperatum*, *Tectarius coronatus*, *Alvania discors*)

Tvary blízké logaritmické spirále však rovněž nejsou v přírodě zcela ojedinělé, k velmi známým se řadí např. schránka mořského hlavonožce loděnky (*Nautilus*), rohy různých druhů sudokopytníků (muflon, různé druhy antilop), dlouhé špičáky (kly) slonů apod. V řadě uvedených případů jde o hladké, tedy netransformované spirály. Gielis ovšem zmiňuje např. schránky měkkýšů tvořící složité 3D spirály, jejichž vnější okraj se vlivem různých záhybu či výběžků více či méně odchyluje od hladké spirály. V takových případech by se nabízela možnost modelovat tvar takové schránky transformovanými spirálami. Pokud srovnáme spirály tvořící ulity na obr. 12 a 13 se spirálami znázorněnými na obrázcích v předchozích sekcích, pak zde nalezneme zjevnou podobnost.

5. Závěr

V návaznosti na předchozí práce jsme popsali některé vlastnosti transformovaných logaritmických spirál. Ačkoliv je problematika Gielisovy transformace poměrně novým tématem, bude mít patrně poměrně široké uplatnění, jak se ukazuje v matematice samotné (např. numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, 3D modely), tak mimo matematiku (např. modely v buněčné biologii, výpočty trajektorií částic ve fyzice kapalin a další) [10].

Coevorden [9] uvádí možnost použít transformované logaritmické spirály v konstrukcích metamateriálů. Metamateriály jsou kompozitní materiály mající vzhledem k specifické vnitřní struktuře unikátní elektrické a magnetické vlastnosti, které se neobjevují u běžných přírodních látek. Z oblastí, kde se uplatňují, lze zmínit např. štěrbinové rezonátory, výkonné magnety, integrované obvody apod. Transformované spirály mohou být významným způsobem využity při miniaturizaci konstrukčních prvků.

Sharma a Dinesh [11], [12] poukázali na možnosti miniaturizace spirálních antén založené na použití aproximací logaritmické spirály s využitím fraktálního charakteru Kochovy křivky. Spirální antény patří mezi široce používané širokopásmové, frekvenčně nezávislé antény s konstantními impedančními a radiačními vlastnostmi v celém provozním rozsahu. Použité aproximace se tvarem značně blíží křivkám, které lze popsat jako superspirály.

Případné navazující práce v oblasti transformovaných spirál mohou být zaměřeny na další známé spirály (např. Archimédovu, Fermatovu apod.). Vzhledem k možnosti transformovat prakticky jakoukoliv rovinnou křivku lze pozornost zaměřit také na další známé objekty (např. lemniskátu, kardioidu, Pascalovu závitnici apod.). Gielisova transformace byla navržena pro kladné hodnoty koeficientů p , q . Nabízí se otázka, jak ovlivní tvar křivek záporné hodnoty zmíněných koeficientů.

Poděkování. Autor děkuje doc. Mgr. Robertu Maříkovi, Ph.D., a doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za cenné rady a podněty při zpracování článku.

L i t e r a t u r a

- [1] ANATRIELLO, G., VINCENZI, G.: *Logarithmic spirals and continue triangles*. J. Comput. Appl. Math. 296 (2016), 127–137.
- [2] GARDNER, M.: *The superellipse: a curve that lies between the ellipse and the rectangle*. Sci. Am. 213 (1965), 222–238.
- [3] GIELIS, J.: *Inventing the circle: the geometry of nature*. Geniaal Publishers, Antwerp, 2003.
- [4] GIELIS, J.: *A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes*. Am. J. Bot. 90 (2003), 333–338.
- [5] GIELIS, J.: *The geometrical beauty of plants*. Atlantis Press, Paris, 2017.
- [6] HARARY, G., TAL, A.: *The natural 3D spiral*. Comput. Graph. Forum 30 (2011), 237–246.
- [7] HOLCOMBE, S. A., WANG, S. C., GROTEBERG, J. B.: *Modeling female and male rib geometry with logarithmic spirals*. J. Biomech. 49 (2016), 2995–3003.
- [8] JONES, R. T., PETERSON, B. B.: *Almost congruent triangles*. Math. Mag. 47 (1974), 180–189.

- [9] JONG VAN COEVORDEN, C. M. DE, GIELIS, J., CARATELLI, D.: *Application of Gielis transformation to the design of metamaterial structures*. J. Phys. Conf. Ser. 963 (2018), article no. 012008.
- [10] MATSUURA, M.: *Gielis superformula and regular polygons*. J. Geom. 106 (2015), 383–403.
- [11] SHARMA, C., DINESH, K. V.: *Miniaturization of spiral antenna based on Fibonacci sequence using modified Koch curve*. IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett. 16 (2017), 932–935.
- [12] SHARMA, C., DINESH, K. V.: *Miniaturization of logarithmic spiral antenna using Fibonacci sequence and Koch fractals*. 3rd International Conference for Convergence in Technology (I2CT), Pune, 2018, 1–4.
- [13] SPÍCHAL, L.: *Superelipsa a superformule*. Matematika – fyzika – informatika 29 (2020), 60–75.
- [14] VERSTRAELEN, L. C. A.: *Univerzální přírodní tvary*. PMFA 52 (2007), 142–151.