Vojtěch Kloud

Geometrické důkazy úloh variačního počtu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 94 (2019), No. 3, 9–14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147892

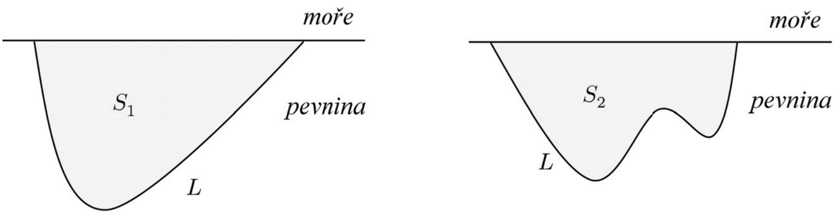
Geometrické důkazy úloh variačního počtu

Vojtěch Kloud, První soukromé jazykové gymnázium v Hradci Králové

Abstrakt. V tomto článku budou rozebrány a vyřešeny dva problémy variačního počtu s různými omezujícími podmínkami. Variační počet je odvětví matematiky, které se zabývá výhradně optimalizací. Klasické metody variačního počtu ovšem vyžadují znalost matematické analýzy, a proto je článek zaměřen pouze na problémy variačního počtu s elegantním geometrickým řešením.

1. Problém královny Dido

Roku 814 př. n. l. chtěla fénická královna Dido na pobřeží severní Afriky založit město Kartágo. Tamější berberský král jí byl ale ochoten prodat pouze tolik země, kolik bude schopna ohraničit kůží z vola. Finanční náklady královnu, díky jejímu majetku, netížily. Volskou kůži tedy rozřezala na tenké proužky o celkové délce L a jako přirozenou hranici města použila pobřeží, které uvažujme dokonale rovné. Jaký tvar musí mít město, aby jeho rozloha byla co největší?



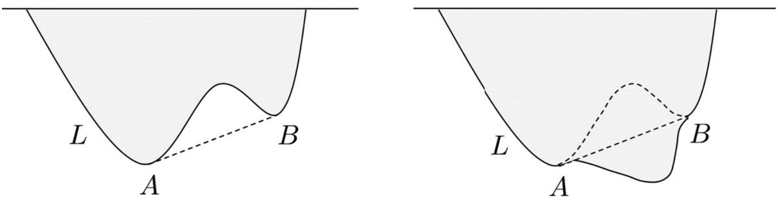
Obr. 1: Problém královny Dido

Ukážeme si známé řešení tohoto problému, které pochází od švýcarského matematika Jakoba Steinera (1796–1863). Toto elegantní řešení je založeno pouze na několika geometrických poznatcích [1].

Předpokládejme, že existuje útvar, který mezi volskou kůží a pobřežím uzavírá největší možný obsah. Nejdříve dokážeme, že takový útvar musí být *konvexní* [1].

[1] Útvar je konvexní, pokud přímá spojnice každé dvojice bodů v útvaru leží celá v útvaru.

Je-li nekonvexní, pak existují body A a B, jejichž celá spojnice leží mimo útvar. V tomto případě můžeme část obvodu útvaru mezi body A, B zobrazit zrcadlově podle úsečky AB a získáme tak nový útvar, který má původní obvod, ale jeho obsah se zvětšil. Hledaný útvar je tedy konvexní.



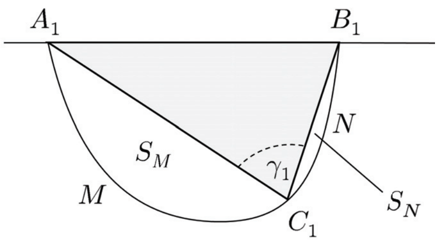
Obr. 2: Zvětšení obsahu nekonvexního útvaru

Body, kde se volská kůže dotýká pobřeží, označme A_1, B_1. Kdekoliv na křivce zvolme bod C_1. Protože křivka je konvexní, trojúhelník $A_1B_1C_1$ leží uvnitř útvaru. Obsah tohoto trojúhelníku je

$$\frac{1}{2}|A_1C_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \sin\gamma_1, \quad \text{kde } \gamma_1 = |\sphericalangle A_1C_1B_1|.$$

Část křivky mezi body A_1 a C_1 pojmenujme M. Nechť plocha ohraničená křivkou M a úsečkou A_1C_1 má obsah S_M. Část křivky mezi body C_1 a B_1 pojmenujme N. Nechť plocha ohraničená křivkou N a úsečkou C_1B_1 má obsah S_N. Obsah celého útvaru je tedy roven

$$S_N + S_M + \frac{1}{2}|A_1C_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \sin\gamma_1.$$



