Pavel Calábek

12. středoevropská matematická olympiáda

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 4, 48–52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147578

Další ročníky Mezinárodní olympiády v informatice se budou konat v Ázerbájdžánu (2019), v Singapuru (2020), v Egyptě (2021) a Indonésii (2022). Pořadatelé příští mezinárodní olympiády v informatice z Ázerbájdžánu na místě pozvali všechny delegace zúčastněné na IOI 2018, aby se zúčastnily také následujícího 31. ročníku soutěže. Proběhne v hlavním městě Baku v srpnu 2019.

12. středoevropská matematická olympiáda

Pavel Calábek, PřF UP Olomouc

Dvanáctý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se uskutečnil ve dnech 27. srpna – 2. září 2018 v polském Slezsku, ve městě Bielsko-Biała. Soutěže se letos zúčastnilo 66 žáků, po šesti z deseti tradičních zemí: České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska, navíc se soutěže zúčastnilo jako hosté také šest soutěžících z Ukrajiny. Každou zemi reprezentovali žáci nematuritních ročníků středních škol, kteří se letos nezúčastnili Mezinárodní matematické olympiády.

České reprezentační družstvo vzniklo na základě výsledků ústředního kola kategorie A 67. ročníku české MO. Nominováni byli dva vítězové a čtyři úspěšní řešitelé. Byli jimi *Jonáš Havelka* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Dalibor Kramář* z G v Brně-Řečkovicích, *Josef Minařík* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Magdaléna Mišinová* z G v Praze 6, J. Keplera, *Jana Pallová* z GJŠ v Přerově, a *Tomáš Sourada* z G v Žamberku. Vedoucím české delegace byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Den po příjezdu vedoucí družstev tvořící mezinárodní *jury* po vyčerpávajících jednáních vybrali 12 úloh (4 pro soutěž jednotlivců a 8 pro soutěž družstev), přeložili je do národních jazyků a připravili systém jejich hodnocení. Mezitím se soutěžící seznamovali s historií a současností

Bielska-Białe. Vlastní soutěž proběhla na místní Humanitně-technické univerzitě, ve středu 29. srpna soutěž jednotlivců a o den později i soutěž družstev. První den měli soutěžící na vypracování řešení 5 hodin čistého času, každý příklad byl ohodnocen nejvýše 8 body. Druhý den řešila jednotlivá reprezentační družstva společně osm úloh opět po dobu pěti hodin a každý příklad byl ohodnocen opět nejvýše 8 body. Jako třetí úloha v soutěži družstev byla zařazena i česká úloha, jejímž autorem byl *Josef Tkadlec*. Po soutěži vedoucí družstev opravili žákovská řešení a zkoordinovali jejich hodnocení. Poté stanovila jury závěrečná pořadí obou soutěží a bodové hranice pro udělení medailí. Pro soutěžící pak byl připraven poznávací program po Krakově a okolních polských Beskydech.

Večer 1. září se na zámku v Bielsku-Białe konal závěrečný slavnostní ceremoniál, kde organizátoři slavnostně vyhlásili výsledky. V soutěži jednotlivců bylo osm soutěžících, kteří získali plný počet bodů, ohodnoceno zlatými medailemi (Polsko 3, Maďarsko 2, po jedné získalo Chorvatsko, Německo a Ukrajina), dalších dvanáct soutěžících získalo stříbrné medaile a šestnáct soutěžících bronzové medaile. Navíc 17 žáků obdrželo čestná uznání za úplné vyřešení aspoň jedné úlohy. Je potěšitelné, že mezi oceněnými byli i čeští žáci. *Magdaléna Mišinová* obsadila se ziskem 17 bodů dělené 34. místo a získala bronzovou medaili, *Josef Minařík* (15 b.) a *Jana Pallová* (14 b.) získali čestná uznání. V porovnání s minulými léty jsou tyto výsledky nepříliš uspokojivé a útěchou nemůže být ani 8. místo v soutěži družstev, i když oproti loňsku jsme se o dvě místa polepšili.

V soutěži družstev zvítězila Ukrajina (62 bodů) následována Chorvatskem (60 b.) a Německem (59 b.). České družstvo získalo 27 bodů a obsadilo 8. místo. Uveďme pro představu počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí, které vybojovala jednotlivá družstva v soutěži jednotlivců: Česká republika (0–0–1), Chorvatsko (1–1–4), Litva (0–0–0), Maďarsko (2–1–2), Německo (1–1–1), Polsko (3–3–0), Rakousko (0–0–1), Slovensko (0–3–2), Slovinsko (0–0–2), Švýcarsko (0–0–1) a Ukrajina (1–3–2).

