Hana Kotoučková
Předchůdci metody nejmenších čtverců

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 64 (2019), No. 1, 55–63

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147694`

Předchůdci metody nejmenších čtverců

Hana Kotoučková

Abstrakt. Metodu nejmenších čtverců dnes běžně používáme v matematice i statistice. Poprvé ji publikoval Adrien Marie Legendre v roce 1805. V následujícím článku se společně podíváme, jaké byly hlavní vědecké problémy století, které objevu předcházelo. Poté ukážeme další metody, které byly používány pro kombinování nekonzistentních rovnic. V závěru nastíníme spor mezi Gaussem a Legendrem o to, kdo metodu nejmenších čtverců objevil jako první.

Hlavní vědecké problémy osmnáctého století

Metodu nejmenších čtverců běžně používáme i dnes. Setkáváme se s ní při aproximaci řešení soustav rovnic, kde máme více rovnic, než je neznámých. Řešení má minimalizovat součet čtverců odchylek vůči každé rovnici.

Abychom mohli lépe pochopit, co vedlo k objevu metody nejmenších čtverců, pokusíme se v tomto článku popsat, jaké problémy vědci řešili ve století, které objevu předcházelo. Vycházíme přitom z disertační práce [7].

Za hlavní problémy astronomie osmnáctého století bychom mohli označit:

i. Určení tvaru Země.

ii. Vysvětlení věkovité nerovnosti, která je pozorována v pohybech Jupiteru a Saturnu.

iii. Určení a matematický popis pohybů Měsíce.

Podívejme se společně na první z vědeckých otázek. Narážka na to, že Země nemá tvar dokonalé koule, se objevuje v roce 1672 u Jeana Richera. Francouzský astronom Jean Richer (1630–1696) byl vyslán do Francouzské Guyany, aby v Cayenne prováděl astronomická pozorování. Právě zde blízko rovníku pozoroval, že kyvadlo je méně ovlivněno gravitací než stejné kyvadlo v Paříži. Isaac Newton (1643–1727) v *Principech* (1678) ukázal, jak rotace Země může způsobovat zploštění Země na pólech. Země má tak tvar rotačního elipsoidu. Newton navíc odhadl její zploštění a eliptičnost, tj. podíl, kterým poloměr na rovníku překračuje poloměr na pólu jako $1/230$.

Dvě hlavní metody k určení tvaru Země byly pozorování pohybu kyvadla a měření délky oblouku stejného úhlu na tomtéž poledníku na různých vzdálených místech. Myšlenkou bylo změřit délku stupně zeměpisné šířky na dvou nebo více dostatečně vzdálených místech na stejném poledníku. Pokud by délka stupně blízko rovníku byla kratší než délka stupně u pólu, byl by tvar Země zploštělý. Rozdíl mezi těmito dvěma délkami by mohl být použit k vypočítání zploštění. Před rokem 1720 se měřením oblouku ve Francii zabýval Domenico Cassini (1625–1712), ředitel Observatoire de Paris. Měření probíhala 38 let. Po jeho smrti v nich pokračoval syn Jacques. Na základě získaných dat se přiklonili k tvrzení, že Země je protáhlá. Postavili se tak proti výsledkům Newtona. Nicméně omezený rozsah zeměpisné šířky (pouhých 9°) a omezená přesnost

---

RNDr. Ing. Hana Kotoučková, Ph.D., Vysoká škola polytechnická Jihlava, Tolstého 16, 586 01 Jihlava, e-mail: `hana.kotouckova@vspj.cz`

měření byly příčinou, proč tento závěr nebyl všeobecně přijat. Francouzská akademie v roce 1735 uspořádala výpravy do Peru a Laponska. Cílem bylo změřit oblouky blízko rovníku a kolem 66° zeměpisné šířky a porovnat výsledky s měřeními blízko Paříže. Protože se místa nachází na dostatečně vzdálených zeměpisných šířkách, byla očekávána vyšší vypovídací hodnota. Vědci Francouzské akademie na základě svých měření vyvrátili Cassiniho hypotézu a přiklonili se na stranu Newtona, že Země je zploštělá. Nicméně zůstal úkol určit eliptičnost. Různé dvojice oblouků totiž dávaly rozdílné hodnoty.