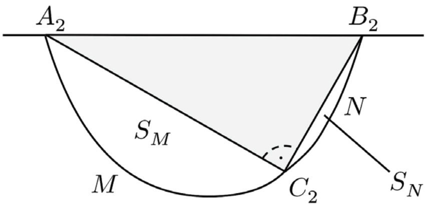
Obr. 3: Obsah konvexního útvaru

Sestrojme nový trojúhelník $A_2B_2C_2$ takový, že $|A_1C_1| = |A_2C_2|$, $|C_1B_1| = |C_2B_2|$. Nechť má trojúhelník pravý úhel při vrcholu C_2. Obsah tohoto trojúhelníku je

$$\frac{1}{2}|A_2C_2| \cdot |C_2B_2|.$$

Části křivky M a N připojíme k trojúhelníku $A_2B_2C_2$. Obsah nově sestrojeného útvaru je pak

$$S_N + S_M + \frac{1}{2}|A_2C_2| \cdot |C_2B_2|.$$



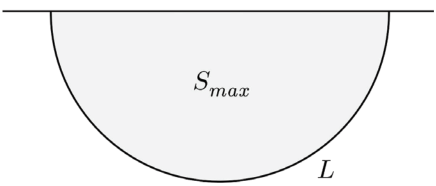
Obr. 4: Obsah nově sestrojeného útvaru

Protože $\sin \gamma_1 \leq 1$ pro všechna γ_1, pak

$$S_N + S_M + \frac{1}{2}|A_1C_1| \cdot |C_1B_1| \cdot \sin \gamma_1 \leq S_N + S_M + \frac{1}{2}|A_2C_2| \cdot |C_2B_2|.$$

Tedy obsah nově sestrojeného útvaru je větší než obsah původního útvaru, nesvírají-li úsečky A_1C_1 a C_1B_1 úhel 90°. V tomto případě $\sin 90° = 1$ a obsahy si jsou rovny.

Protože bod C_1 byl zvolen libovolně, pak aby byl obsah útvaru maximální, musí úsečky A_1C_1 a C_1B_1 svírat pravý úhel pro všechny body C_1 na křivce. Víme, že taková křivka odpovídá podle Thaletovy věty právě kružnici. Aby tedy mělo město největší rozlohu, musí být ve tvaru půlkruhu.



Obr. 5: Řešení problému královny Dido

2. Problém s překážkami

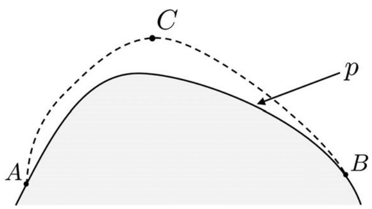
Následujícím problémem jsem ze zabýval v práci SOČ. V ní jsem tento a mnoho dalších variačních problémů řešil metodami matematické analýzy, tedy za použití souřadnic, derivací a integrálů. Máte-li zájem spíše o tento přístup, je má práce dostupná v archivech SOČ pro 41. ročník pod názvem „Optimalizace délky křivek v rovině“ nebo v odkaze [2]. Zde budu problém řešit pouze syntetickou metodou (tedy bez souřadnic).

Máme dánu rovinu, v ní počáteční a konečný bod a zadány nějaké překážky. Naší otázkou je, jaká je nejkratší cesta mezi počátečním a konečným bodem, která se zároveň vyhne zadaným překážkám.

Řešení takovýchto problémů je nám obvykle na první pohled jasné, napovídá nám ho intuice. Podobně jako u problému královny Dido, kde byl intuitivně řešením právě půlkruh, nás zajímá matematický důkaz toho, že naše intuitivní řešení je vskutku správné.

2.1. První problém

Mějme v rovině danou překážku, která je tvořena hypografem[2)] konkávní funkce p.[3)] Počáteční bod A a konečný bod B leží na křivce p. Intuice nám napovídá, že řešením tohoto problému bude cesta přímo po překážce. Toto tvrzení si nyní dokážeme.

