Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 3, 54–60

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147469`

Naše soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. prosince 2018* na adresu redakce.

Úloha 73 Reálná čísla a, b jsou parametry, navíc a je vícenásobným kořenem rovnice

$$x^6 - ax^5 + x^4 - ax^3 + x^2 + 2bx + b^2 = 0.$$

Určete všechny reálné kořeny této rovnice. Proveďte diskusi vzhledem k parametrům a, b.

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 74 *Izolované nádoby*

Do dvou tepelně izolovaných nádob postupně nalijeme vodu o stejné hmotnosti $M = 2$ kg. Voda v první nádobě bude mít teplotu $t_1 = 70$ °C, voda v druhé nádobě bude mít teplotu $t_2 = 15$ °C. Část vody o hmotnosti m přelijeme z první nádoby do druhé, po ustálení bude teplota vody v druhé nádobě t_2'. Potom stejné množství vody o hmotnosti m opět přelijeme do první nádoby a necháme ustálit, teplota vody v první nádobě bude $t_1' = 65$ °C. Určete

a) teplotu t_2' vody v druhé nádobě na konci děje,

b) hmotnost m vody, která byla přelita z první nádoby do druhé a pak zpět do první.

Tepelnou kapacitu nádob zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 4/2017

Úloha 67 Na třech hromádkách leží celkem N kuliček. *Krokem* nazveme sjednocení kuliček z některých dvou hromádek a zpětné rozdělení na dvě hromádky tak, aby se počty kuliček v obou hromádkách lišily nejvýše o jednu. Dokažte, že po několika krocích je možné dosáhnout toho, že se počty kuliček na každých dvou hromádkách liší nejvýše o jednu.

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Řešení úlohy provedeme pro tři případy $N = 3n$, $N = 3n + 1$, $N = 3n + 2$, kde $n \in \mathbb{N}$.

V případě $N = 3n$ bude po posledním kroku na hromádkách n, n, n kuliček. Je-li na začátku již na některé hromádce n kuliček, stačí dokončit celý proces jediným krokem.

Předpokládejme tedy, že na hromádkách je na začátku a, b, c kuliček, kde $1 \le a < n < b \le c$ (případ $1 \le a \le b < n < c$ se řeší analogicky). V tomto případě je

$$c \ge a + 2 \quad \text{a} \quad \frac{a+c}{2} \ge \frac{2a+2}{2} = a + 1.$$

Jsou-li a, c stejné parity, je $a + c = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$a < a + 1 \le k < n < b.$$

(Případ $a < a + 1 \le n < k$ nemůže nastat, neboť by bylo $n < k$, $n < k$, $n < b$, a tedy by bylo $3n < 2k + b = a + b + c$. Případ $n = k$ také nemůže nastat, neboť by bylo $n = k$, $n = k$, $n < b$, a tedy by bylo $3n < a + b + c$.) Jelikož je $k < n$, jsou po provedeném kroku na hromádkách počty kuliček v intervalu $\langle a + 1, b\rangle$.

Jsou-li a, c opačné parity, je $a + c = k + (k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$a < a + 1 \le k < k + 1 \le n < b.$$

(Případ $a < a + 1 \le k = n < k + 1$ nemůže nastat, neboť by bylo $n = k$, $n < k + 1$, $n < b$, a tedy by bylo $3n < 2k + 1 + b = a + b + c$.) Bude-li $k + 1 \le n$, jsou po provedeném kroku na hromádkách počty kuliček v intervalu $\langle a + 1, b\rangle$.

Tedy v každém kroku bude mít některá z hromádek n kuliček a pak stačí už jen jeden krok, nebo počty kuliček budou oproti předchozí situaci ležet v intervalu $\langle a + 1, b\rangle$, který je vlastní podmnožinou intervalu

$\langle a, c\rangle$. Počty a, b, c zde vždy značí hodnoty po bezprostředně provedeném kroku.

Po konečném počtu kroků bude tedy počet kuliček na některé hromádce roven n, takže pak stačí k dokončení procesu jediný krok.

V případě $N = 3n + 1$ bude po posledním kroku na hromádkách n, n, $n + 1$ kuliček. Je-li na začátku již na některé hromádce n nebo $n + 1$ kuliček, stačí dokončit celý proces jediným krokem.

