Pavel Provinský

Dlaždičky

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 3, 1–8

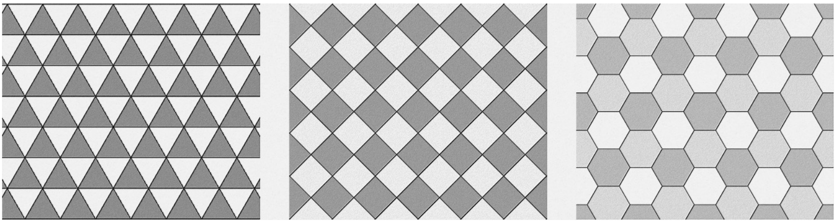
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147459

Dlaždičky

Pavel Provinský, FD ČVUT, Praha

Abstract. The article presents various types of tilings of a plane, periodic and quasiperiodic. The presentation is illustrated by many pictures.

Již v Eukleidových *Základech* se dozvíme, že rovinu můžeme periodicky vydláždit jen třemi pravidelnými n-úhelníky: trojúhelníkem, čtvercem a šestiúhelníkem (obr. 1).



Obr. 1: Pokrytí pravidelnými n-úhelníky [4, z1]

Přesněji toto tvrzení zní: Rovinu můžeme periodicky vydláždit pravidelnými n-úhelníky jednoho druhu a jedné velikosti právě třemi způsoby: trojúhelníky, čtverci, nebo šestiúhelníky.

Proč toto zpřesnění? Není to jen hnidopišské slovíčkaření? V dalším textu si ukážeme, že každé z těch slov má svůj význam.

Nejprve si však Euklidův důkaz naznačíme: Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°. Ve čtverci, který je sjednocením dvou trojúhelníků, má tedy součet vnitřních úhlů $2 \cdot 180°$, v n-úhelníku, který je sjednocením $n-2$ trojúhelníků, je součet vnitřních úhlů roven $(n-2) \cdot 180°$. V pravidelných n-úhelnících tedy jednomu vnitřnímu úhlu náleží velikost

$$\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}.$$

Pokud se mají n-úhelníky stýkat vrcholy a v jednom vrcholu se má stýkat k pravidelných n-úhelníků, tak

$$k \cdot \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 360°,$$

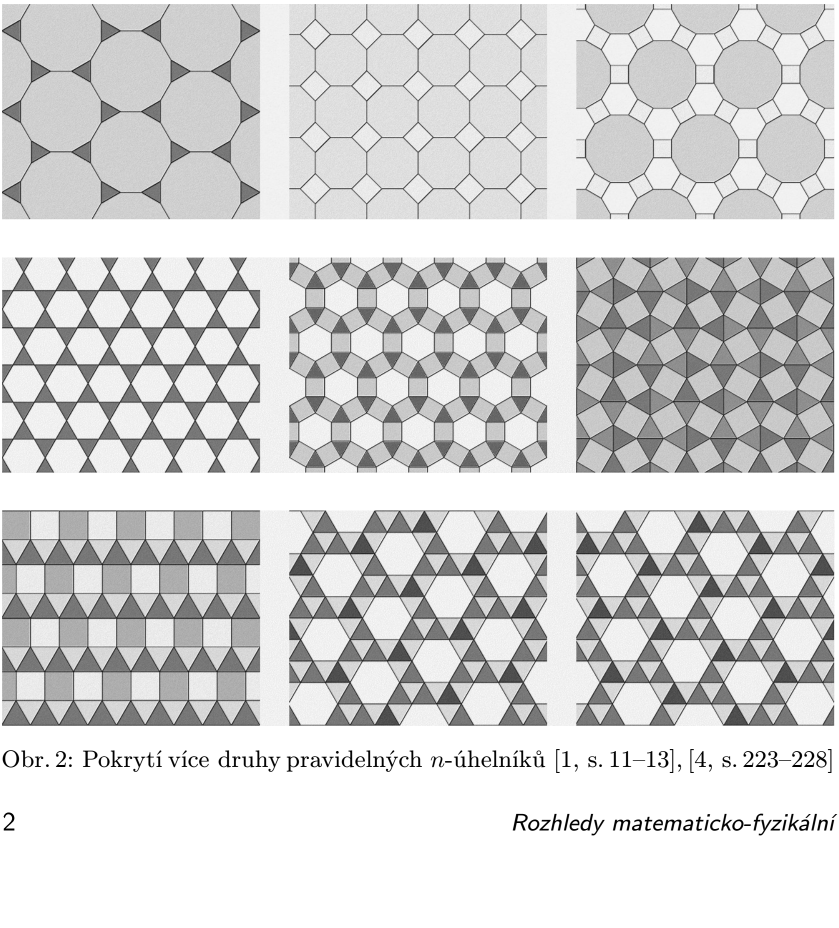
$$n = \frac{2k}{k-2}.$$

Řešení této rovnice je zapsáno do následující tabulky:

k	3	4	5	6	7	...
n	6	4	$\frac{10}{7}$	3	$\frac{14}{5}$	...