Podívejme se na další ze zmiňovaných problémů, a to pozorování neperiodických odchylek v pohybu planet Jupiteru a Saturnu. V roce 1676 astronom Edmond Halley (1656–1742) vyjádřil podezření, že Jupiter a Saturn mají sklon k nepatrným dlouhodobým nerovnoměrnostem ve svých pohybech. Po porovnání aktuálních pozic Jupiteru a Saturnu s tabulkovými hodnotami, získanými v průběhu několika staletí, zjistil, že průměrný pohyb Jupiteru se zrychluje, zatímco pohyb Saturnu se zpomaluje. Halley nicméně nebyl schopen své tvrzení podepřít matematickou teorií.

Tobias Mayer a pozorování Měsíce

Tobias Mayer (1723–1762) pracoval jako kartograf a astronom. V letech 1748–1749 provedl velké množství pozorování Měsíce. Mayer odhalil kývavý pohyb Měsíce, který dnes známe pod pojmem librace. Vyvrátil tím ve své době převládající názor, že ze Země vidíme stále stejnou polovinu měsíčního povrchu – díky libraci můžeme pozorovat i část odvrácené strany Měsíce. Mayer si všímal několika významných lunárních vlastností a v roce 1750 ukázal [10], jak tato data mohou být použita k určení charakteristik oběžné dráhy Měsíce. Studoval vztah mezi skutečným rovníkem a skutečným pólem Měsíce, které se vztahují k ose otáčení Měsíce, a zdánlivým rovníkem Měsíce. Zdánlivým rovníkem je myšlena ta hlavní kružnice na povrchu Měsíce, která je rovnoběžná s rovinou oběžné dráhy Země kolem Slunce. Zdánlivý pól je pak vztažen ke zdánlivému rovníku. Selenografické souřadnice bodů na zdánlivém rovníku Měsíce se v čase mění, což je důsledkem librace Měsíce. Jako význačný bod na Měsíci si Mayer vybral kráter Manilius. Sestavil pak lineární rovnici

$$\beta - (90^\circ - h) = \alpha \sin(g - k) - \alpha \sin \theta \cos(g - k),$$

kde hodnoty g, k jsou ekliptikální délky bodů, které Mayer na Měsíci pozoroval a které leží na zdánlivém rovníku Měsíce, $90^\circ - h$ je ekliptikální šířka kráteru Manilius. V rovnici tak zůstaly tři neznámé β (selenografická šířka kráteru Manilius), α (úhel mezi skutečným pólem Měsíce a zdánlivým pólem Měsíce, který je pozorován ze Země vzhledem k ekliptice) a $\alpha \sin \theta$, kde θ je úhel mezi neznámým průsečíkem skutečného a zdánlivého rovníku a známým průsečíkem roviny oběžné dráhy Měsíce a zdánlivého rovníku Měsíce. Obrázky a podrobnější vysvětlení včetně naměřených hodnot lze nalézt u Stiglera [13], str. 16–25, trochu upravenou rovnici pak u Halda [6], str. 94, nicméně princip zůstává stejný. Mayer provedl celkem 27 pozorování, čímž získal 27 rovnic. Průkopnické je to, jak se Mayer s přeurčenou soustavou rovnic vypořádal. Rozdělil rovnice do tří skupin po devíti pozorováních. V každé skupině sečetl všech devět rovnic. Tím získal tři rovnice pro tři neznámé. Jak ale probíhalo rozdělování do tří skupin? Mayer si vybral v rovnici neznámou α, která určovala úhel mezi skutečným pólem Měsíce a zdánlivým pólem Měsíce, pozorovaným vzhledem k ekliptice. V první skupině bylo devět rovnic s největšími kladnými hodnotami koeficientů u neznámé α, tedy s největšími naměřenými hodnotami $\sin(g-k)$. Druhou skupinu tvořily rovnice s nejmenšími (zápornými) hodnotami koeficientů u α. Do třetí skupiny pak Mayer zařadil zbylých devět rovnic. Tento způsob kombinování rovnic je na svou dobu neobvyklý. Rozdělení do skupin maximalizuje rozdílnost koeficientů u neznámé α a tím jsou sumace rovnic vzhledem k α tak velké, jak je to jen možné.