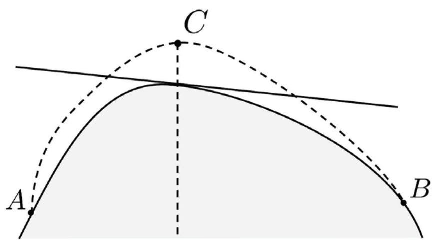


Obr. 6: Křivka různá od p v bodě C

Tvrzení dokážeme sporem. Nejdříve předpokládejme, že existuje řešení našeho problému. Dále předpokládejme, že řešením našeho problému je křivka nebo cesta, která alespoň v jednom bodě C nesplyne s křivkou p. V tomto případě můžeme bodem C vést vertikální přímku. V bodě, kde se tato přímka protne s p, udělejme tečnu ke křivce p.

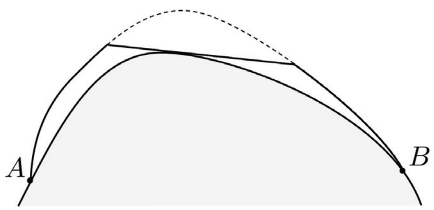
[2)] Hypograf funkce p je množina všech bodů, které leží pod grafem p.

[3)] Překážka je tvořena konkávní funkcí, má tedy tvar „kopce“. Samotná překážka, jako útvar, je ovšem konvexní. Zde si musíme dát pozor na rozlišení pojmů konkávní funkce, či útvar a konvexní funkce, či útvar.



Obr. 7: Sestrojení tečny k p

Nyní definujeme novou cestu ve tvaru: původní cesta–tečna–původní cesta. Tato nová cesta je vyznačena plnou čárou na obr. 8.



Obr. 8: Nově definovaná cesta

Nově definovaná cesta je určitě kratší než cesta původní, která měla být nejkratší, což je spor. Je-li tedy cesta někde různá od p, pak není nejkratší. Existuje-li tedy nejkratší cesta, pak je to právě cesta, která splývá s křivkou p.

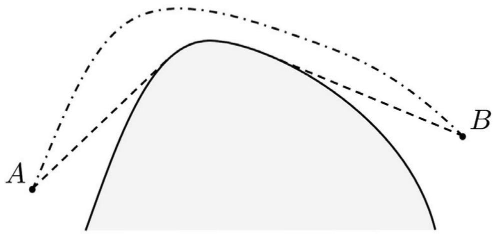
V důkazu jsme pracovali s mnoha předpoklady, které jsme nedokázali, jako je například fakt, že tečna ke konkávní funkci leží nad grafem této funkce. Tato vlastnost vskutku vychází z *formální definice* konkávní funkce a důkaz této vlastnosti je rozebrán v práci [2]. Tam také dokazuji netriviální tvrzení, jako je existence minima pro tento problém, a zřejmě zjevné tvrzení, že nejkratší spojnicí dvou bodů v rovině je právě úsečka.

2.2. Druhý problém k zamyšlení

Mějme znovu danou překážku hypografem konkávní funkce p a počáteční a konečný bod libovolně v rovině. Intuice nám napovídá, že nejkratší křivkou bude křivka ve tvaru: tečna k překážce, procházející bodem A–překážka–tečna k překážce, procházející bodem B.

- Za jakých předpokladů nabývá nejkratší křivka právě tohoto tvaru?

- Řekněme, že jsou splněny všechny předpoklady, za kterých existuje křivka v uvedeném tvaru. Dokažte, že se opravdu jedná o nejkratší křivku.
- Existují konfigurace, kde nejkratší křivka bude jiného tvaru?

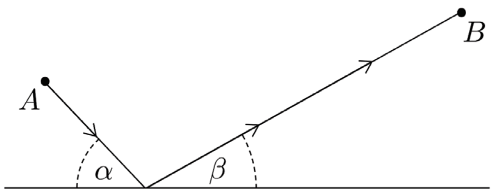


Obr. 9: Druhý problém

3. Variační problém jako úloha pro čtenáře

Roku 1662 formuloval francouzský matematik Pierre de Fermat princip, který říká, že světlo se v prostoru šíří tak, aby se z jednoho bodu do druhého dostalo za co nejkratší čas. Tomuto principu říkáme Fermatův princip [1].

Za pomoci Fermatova principu odvoďte zákon odrazu. Tedy ukažte, že při odrazu světla, například od zrcadla, je úhel dopadu stejný jako úhel odrazu ($\alpha = \beta$).



Obr. 10: Zákon odrazu

Literatura

[1] Kielhöfer, H.: *Calculus of variations.* Springer, New York, 2018.

[2] Kloud, V.: *Optimalizace délky křivek v rovině.* Práce SOČ, První soukromé jazykové gymnázium, Hradec Králové, 2019, Dostupné z: https://www.academia.edu/39970242/SOC_-_Vojtech_Kloud.