Jan Tomsa

Nehrajte si se sirkami II

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 4, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147567

Nehrajte si se sirkami II

Jan Tomsa, Ústav biofyziky 2. LF UK, Praha

Abstract. The article presents a mathematical game theory which is a simplified version of Marienbad game. This version of the game is played only with two heaps of matchsticks and under slightly modified rules. The winning strategy for this game is based on multiplication by certain "magical" irrational number and not on binary sums like "classical" Marienbad winning strategy.

V článku [1] o hře *marienbad* jsme popsali strategii hry, v níž dva soupeři střídavě odebírají sirky z hromádek, přičemž prohrává (nebo podle jiné varianty vyhrává) hráč, na nějž již žádná sirka nezbude. Počet hromádek ani počet sirek na nich není nijak omezen, jediné pravidlo zní, že v jednom tahu lze odebírat sirky jen z jediné hromádky. Připomeňme si, že matematická teorie této hry je založena na rozkladu počtů sirek na jednotlivých hromádkách na bity, tj. na jejich převod do dvojkové soustavy, a následné aplikaci operace non-ekvivalence neboli exkluzivní součet. Dnes si popíšeme zdánlivě jednodušší verzi hry, která však rovněž vede k zajímavé teorii.

Zadání hry

Pravidla hry jsou následující: máme jen dvě hromádky sirek, přičemž hráč může v rámci jednoho tahu odebírat sirky buď z jedné hromádky, nebo z obou, ale v tom případě z obou stejný počet. Prohrává hráč, na nějž žádná sirka nezbývá. (Varianta, v níž takový hráč naopak vyhrává, se opět liší jen kosmeticky.)

Teorie týkající se hry

Označení zvolíme obdobné jako posledně, tj. každou herní situaci popíšeme neuspořádanou dvojicí $\langle x; y\rangle$, kde $x, y \in \mathbb{N}_0$ a tyto proměnné značí aktuální počet sirek na hromádkách. Podle definice je prohrávající situací $\langle 0; 0\rangle$. Z pravidel hry dále plyne, že vyhrávají všechny pozice typu $\langle x; 0\rangle$ a $\langle x; x\rangle$, kde $x > 0$.

Tab. 1 naznačí metodu, jak hledat další prohrávající (L) a vyhrávající (W) situace.

$x\backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	L_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0	W_0
1	W_0	W_0	L_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
2	W_0	L_1	W_0	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1	W_1
3	W_0	W_1	W_1	W_0	W_1	L_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2
4	W_0	W_1	W_1	W_1	W_0	W_1	W_2	L_3	W_3	W_3	W_3	W_3	W_3	W_3
5	W_0	W_1	W_1	L_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2	W_2
6	W_0	W_1	W_1	W_2	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	L_4	W_4	W_4	W_4
7	W_0	W_1	W_1	W_2	L_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	W_3	W_3	W_3
8	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	L_5
9	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4
10	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	L_4	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2	W_3
11	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_4	W_3	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1	W_2
12	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_4	W_3	W_4	W_3	W_2	W_1	W_0	W_1
13	W_0	W_1	W_1	W_2	W_3	W_2	W_4	W_3	L_5	W_4	W_3	W_2	W_1	W_0

Tab. 1

S první (vlastně nultou) prohrávající situací L_0 označujme jako vyhrávající zbytek nultého řádku, nultého sloupce a hlavní diagonály. Dále, vzhledem k tomu, že jde o neuspořádané dvojice (nezáleží na pořadí hromádek), pozorujeme pochopitelnou symetrii tabulky, to jest, s každou další prohrávající dvojicí $\langle x; y\rangle$ nacházíme automaticky dvojici $\langle y; x\rangle$. Za vyhrávající proto označujeme dva řádky, dva sloupce a dvě diagonály.

Zaměřme se tedy pouze na prohrávající dvojice, v nichž je $x < y$. Zde nalezené prohrávající dvojice tvoří posloupnost se členy $\mathrm{L}_n = \langle x_n; y_n\rangle$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, kde (x_n) a (y_n) jsou zjevně rostoucí posloupnosti, pro něž z konstrukce plyne

$$y_n = x_n + n, \tag{1}$$

neboť po nalezení prohrávající dvojice L_{n-1} je v uvažované části tabulky označeno jako vyhrávající n diagonál. Prozatím jsme nalezli tyto prohrávající dvojice: $\langle 0; 0\rangle$, $\langle 1; 2\rangle$, $\langle 3; 5\rangle$, $\langle 4; 7\rangle$, $\langle 6; 10\rangle$, $\langle 8; 13\rangle$.