Mayer získal tři rovnice, ze kterých určil hodnoty tří neznámých. S tím se ale nespokojil a zajímal se o přesnost těchto hodnot. Nešlo mu o žádnou obecnou analýzu chyby, problém řešil empirickým stanovením přesnosti. Ukázal, jak by vypadalo řešení pro tři neznámé, kdyby použil pouze tři rovnice. V tomto případě dostal výsledek $\alpha = 1°40'$. Když však použil všech 27 rovnic, dopočítal $\alpha = 1°30'$. Vhledem k tomu, že měl k dispozici devětkrát více pozorování, usoudil, že výsledek by měl být devětkrát přesnější. Správnou hodnotu označil jako $\alpha = 1°30' \pm x$, kde x označuje chybu (odchylku skutečné hodnoty od hodnoty určené pomocí 27 rovnic). Chyba při použití tří rovnic je $10' \pm x$. Z rovnice $\pm x : 1/27 = (10' \pm x) : 1/3$ dostal Mayer hodnotu $x = \pm 1{,}25'$.

Leonhard Euler a zkoumání neperiodických odchylek v pohybech Saturnu a Jupiteru

Leonhard Euler (1707–1783) byl švýcarský matematik a fyzik. Euler usiloval o matematickou analýzu pohybu Saturnu a Jupiteru [5]. Primárně se zaměřil na planetu Saturn. Připustil, že oběžná dráha Saturnu i Jupiteru je eliptická, nicméně roviny oběžných drah nejsou stejné. Po dokončení matematické analýzy si chtěl Euler své výsledky ověřit empiricky. Měl k dispozici 75 skupin pozorování z let 1582–1745. Jeho formule obsahovala celkem osm neznámých. Z pozorování tedy sestavil celkem 75 rovnic pro osm neznámých. Euler byl především exaktní matematik, a proto nepřijal myšlenku, že by kombinací rovnic mohl získat přesnější výsledek. Pracoval s malými skupinami rovnic – většinou s tolika skupinami, kolik bylo neznámých. Numerické výsledky uznával pouze v případě, že různé skupiny rovnic dávaly téměř totožné výsledky.

Když porovnáme řešení Mayera a Eulera, vidíme, že Mayer k problému přistupoval jako praktický astronom. Rozdělil pozorování tak, aby ve stejné skupině byla pozorování vytvořená v podstatě za stejných podmínek. Euler však vycházel z předpokladu, že pozorování byla pořízena za různých, pro nás neznámých podmínek. Mayer nahlížel na chyby jako na náhodné. Byl přesvědčen, že kombinací jednotlivých pozorování zvýší přesnost výsledku v poměru k počtu kombinovaných rovnic. Euler naproti tomu nepřijal tento statistický pohled a myšlenku, že náhodné chyby mají tendenci se navzájem vyrušit.

Roger Joseph Boscovich a jeho metoda kombinování nekonzistentních rovnic

V roce 1755 jezuitský kněz Roger Joseph Boscovich (1711–1787) spolu s Christopherem Mairem (1697–1767) publikovali výsledky měření poledníkového úhlu pod názvem