Zájemci mohou získat podrobnější informace na internetových stránkách soutěže:

`http://www.memo2018.abel.bielsko.pl/`

Na závěr uvádíme zadání všech dvanácti soutěžních úloh, za úlohou je uvedena navrhující země.

Soutěž jednotlivců

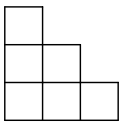
29. srpna 2018

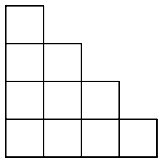
1. Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všech kladných racionálních čísel a uvažujme $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}.$$

(*Rakousko*)

2. Následující dva obrazce sestávající po řadě ze 6 a 10 jednotkových čtverců nazveme *schůdky.*





Uvažujme tabulku 2018×2018 složenou z 2018^2 buněk, z nichž každá je jednotkovým čtvercem. Odstraníme libovolné dvě buňky z jednoho řádku. Dokažte, že zbytek tabulky nelze rozstříhat (po stranách buněk) na schůdky (libovolně otočené). (*Ukrajina*)

3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| < |AC|$. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Dále označme R a Q po řadě těžiště trojúhelníků ABD a ACD. Nechť P je takový bod úsečky BC, že $P \neq D$ a body P, Q, R a D leží na téže kružnici. Dokažte, že se přímky AP, BQ a CR protínají ve společném bodě. (*Slovensko*)

4. a) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo m existuje celé číslo $n \geq m$ takové, že

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

b) Označme $p(m)$ nejmenší celé číslo $n \geq m$, které vyhovuje rovnici $(*)$. Dokažte, že platí $p(2018) = p(2019)$.

Poznámka: Pro reálné číslo x značí $\lfloor x \rfloor$ největší celé číslo, které nepřevyšuje x. (*Slovensko*)

Soutěž družstev
30. srpna 2018

1. Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c platí

$$abc = 1.$$

Dokažte, že platí

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

(*Polsko*)

2. Nechť $P(x)$ je mnohočlen stupně $n \geq 2$ s racionálními koeficienty, který má n různých reálných kořenů tvořících aritmetickou posloupnost. Dokažte, že mezi nimi lze nalézt dva, které jsou zároveň dvěma kořeny nějakého mnohočlenu stupně 2 s racionálními koeficienty.

(*Rakousko*)

3. Tlupa pirátů se pohádala a teď každý z nich míří pistolemi na další dva piráty. Postupně jsou všichni v určitém pořadí jeden po druhém vyvoláni. Jestliže vyvolaný pirát žije, vystřelí na oba piráty, na které mířil (a to i v případě, že jsou již mrtví). Každá střela je okamžitě smrtící. Po vyvoláni všech pirátů zjistíme, že jich bylo zastřeleno právě 28.

Dokažte, že i kdyby piráti byli vyvoláni v jakémkoliv jiném pořadí, bylo by jich zastřeleno aspoň 10. (*Česká republika*)

4. Pro přirozené číslo n uvažujme přirozená čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nepřevyšující 2^k pro některé přirozené číslo $k \geq 3$. *Reprezentací* nezáporného celého čísla t rozumíme takovou posloupnost nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, že platí

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n.$$

Dokažte tvrzení: Pokud má nezáporné celé číslo t nějakou reprezentaci, pak má také reprezentaci, ve které je méně než $2k$ z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenulových. (*Polsko*)

5. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde

$$|AB| < |AC|.$$

Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Body B' a C' leží po řadě na polopřímkách AB a AC tak, že body B', C' a D leží na téže přímce a body B, C, B' a C' leží na téže kružnici se středem O. Označme M střed úsečky BC a H průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že $DHMO$ je rovnoběžník. (*Slovensko*)

6. Uvažujme trojúhelník ABC. Osa jeho vnitřního úhlu ABC protíná stranu AC v bodě L a dále kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě $W \neq B$. Kolmý průmět bodu K na přímku AW označme L. Kružnice opsaná trojúhelníku BLC dále protíná přímku CK v bodě $P \neq C$. Přímky BP a AW se protínají v bodě T. Dokažte, že platí

$$|AW| = |WT|.$$

(*Ukrajina*)

7. Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto:

$$a_1 = 1 \text{ a pro každé přirozené číslo } k \text{ je } a_{k+1} = a_k^3 + 1.$$

Dokažte, že pro všechna prvočísla p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je celé nezáporné číslo, existuje takové přirozené číslo n, že p dělí a_n.
(*Polsko*)

8. Celé číslo n nazveme *slezské*, jestliže existují přirozená čísla a, b a c tak, že

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

a) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých slezských čísel.

b) Dokažte, že existuje přirozené číslo, které není slezské.
(*Německo*)

Organizací příštího (13.) ročníku soutěže, který se uskuteční koncem srpna 2019, byla pověřena Česká republika.