Stýkat se tedy mohou tři šestiúhelníky, čtyři čtverce nebo šest trojúhelníků. Volbou vyšších hodnot k získáme hodnoty mezi 2 a 3, žádnou celočíselnou.

Pokud netrváme na jednom druhu n-úhelníků, přibude 9 možností dalších (obr. 2). Těmito druhy dláždění se zabýval Johannes Kepler.



Obr. 2: Pokrytí více druhy pravidelných n-úhelníků [1, s. 11–13], [4, s. 223–228]

Jak na tato dláždění přijít? Řešíme diofantickou rovnici

$$\frac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1}+\frac{(n_2-2)\cdot 180^\circ}{n_2}+\ldots+\frac{(n_k-2)\cdot 180^\circ}{n_k}=360^\circ,$$

kde $k \geq 3$ (ve vrcholech se stýkají minimálně 3 obrazce) a $k \leq 6$ (pro 6 trojúhelníků). Pro hodnoty n získáme 17 možností:

(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10), (6, 6, 6),

(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4), (3, 3, 4, 12),

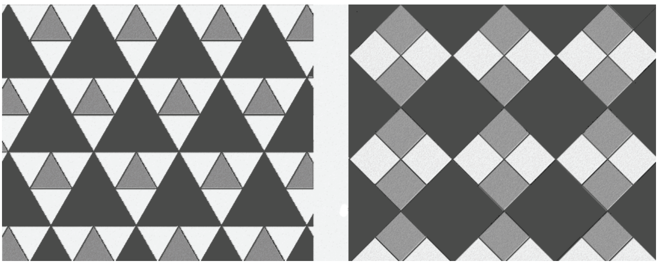
(3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4),

(3, 3, 3, 3, 3, 3).

Tyto varianty dobře sedí v jednom vrcholu, ne všechny však pasují i ve vrcholech dalších.

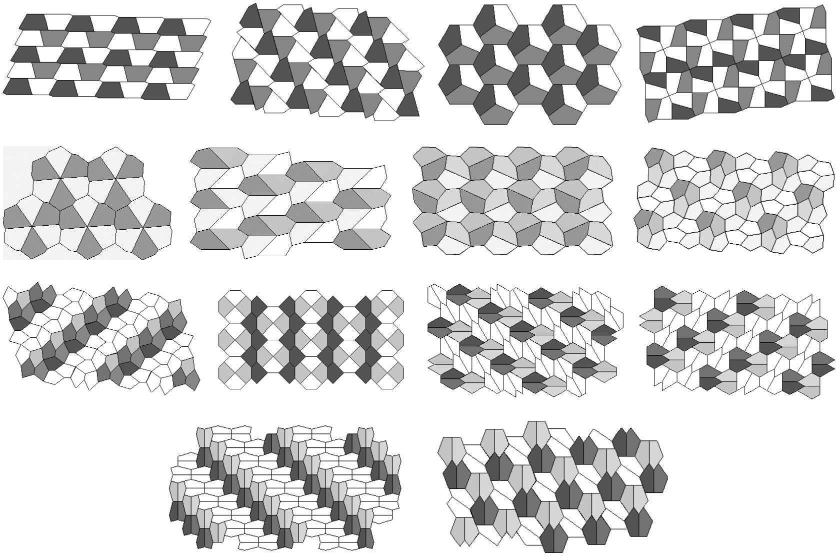
Kromě již výše uvedených dláždění s jedním druhem dlaždic $(6,6,6)$, $(4,4,4,4)$, $(3,3,3,3,3,3)$ pak dostaneme 9 dalších možností. Poslední dvě možnosti náležejí volbě $(3,3,3,3,6)$, jsou však svými zrcadlovými obrazy. Všechny ostatní možnosti jsou pravo-levě symetrické.

Nebudeme-li trvat na stejné velikosti n-úhelníků, objeví se mnoho dalších možností. Dvě z nich vidíme na obr. 3.



Obr. 3: Pokrytí různě velkými pravidelnými mnohoúhelníky

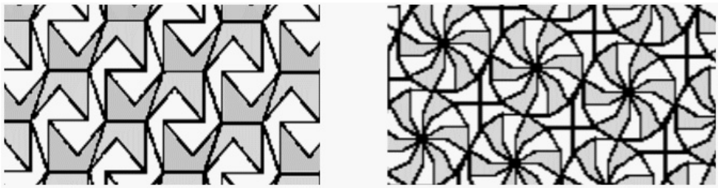
Všimněme si, že v žádném z předchozích dláždění se neobjevil pětiúhelník. Chceme-li však dláždit právě pětiúhelníky, i to jde. Musíme se ale vzdát jejich pravidelnosti. Na obr. 4 nalezneme známá periodická dláždění konvexními pětiúhelníky.