Omezme se nyní na množinu přirozených čísel (bez nuly) a zaveďme množiny

$$\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \dots\}, \quad \mathrm{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}.$$

Ukážeme, že tyto množiny tvoří disjunktní rozklad množiny přirozených čísel, tj.

$$\mathrm{X} \cup \mathrm{Y} = \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \emptyset.$$

Dokažme nejprve disjunktnost. Kdyby existovalo číslo $x \in \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$, znamenalo by to, že existují navzájem různá čísla y, z tak, že jak $\langle x; y \rangle$, tak i $\langle z; x \rangle$ jsou prohrávajícími situacemi. To však není možné, neboť z první do druhé lze přejít tahem $y \to z$.

Úplnost rozkladu je rovněž zjevná. Kdyby totiž existovalo číslo x nepatřící do žádné z obou množin, pak pro všechna $y \in \mathbb{N}$ by situace $\langle x; y \rangle$ byla vyhrávající (pro $y > x$ to plyne z $x \notin \mathrm{X}$, pro $y < x$ naopak z $x \notin \mathrm{Y}$, pro $y = x$ to víme již z prvního kroku). To znamená, že příslušný řádek tabulky je tvořen pouze vyhrávajícími situacemi. Pro každou z nich tudíž musí v oblasti nad tímto řádkem existovat prohrávající situace, do níž lze přejít jedním tahem. Těch je tam však pouze x, neboť v žádném řádku z pochopitelných důvodů nemůže být více než jedna. Přitom do každé z nich lze přejít nejvýše dvěma způsoby, buď tahem $\langle x; y \rangle \to \langle x - t; y \rangle$ nebo tahem $\langle x; y \rangle \to \langle x - t; y - t \rangle$, zatímco čísel y je nekonečně mnoho.

Stojíme tedy před úkolem, jak algoritmizovat konstrukci množin X a Y, jinými slovy jak rozdělit množinu přirozených čísel na 2 disjunktní rostoucí posloupnosti (x_n) a (y_n) splňující vztah (1). K tomu účelu nejprve dokážeme jeden pomocný vztah. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ totiž platí

$$y_n = x_{x_n} + 1, \tag{2}$$

Důkaz. Zvolme pevně nějaké n a uvažujme množinu $\{1, 2, \ldots, y_n\}$. Její podmnožina $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ má n prvků, zbývající prvky patří množině X. Avšak vzhledem k (1) je těchto prvků $y_n - n = x_n$, jde tudíž o množinu $\{x_1, x_2, \ldots, x_{x_n}\}$. V důsledku (1) dále platí

$$y_n - y_{n-1} = x_n - x_{n-1} + 1 \geq 2.$$

Mezi y_{n-1} a y_n tedy musí ležet alespoň jeden prvek množiny X. Vzhledem k monotonii posloupnosti (x_n) je nejvyšší z nich roven x_{x_n}.

Spojením (1) a (2) dostáváme

$$x_{x_n} = x_n + n - 1. \tag{3}$$

Zjevně je $x_n \geq n$. Na druhé straně ukážeme, že $x_n - x_{n-1} \leq 2$, a tudíž $x_n \leq 2n$. V opačném případě by totiž mezi x_{n-1} a x_n ležely nejméně dva prvky množiny Y, mezi nimiž, jak jsme právě ukázali, by musel ležet další prvek množiny X, což je spor s monotonií posloupnosti (x_n).

Posloupnost (x_n) je tedy zdola i shora ohraničena lineární funkcí. Nabízí se tudíž hypotéza, že $x_n = [\alpha n]$, kde α je reálné číslo z intervalu $(1; 2)$

a závorky $[,]$ představují dolní celou část čísla umístěného v těchto závorkách. K jejímu ověření přistoupíme nejprve heuristicky, tj. budeme se snažit číslo α najít za předpokladu, že hypotéza platí. Z ní postupně plyne

$$\alpha n - 1 < x_n \leq \alpha n,$$
$$\alpha^2 n - \alpha < \alpha x_n \leq \alpha^2 n,$$
$$\alpha^2 n - \alpha - 1 < [\alpha x_n] \leq \alpha^2 n.$$

Spolu s (3) postupně máme

$$\alpha^2 n - \alpha - 1 < [\alpha n] + n - 1 < \alpha^2 n,$$
$$\alpha^2 n - \alpha < \alpha n + n < \alpha^2 n + 2,$$
$$-\frac{2}{n} < \alpha^2 - \alpha - 1 < \frac{\alpha}{n}.$$

Mají-li nerovnosti platit pro všechna přirozená čísla n, je třeba splnit rovnost

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \tag{4}$$

Z kořenů této rovnice vyhovuje požadavkům úlohy pouze kladný, tj.