De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendas duas meridiani gradus [3]. Boscovich s těmito daty nadále pracoval a snažil se určit eliptičnost Země. Byl si vědom toho, že potřebuje měření na dostatečně vzdálených místech. Při kombinování dvojic měření se i velice malé chyby v měření oblouku mohou značně zvětšit. Proto použil pět měření, která byla pořízena ve vzdálených lokalitách, a dalo se u nich předpokládat, že jsou přesná. Jednalo se o měření v Quitu (Ekvádor), na mysu Dobré naděje (Jihoafrická republika), v Římě, Paříži a Laponsku. Boscovich vytvořil pět rovnic $a_i = z + y \sin^2 \alpha_i$, kde a_i jsou délky jednoho stupně zeměpisné šířky v místech příslušných oblouků (v původní práci v jednotkách sáhy na stupeň) a α_i jsou zeměpisné šířky bodu ve středu oblouku. Zůstávají dvě neznámé: z označující délku jednoho stupně na rovníku a y vyjadřující přebytek (nedostatek) délky jednoho stupně na severním pólu oproti jednomu stupni na rovníku. Zájemci o bližší vysvětlení rovnic mohou nahlédnout do [14], kde je uvedena i verze rovnice, která byla používána v dřívějších pracích. Boscovich věděl, že každé dvě z těchto rovnic mohou být použity k vypočtení eliptičnosti a polárního přebytku. To také udělal pro každou z deseti možných dvojic. Tímto způsobem ale dostal deset různých hodnot eliptičnosti. Když tyto hodnoty zprůměroval, dostal se k eliptičnosti 1/155. Tato hodnota se mu zdála příliš velká, a proto se rozhodl zamítnout dvě dvojice, které se příliš lišily od ostatních. Znovu spočítal průměr a tentokrát došel k výsledku 1/198. Ani s tím se ale nespokojil. Místo toho, aby si vybral jednu z hodnot eliptičnosti, které vypočítal, popř. použil nějaké jejich zprůměrování, zaměřil se na odchylky mezi zjištěnými hodnotami eliptičnosti. Došel k názoru, že rozpory mezi jednotlivými měřeními jsou natolik významné, že Země nemůže mít elipsoidální tvar. Kdyby totiž Země byla elipsoid, všechna měření by měla dojít ke stejné eliptičnosti.

Boscovich se nicméně rozhodl pokračovat v dalším bádání. V roce 1757 publikoval poměrně stručné pojednání o zcela novém způsobu kombinování nekonzistentních obloukových měření. V roce 1760 předložil úplný popis tohoto principu společně s návodem, jak ho využít v praxi. Vše dokumentoval na příkladu pěti měření poledníkového oblouku z roku 1755. Když jeho postup porovnáme s Mayerovým, zjistíme, že zatímco Mayer postupuje ad hoc, Boscovich používá určitý obecný postup. Formuluje vlastnosti, které by měl mít průměr založený na kombinaci obloukových měření (nikoliv obyčejný aritmetický průměr). Pro každé úhlové měření oblouku navrhl určitou korekci. Tyto korekce musely splňovat několik podmínek:

i. Jejich rozdíly jsou úměrné rozdílu mezi versus siny dvojnásobku jejich zeměpisné šířky.
ii. Součet pozitivních korekcí musí být stejný jako součet negativních korekcí.
iii. Součet všech korekcí (pozitivních i negativních) musí být co nejmenší možný při splnění dvou předchozích podmínek.

Zastavme se krátce u první podmínky. S pojmem versus sinus se dnes běžně v matematice nesetkáváme, je definován jako versin $\alpha = 1 - \cos \alpha$. První podmínka nám tedy říká, že

$$a_i - a_j \sim (1 - \cos 2\alpha_i) - (1 - \cos 2\alpha_j).$$

Pokud použijeme elementární goniometrické vztahy $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ a $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, dostáváme se k podmínce, že a_i je lineární funkcí $\sin^2 \alpha_i$. Tak Boscovich dospěl k tvaru rovnic v soustavě, kterou řeší.

Boscovich podmínky neformuluje analyticky, ale pouze slovně a udává geometrický popis, jak řešit problém pro zmíněných pět obloukových měření. Dále ještě přidává diskuzi s Mairem. V této debatě používá metodu na devět naměřených oblouků. Po zamítnutí tří nejvíce „podezřelých“ měření, která se nejvíc lišila od ostatních, aplikuje svoji metodu. Dochází tak k závěru, že Země je nepravidelného tvaru, ale podobá se elipsoidu. Boscovich dále neuvádí žádné vlastnosti své metody, nijak ji nerozvíjí, ani se nepokouší o analytickou formulaci. Zabývá se pouze problémem tvaru Země. Uvádí sice, že metoda je obecná a dá se použít i v jiných situacích, nicméně neuvádí žádné příklady. Boscovichovou metodou se zabývali např. i Gilber Bassett a Roger Koenker [2].