Předpokládejme tedy, že na hromádkách je na začátku a, b, c kuliček, kde $1 \le a < n < n + 1 < b \le c$ (případ $1 \le a \le b < n < n + 1 < c$ se řeší analogicky). V tomto případě je

$$c \ge a + 3 \quad \text{a} \quad \frac{a + c}{2} \ge \frac{2a + 3}{2} > a + 1.$$

Jsou-li a, c stejné parity, je $a + c = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$a < a + 1 \le k < n < n + 1 < b.$$

Stejně jako v případě $N = 3n$ jsou po provedeném kroku na hromádkách počty kuliček v intervalu $\langle a + 1, b\rangle$.

Jsou-li a, c opačné parity, je $a + c = k + (k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$a < a + 1 \le k < k + 1 \le n < n + 1 < b.$$

Stejně jako v případě $N = 3n$ jsou po provedeném kroku na hromádkách počty kuliček v intervalu $\langle a + 1, b\rangle$.

Po konečném počtu kroků bude tedy počet kuliček na některé hromádce roven n nebo $n + 1$, takže pak stačí k dokončení procesu jediný krok.

V případě $N = 3n + 2$ bude po posledním kroku na hromádkách n, $n + 1$, $n + 1$ kuliček. Je-li na začátku již na některé hromádce n nebo $n + 1$ kuliček, stačí dokončit celý proces jediným krokem.

Předpokládejme tedy, že na hromádkách je na začátku a, b, c kuliček, kde $1 \le a < n < n + 1 < b \le c$ (případ $1 \le a \le b < n < n + 1 < c$ se řeší analogicky). V tomto případě je

$$c \ge a + 3 \quad \text{a} \quad \frac{a + c}{2} \ge \frac{2a + 3}{2} > a + 1.$$

Jsou-li a, c stejné parity, je $a + c = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$a < a + 1 \le k < n < n + 1 < b.$$

Stejně jako v případě $N = 3n$ jsou po provedeném kroku na hromádkách počty kuliček v intervalu $\langle a+1, b\rangle$.

Jsou-li a, c opačné parity, je $a + c = k + (k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy

$$a < a + 1 \leq k < k + 1 \leq n < n + 1 < b.$$

Stejně jako v případě $N = 3n$ jsou po provedeném kroku na hromádkách počty kuliček v intervalu $\langle a+1, b\rangle$.

Po konečném počtu kroků bude tedy počet kuliček na některé hromádce roven n nebo $n + 1$, takže pak stačí k dokončení procesu jediný krok.

Úloha 68 *Skákající míček*

Z okna bytu pustil chlapec z výšky h_1 tenisový míček. Zjistil, že míček se po odrazu na vodorovném povrchu Země dostal do výšky h_2, $h_2 < h_1$. Dále zjistil, že míček dopadl na vodorovný povrch Země poprvé za dobu $t_1 = 2{,}0$ s, podruhé za dobu $t_2 = 5{,}0$ s od začátku pohybu.

a) Stanovte výšky h_1 a h_2.

b) Stanovte podíl rychlostí míčku $k = v_2/v_1$ po odrazu a před odrazem.

c) Za jakou dobu dopadne míček na vodorovný povrch Země potřetí?

Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty. Při výpočtech pro dané hodnoty počítejte s hodnotou $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(*Ivo Volf*)

Autorské řešení:

a) Pro výšku h_1 platí

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Po odrazu vystoupil míček do výšky h_2 a spadl. Protože doba výstupu je rovna době pádu, je tato doba $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ a platí

$$h_2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^2.$$

Pro dané hodnoty:

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2{,}0^2\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{m}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{5{,}0 - 2{,}0}{2}\right)^2\ \mathrm{m} = 11\ \mathrm{m}$$

b) Před odrazem má míček rychlost $v_1 = gt_1$ a po odrazu má rychlost

$$v_2 = g\frac{t_2 - t_1}{2},$$

poněvadž míček vystupuje, popř. padá po dobu $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$. Poměr obou rychlostí je

$$k = \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_2 - t_1}{2t_1}.$$

Pro dané hodnoty:

$$k = \frac{5{,}0 - 2{,}0}{2 \cdot 2{,}0} = \frac{3}{4}$$

c) Rychlost, s níž se míček odrazí podruhé, označíme v_3. Poněvadž platí

$$k = \frac{v_3}{v_2} = \frac{v_2}{v_1},$$

můžeme psát

$$v_3 = kv_2 = k^2 v_1 = k^2 g t_1.$$

Potom

$$t_3 = t_2 + \frac{2v_3}{g} = t_2 + 2k^2 t_1 = t_2 + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2t_1}.$$