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Existence čísla α je však pouze nutnou, nikoli však postačující podmínkou platnosti hypotézy. K jejímu důkazu je třeba ověřit, že hodnoty $[\alpha n]$ skutečně dávají x_n. Jinými slovy, že dvojice posloupností $([\alpha n])$ a $([(\alpha+1)n])$ představuje disjunktní rozklad množiny $\mathbb{N}$ (místo $\alpha + 1$ můžeme vzhledem k (4) psát α^2). Pak jsou totiž totožné s X a Y, neboť taková dvojice posloupností, splňujících (1), může být pouze jedna.

Máme tedy dokázat 2 tvrzení:

1. *Disjunktnost*: $\forall m, n \in \mathbb{N}\colon [\alpha m] \neq [\alpha^2 n]$
2. *Úplnost*: $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon m = [\alpha n] \vee m = [\alpha^2 n]$

Ad 1. Předpokládejme, že existují čísla k, m, n tak, že

$$k = [\alpha m] = [\alpha^2 n].$$

Tedy platí

$$k < \alpha m < k + 1,$$
$$k < \alpha^2 n < k + 1,$$

neboli

$$\frac{m}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m}{k},$$
$$\frac{n}{k+1} < \frac{1}{\alpha^2} < \frac{n}{k}.$$

Nerovnosti jsou ostré, neboť α je iracionální číslo. Jejich sečtením získáme

$$\frac{m+n}{k+1} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} < \frac{m+n}{k}.$$

Výraz uprostřed je roven jedné, takže dostáváme

$$k < m + n < k + 1.$$

To je však spor, neboť mezi dvěma sousedními přirozenými čísly již žádné další ležet nemůže.

Ad 2: Nechť $m \in \mathbb{N}$. Označme

$$p = \left[\frac{m+1}{\alpha}\right], \quad q = \left[\frac{m+1}{\alpha^2}\right].$$

To znamená, že

$$\frac{m+1}{\alpha} - 1 < p < \frac{m+1}{\alpha},$$
$$\frac{m+1}{\alpha^2} - 1 < q < \frac{m+1}{\alpha^2}.$$

Z „pravých“ nerovností plyne $[\alpha p] \leq m$, $[\alpha^2 q] \leq m$. Nastane-li v prvním, resp. druhém případě rovnost, je $n = p$, resp. $n = q$, čímž je problém vyřešen. Předpokládejme, že rovnost nenastane ani v jednom z případů. Pak platí současně $\alpha p < m$, $\alpha^2 q < m$, neboli

$$p < \frac{m}{\alpha}, \quad q < \frac{m}{\alpha^2}.$$

Sečtením obou nerovností získáme

$$p + q < m\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = m.$$

Na druhé straně, sečtením „levých" nerovností obdržíme

$$p + q > (m + 1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) - 2 = m - 1.$$

Celkově tak opět docházíme ke sporu

$$m - 1 < p + q < m.$$

Zpět ke hře

Tolik teorie. Co se týče praktického hraní hry, na rozdíl od *marienbadu* zde asi lze sotva předpokládat pohotové výpočty zpaměti s iracionální veličinou. Jedinou rozumnou možností je pamatovat si dostatečný počet prohrávajících situací.

Efektní může být např. začínat s 50 sirkami a nabídnout soupeři, aby si je na dvě hromádky rozdělil sám. Nezná-li princip hry, je nepravděpodobné, že by uhodl jedinou pohrávající situaci, kterou je v tomto případě $\langle 19; 31\rangle$. Následují $\langle 17; 28\rangle$, $\langle 16; 26\rangle$, $\langle 14; 23\rangle$, $\langle 12; 20\rangle$, $\langle 11; 18\rangle$, $\langle 9; 15\rangle$ a zbytek už znáte.

Závěr

Na závěr jednoduché cvičení pro čtenáře: Rozmyslete si, jak by se herní strategie změnila, kdyby hráč, na něhož již žádná sirka nezbyla, naopak vyhrával.

Literatura

[1] Tomsa, J.: Nehrajte si se sirkami I. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 92 (2017), č. 1, s. 1–9.

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff%27s_game`.