Pierre Simon de Laplace

Na nerovnosti v pohybech planet Saturnu a Jupiteru naráží v kurzu historie astronomie v roce 1787 francouzský vědec Pierre Simon de Laplace (1749–1827). Laplaceovi se podařilo ukázat, že pohyby Saturnu a Jupiteru jsou ve skutečnosti periodické, jen s velmi dlouhou periodou. Své výsledky shrnuje ve spisu *Théorie de Jupiter et de Saturne* [8], vydaném v roce 1787.

Laplace srovnává teoretické výsledky svého zkoumání s naměřenými daty. Pro své bádání si vybral 24 měření Saturnu z období 200 let. Jeho teorie obsahovala čtyři proměnné, které nebylo možné získat s dostatečnou přesností. Neznámé označovaly určité korekce pro střední ekliptikální délku Saturnu v roce 1750, jeho průměrný roční pohyb, excentricitu a pozici afelia. Laplace se rozhodl, že tyto neznámé určí ze samotných pozorování. Získal tak 24 nekonzistentních rovnic. Tyto rovnice byly lineární ve všech čtyřech proměnných. Dostal se tak vlastně k téměř stejnému problému jako před ním Euler a Mayer. Mayer v této situaci seskupil všechny rovnice do disjunktních skupin. Laplace postupoval trochu odlišně. Rozhodl se zredukovat 24 rovnic na čtyři následující rovnice:

i. Součet všech rovnic.
ii. Rozdíl součtu rovnic 1 až 12 a součtu rovnic 13 až 24.
iii. Lineární kombinace rovnic $-1 + 3 + 4 - 7 + 10 + 11 - 14 + 17 + 18 - 20 + 23 + 24$.
iv. Lineární kombinace rovnic $2 - 5 - 6 + 8 + 9 - 12 - 13 + 15 + 16 - 19 + 21 + 22$.

Laplace nevysvětluje, proč se rozhodl pro tyto lineární kombinace původních rovnic. Mayer každé pozorování použil pouze jednou. Laplace stejné rovnice použil víckrát.

V roce 1789 se Laplace zabýval problémem tvaru Země, vycházel z měření oblouků na zemském povrchu. Seznámil se s Boscovichovou metodou, která je podle něj sice dobrá, ale ve své originální podobě příliš složitá. Laplace proto převedl Boscovichovu metodu do analytické podoby. O deset let později tuto metodu dále modifikoval. Počítal se sedmi oblouky a upravil původní podmínky Boscoviche takto:

i. Součet chyb způsobených při měření oblouků musí být nula.
ii. Součet všech chyb v absolutních hodnotách musí být minimální.

Ve své analýze navíc přiřazuje jednotlivým pozorováním váhy podle délek jejich oblouků. Delší oblouky tak mají větší váhu. Laplace ze sedmi obloukových měření vypočetl hodnotu eliptičnosti 1/132.

Legendre a uveřejnění metody nejmenších čtverců

Francouzská revoluce na konci osmnáctého století s sebou přinesla mnoho změn. Jednou z nich byl i požadavek vytvořit nový metrický systém. Základem měl být jeden metr, definovaný jako jedna desetimilióntina délky poledníkového kvadrantu (vzdálenosti z rovníku na pól, v tomto případě vzdálenosti od rovníku na severní pól). Úkolem francouzské vědy bylo určení délky tohoto oblouku. Do projektu byl zapojen i Adrien Marie Legendre (1752–1833). Francouzi nepočítali s tím, že by měřili celý kvadrant. Svůj výpočet založili na změření 10° tohoto oblouku. Celá tato část se nacházela na francouzském území. Měření probíhalo v roce 1795. Do roku 1799 byl proveden převod velkého množství úhlových měření na délky oblouků. Oficiální zprávy o tomto výzkumu byly zveřejněny až v roce 1805, nicméně již kolem roku 1799 byl k dispozici souhrn naměřených dat.

Legendre tato data použil při přípravě spisu o určení oběžných drah komet *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* [9], který vyšel v roce 1805. V této práci poprvé publikoval metodu, jak pomocí minimalizování čtverců chyb získat požadované hodnoty pozorovaných veličin. Je zde odvozeno pravidlo, jak vytvořit tzv. normální rovnice. Legendre uvedl i aplikaci na praktických příkladech.