Pro dané hodnoty:

$$t_3 = 5{,}0\ \mathrm{s} + \frac{(5{,}0 - 2{,}0)^2}{2 \cdot 2{,}0}\ \mathrm{s} = 7{,}25\ \mathrm{s}$$

Omluva a oprava řešení jedné úlohy

V Rozhledech 1/2018 byla vyřešena dále uvedená úloha. Tam prezentované řešení je chybné. Došlo totiž ke smíchání řešení dvou různých úloh. Velice se za to omlouváme a uvádíme nyní správné řešení oné úlohy. Také byl opraven počet přidělených bodů řešitelům této úlohy.

Úloha 63 Číslo 22 001 177 je dělitelné jedenácti. Kolik osmiciferných čísel složených z cifer 2, 2, 0, 0, 1, 1, 7, 7 je dělitelných jedenácti?

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Součet cifer čísla 22 001 177 na lichých pozicích a součet cifer na sudých pozicích je stejný, takže rozdíl obou součtů je nula, a proto je dané číslo dělitelné jedenácti.

Součet $2 + 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 7 + 7$ je sudé číslo, proto rozdíl součtu jakýchkoli čtyř citer a součtu zbylých čtyř cifer čísla 22 001 177 je číslo sudé. Pro dělitelnost jedenácti nás tedy zajímá jen rozdíl obou takových součtů, který je roven číslům -22, 0 a 22 (případně -44 či 44 atd.).

Součty -22, 0 a 22, resp. vyšší hodnoty jsou zde nedosažitelné.

Uvažujme proto pouze onen rozdíl roven číslu 0. Tato situace vznikne jen permutací číslic na sudých pozicích a permutací číslic na lichých pozicích čísla 22 001 177. Jelikož na začátku nemůže být číslice 0, proto počet permutací na lichých pozicích (zleva) je $3 \cdot 3!$. Na sudých pozicích (zleva) je počet permutací roven $4!$.

Celkový počet hledaných čísel je tedy

$$3 \cdot 3! \cdot 4! = 432.$$

Stav soutěže po 68 soutěžních úlohách

Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 70,5 b., Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 b., Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 b., Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 b., Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 b., Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 b., Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 b., Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 b., Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 b., Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 b., Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 b., Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 b., Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 b., Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 b., Marian Poljak (GJŠ, Přerov) – 15 b., Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 b., Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 b., Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 b., Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 b., Matouš Bílek (GJŠ, Přerov) – 10 b., Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 b., Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 b., Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 b., Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 b., Libor Drozek (G, Holešov) – 9 b., Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 b., Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 7,5 b., Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 b., Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 b., Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 b., Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 b., Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 b., Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 b., Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 b., Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 b., Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 b., Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 b., Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 b., Radovan Švarc

(G, Česká Třebová) – 5 b., Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 b., Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 b., Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 4,5 b., Jiří Guth (G, Jírovcova, České Budějovice) – 3 b., Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 b., Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 b., Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b., Václav Skála (G, Klatovy) – 1 b., Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 b., Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b.

VÝZVA

Redakční rada časopisu Rozhledy matematicko-fyzikální informuje své čtenáře, případně další zájemce, že chce změnit formu rubriky NAŠE SOUTĚŽ. Doposud šlo o rubriku soutěžní, do níž se sice postupně zapojilo poměrně hodně řešitelů, ale přece jen bychom jich chtěli zapojit mnohem více.

Chceme, aby se čtenáři mohli prezentovat svými úlohami, které rádi vložíme do rubriky jako soutěžní úlohy. Soutěž bude probíhat stejně jako doposud, ale pole autorů úloh tak bude pestřejší. Objeví se jistě nové zajímavé problémy, které by jinak možná „zapadly“.

Tedy o co vás prosíme. **Pošlete nám své originální úlohy, i s řešeními**, úlohy posoudíme **a v případě, že je otiskneme, uvedeme vaše jméno coby autora.**

Čtenáři budou jistě dále posílat svá řešení a tabulka všech řešitelů se bude rozšiřovat.

Děkujeme, že se zapojíte.

Redakční rada Rozhledů