Rozhledy matematicko-fyzikální

Martina Kašparová

Elegantní řešení úlohy MO

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 95 (2020), No. 1, 29–30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/148125`

Elegantní řešení úlohy MO

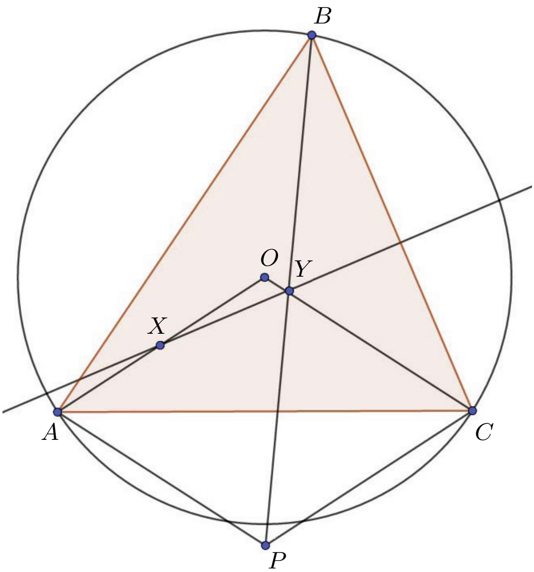
Martina Kašparová, KMT FPE ZČU Plzeň

V krajském kole MO kategorie A v r. 2020 byla zadána následující úloha:

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané. Obraz bodu O v osové souměrnosti podle přímky AC označme P. Dokažte, že středy úseček AO a BP leží na téže kolmici k přímce BC.

Autorské řešení naleznete na:
`http://www.matematickaolympiada.cz/media/5435685/a69ii.pdf`

Pěkné řešení této úlohy využívající skalární součin vektorů nalezl Adam Blažek, student gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí:



Obr. 1

Označme X střed úsečky AO a Y střed úsečky BP. Úkolem je dokázat, že $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{BC}$. Body A a C leží na stejné kružnici se středem O, platí tedy $|OA|=|OC|$. P je obrazem O v osové souměrnosti podle přímky AC, tudíž $|AO| = |AP|$ a $|CO| = |CP|$ a zároveň $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AC}$. Z toho všeho plyne, že čtyřúhelník $AOCP$ je kosočtverec. Označme $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ a $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Jelikož jsme dokázali, že čtyřúhelník $AOCP$ je kosočtverec, platí $P = O + \vec{a} + \vec{c}$. Také z definice víme, že

$$X = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}A = O + \frac{1}{2}\vec{a}$$

a

$$Y = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(O + \vec{b}) + \frac{1}{2}(O + \vec{a} + \vec{c}) = O + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Vypočtěme nyní skalární součin $\overrightarrow{XY}$ a $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2).\end{aligned}$$

Ze zadání však víme, že $|\vec{b}| = |\vec{c}|$, neboť body B a C leží na kružnici se středem O a vzdálenost je tedy stejná. Z toho plyne, že

$$\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Víme, že pokud je skalární součin dvou vektorů roven nule, jsou tyto vektory na sebe kolmé, tedy $\overrightarrow{XY} \perp \overrightarrow{BC}$.

Velká drogová kocovina

Tomáš Fürst, Jan Strojil, Halina Šimková

Abstrakt. Náhodné testování přítomnosti drog ve slinách řidičů, studentů nebo zaměstnanců je přehlídkou ostouzení nevinných. Ve velkém. Příčinou není podvádění nebo „vadné testy“, ale naprosté nepochopení matematických zákonitostí testování.

Jednoduché testy na přítomnost drog ve slinách jsou na první pohled úžasný nástroj. Přibývá ale případů, kdy si pozitivně testovaní stěžují,