Gauss a spor o prvenství v objevu metody nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců se poprvé objevila v Legendrově práci v roce 1805. V roce 1809 Carl Friedrich Gauss (1777–1855) publikoval své metody k výpočtům oběžných drah několika planet v knize *Theoria motus corporum coelestium.* Zde také Gauss uvedl metodu nejmenších čtverců s tvrzením, že on sám ji objevil a používal už od roku 1795. *Theoria motus* byla původně napsána v němčině na podzim roku 1806. Anders Hald uvádí [6], že v červenci 1806 měl Gauss k dispozici kopii Legendrovy knihy *Nouvelles méthodes*, než ji měl dostat k revizi německý astronom Heinrich Wilhelm Olbers (1758–1840). Až v roce 1807 našel Gauss vydavatele své knihy, který nicméně vyžadoval překlad do latiny. *Theoria motus* tak byla publikována až v roce 1809.

Zastavme se nyní krátce u jedné důležité události z hlediska astronomie, která přímo souvisí s Gaussovými výpočty oběžných drah, a tou je objev trpasličí planetky Ceres. 1. ledna 1801 objevil italský matematik a astronom Guiseppe Piazzi (1746–1826) objekt, který nejprve považoval za kometu. Později těleso dostalo název Ceres a bylo považováno za další planetu Sluneční soustavy, po roce 1850 za planetku. Objekt sledoval až do 11. února 1801, kdy byl objekt tak blízko Slunci, že se již nedal pozorovat. Přestože byl Piazzi matematikem, nepodařilo se mu na základě pozorování vypočítat trajektorii tělesa. Problém se pokoušelo vyřešit několik dalších astronomů, ale víceméně neúspěšně. Gauss použil Piazziho údaje pozorování planetky a vypočítal dráhové elementy, díky nimž Ceres nezávisle na sobě znovuobjevili astronomové Franz Xaver von Zach (1754–1832) a Heinrich Wilhelm Olbers v prosinci 1801 a lednu 1802. Protože pozorování bylo k dispozici více, je pravděpodobné, že k výpočtům použil Gauss nějakou verzi nejmenších čtverců. Bližší informace lze nalézt v [4].

Legendre se cítil dotčen Gaussovým přisvojením si metody nejmenších čtverců, a proto mu v květnu 1809 zaslal dopis, v němž ho upozorňuje, že není možné si nárokovat objev jen pouhými slovy, že metodu používal již dříve.

Sporem o prvenství se zabýval ve svém díle Stephen Stigler [14]. Stigler předložil čtyři hlavní důkazy, které uvedl Gauss a jeho následovníci na obhajobu Gaussova prvenství.

Prvním z nich jsou právě Gaussova slova v *Theoria motus* z roku 1809, že metodu používal již od roku 1795. Gauss byl vynikající matematik, nepotřeboval činit falešná prohlášení. Na druhou stranu, proč Gauss metodu nepublikoval jako první, když ji, jak tvrdí, objevil? Je možné, že se mu metoda nejmenších čtverců zdála být příliš jednoduchá a zřejmá. Nebo jí nepřikládal velkou důležitost a neuvědomoval si její praktický význam a nepovažoval za nezbytné její uveřejnění.

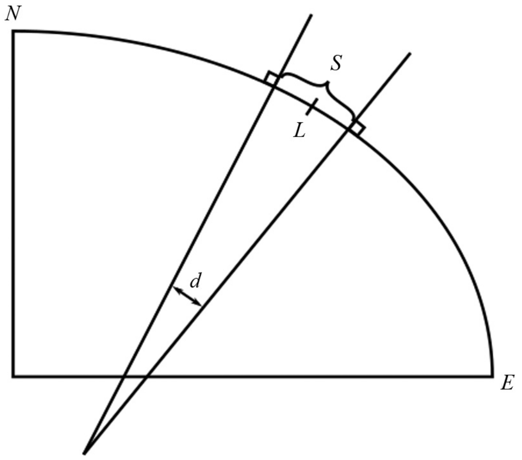
Jako druhý důkaz Stigler uvádí tajemný zápis „Calculus probabilitas contra La Place defensus“ v Gaussově matematickém deníku s datem 17. června 1795. Nicméně tato slova nás pouze ujišťují o tom, že se Gauss zabýval otázkami souvisejícími s pravděpodobností v červnu 1795. Jestli se jednalo právě o metodu nejmenších čtverců, již není zřejmé.

Dalším bodem Gaussovy obhajoby je jeho tvrzení, že o metodě informoval jiné astronomy před rokem 1805. Těmi astronomy měli být Heinrich Wilhelm Olbers, Bernhard August von Lindenau (1779–1854) a Franz Xaver von Zach. Olbers sice Gaussovo prohlášení v roce 1816 podpořil, ale učinil tak až po sedmi letech opakovaného pobízení Gaussem. Zach vydával v letech 1800 až 1813 astronomický časopis *Monatliche Correspondenz*. Lindenau mu při vydávání tohoto periodika asistoval. Lindenau v recenzi článku o geodézii ze srpna 1806 detailně rozebírá metodu nejmenších čtverců. Není zde však žádná zmínka o Gaussovi, metoda je připisována Legendrovi. V listopadovém vydání *Monatliche Correspondenz* z roku 1807 se objevily dvě poznámky o metodě nejmenších čtverců. Ani v jednom případě není Gauss zmíněn. Samozřejmě to ještě nemusí znamenat, že Gauss zmíněným astronomům o metodě neřekl. Je možné, že pouze ctili vědeckou normu, kdy prvenství je určeno první publikací. Nebo se mohlo stát, že Gauss astronomům sice metodu popsal, nicméně oni mu správně neporozuměli. Výtah z Gaussových dopisů Olbersovi a Zachovi lze nalézt v [11].

Dostáváme se k poslednímu nepřímému důkazu, a tím je Gaussův dopis, který byl v roce 1799 publikován v *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, kde Gauss zmínil „meine Methode“. Gauss popsal tiskařskou chybu v popisu oblouku mezi Panthéonem a Evaux. Místo 76 545,74 zde bylo 76 154,74. Údaje pocházely z geodetického měření, které bylo základem pro zavedení nového metrického systému ve Francii. Na základě dat s chybou Gauss spočítal „svojí metodou“ eliptičnost 1/150. Po odstranění chyby přepočítal eliptičnost na 1/187. Mohlo by se zdát, že na základě těchto znalostí bude jednoduché jednoznačně určit, zda Gauss použil metodu nejmenších čtverců. Stačí vzít odpovídající hodnoty, použít metodu nejmenších čtverců a zjistit, zda se námi vypočtené hodnoty shodují s těmi Gaussovými. Bohužel problém je složitější. Vztahy mezi délkou oblouku, zeměpisnou šířkou, poledníkovým kvadrantem a eliptičností nejsou lineární. Existuje tak více způsobů, jak úlohu převést na problém lineárních nejmenších čtverců. Navíc se mohou objevit odchylky způsobené zaokrouhlováním. Obvyklá lineární formulace problému, kterou použili mj. Boscovich nebo Legendre za předpokladu, že Země má tvar elipsoidu, je

$$a = z + y \sin^2 L,$$

kde $a = S/d$ je délka oblouku v modulech (1 modul je přibližně 3,8953 metru) na



Obr. 1. Vztah mezi délkou oblouku S, zeměpisnou šířkou d a eliptičností

stupeň zeměpisné šířky, z je délka stupně na rovníku, y je rozdíl (přebytek) stupně na pólu v porovnání s jedním stupněm na rovníku a L je zeměpisná šířka středu oblouku (viz obr. 1). Stigler vzal hodnoty S, d, L ze známého francouzského měření oblouku, které použil i Gauss. Vyřešil rovnici pro z a y za použití metody nejmenších čtverců. Nicméně se dostal k jiným hodnotám než Gauss. Stigler proto zkusil použít vážené nejmenší čtverce. Ale ani tak nebyl úspěšný. A tak vznesl zajímavou otázku, zda Gauss vycházel ze stejné rovnice jako Boscovich a Legendre. Stigler v [12] uvádí i další rovnici,

$$S = xd + y \sin d \cos 2L + z \sin 2d \cos 4L,$$

kde na x, y a z může být pohlíženo jako na nelineární funkce eliptičnosti a délky jednoho stupně na rovníku. Když v roce 1981 Stigler publikoval svoje domněnky [12], několik schopných analytiků se pokusilo napodobit Gaussovy výsledky i s použitím jiných rovnic, než je vztah $a = z + y \sin^2 L$, nebo za pomoci obměn metody nejmenších čtverců, ovšem bez úspěchu. Je samozřejmě možné, že Gauss udělal během výpočtu nějakou numerickou chybu. Byl však vynikající počtář, a proto se tato možnost zdá být vysoce nepravděpodobná. Stigler tak dochází k závěru, že Gauss nejspíš použil nějaký odlišný přístup, který dosud nebyl objeven. Následné statistické přepočty ukazují, že nejpozději v díle z roku 1799 měl Gauss k dispozici nějakou metodu sloučení nekonzistentních rovnic. Ale není jasné, jaká metoda to byla, pokud se nejednalo o nejmenší čtverce.

Pokud bychom připustili, že Gauss objevil metodu nejmenších čtverců nezávisle na Legendrovi a používal ji před rokem 1799, zůstává otázkou, proč on sám tuto metodu nepublikoval. Jakou jí vlastně přisuzoval důležitost? Je možné, že se o metodě zmínil jiným astronomům, ale možná nejasný Gaussův výklad nebo nedostatek možných aplikací této metody mohly být příčinou nepochopení. O to větší obdiv si tak zaslouží Legendre, který uveřejněním nejmenších čtverců v roce 1805 dosáhl okamžitého a všeobecného úspěchu. Jak již bylo zmíněno, je také možné, že pro Gausse byla metoda příliš jednoduchá a zřejmá a necítil potřebu něco takového publikovat. Gauss byl tedy možná tím, kdo objevil metodu nejmenších čtverců, nicméně Legendre byl první, kdo ji publikoval a zpřístupnil široké veřejnost.

Odpověď na otázku, kdo je duchovním otcem metody nejmenších čtverců, hledá ve své práci také Anděl [1]. Dochází k závěru, že Gauss věděl, jak je tato metoda užitečná, ale až do roku 1809 o tom nebyl schopen nikoho přesvědčit.

L i t e r a t u r a

[1] Anděl, J.: *Statistické úlohy, historky a paradoxy.* MatfyzPress, Praha, 2018.

[2] Bassett, G., Koenker, R.: *On Boscovich's estimator.* Ann. Statist. 13 (1985), 1625–1628.

[3] Boscovich, R. J., Maire, C.: *De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimetiendas duas meridiani gradus.* Palladis, Rome, 1755.

[4] Director, B., Tennenbaum, J.: *How Gauss determined the orbit of Ceres.* The American Almanac, 1997.

[5] Euler, L.: *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter.* In: Leonardi Euleri Opera Omnia, Ser. 2, vol. 25, 1960, 45–157.

[6] Hald, A.: *A history of mathematical statistics from 1750 to 1930.* John Wiley, New York, 1998.

[7] Kotoučková, H.: *Historie robustních matematicko-statistických metod.* Disertační práce. Brno, 2009.

[8] Laplace, P. S.: *Théorie de Jupiter et de Saturne.* Mém. Acad. Sci. Paris (1787), 33–160.

[9] Legendre, A. M.: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes: avec un supplément contenant divers perfectionnemens de ces méthodes et leur application aux deux comètes de 1805.* F. Diod, Paris, 1805.

[10] Mayer, T.: *Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe.* Kosmographische Nachriten u. Sammlungen (1750), 52–183.

[11] Plackett, R. L.: *Studies in the history of probability and statistics XXIX.* Discovery of the method of least squares. Biometrika 59 (1972), 239–251.

[12] Stigler, S.: *Gauss and the invention of least squares.* Ann. Statist. 9 (1981), 465–474.

[13] Stigler, S.: *The history of statistics: The measure of uncertainty before 1900.* Belknap Press and Harvard University Press, Cambridge, MA, 1986.

[14] Stigler, S.: *Statistics on the table: The history of statistical concepts and methods.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1999.