Obr. 4: Periodické dláždění konvexními pětiúhelníky [z2]

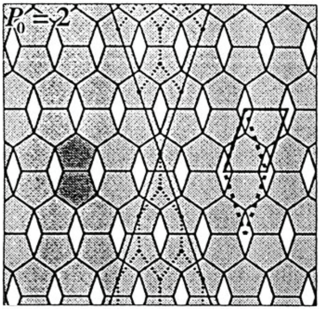
Zvláště upozorňujeme na první, třetí a čtvrté dláždění ve třetí řadě a první dláždění v řadě čtvrté. Ta nalezla matematická amatérka, žena v domácnosti Marjorie Rice. Nechť je nám to povzbuzením k našim vlastním matematickým objevům!

Uveďme ještě dva příklady s pětiúhelníky nekonvexními (obr. 5). Jde o výsledky Boba Jenkinse.



Obr. 5: Periodické dláždění nekonvexními pětiúhelníky [z3]

Viděli jsme pětiúhelníky různé, nikoliv však ten známý pětiúhelník pravidelný. Pokud máte doma kachličky právě takové, ani ty nevyhazujte. Zkuste je doplnit třeba kosočtverci, jak ukazuje obr. 6. Kosočtverce nejsou pravidelné čtyřúhelníky, proto jsme tuto možnost nenašli mezi dlážděními Keplerovými.



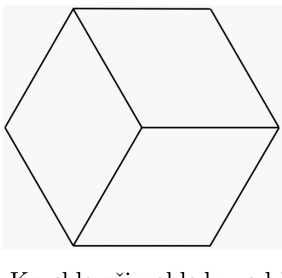
Obr. 6: Použití pravidelných pětiúhelníků [2]

Přestali jsme trvat na požadavku, aby mnohoúhelníky byly stejného druhu, velikosti nebo aby byly pravidelné. Nyní se vzdejme i toho, že dláždění bude periodické. Je však vůbec možné vydláždit rovinu neperiodicky? Možné to samozřejmě je. Inspirací nám může být např. dláždění pomocí dvou různě velkých čtverců o stranách délek a a $2a$.

Nejprve vydláždíme celou rovinu velkými čtverci. Pak některé velké čtverce nahradíme čtyřmi malými. Nahrazované čtverce vybíráme nějakým neperiodickým způsobem. Např. si jeden čtverec vybereme jako střed a pak nahrazujeme čtverce, které jsou od něho o dvě, čtyři, osm, šestnáct atd. řad daleko ve směru vzájemně kolmých os x a y.

Zajímavější variantou jsou tzv. kvaziperiodická dláždění. Ta mají svoji pravidelnost, nikoliv však jednoduchou pravidelnost periodickou. Ukažme si, jak tato dláždění vznikají.

Základní myšlenka je poměrně jednoduchá. Obr. 7 ukazuje krychli při pohledu „od špičky“ – vidíme, že z vrcholu trojrozměrné krychle vycházejí právě tři hrany. Obrázek má trojčetnou rotační symetrii, což znamená, že když ho otočíme kolem středu právě o třetinu plného úhlu, tj. o 120°, získáme obrázek stejný.



Obr. 7: Krychle při pohledu „od špičky“

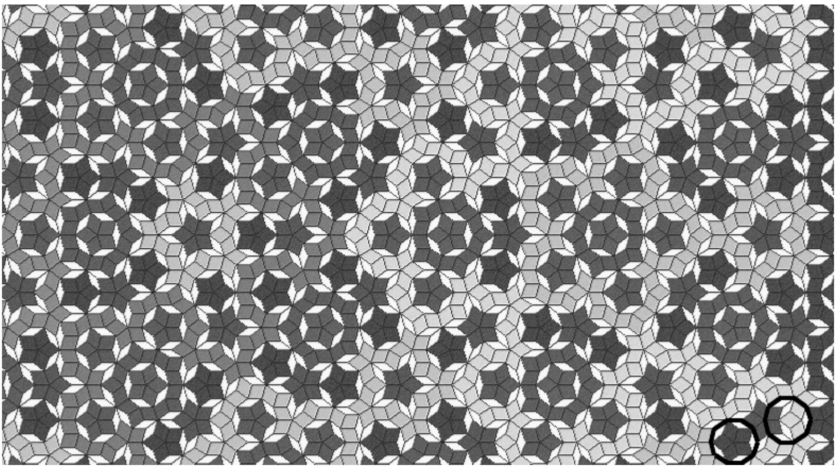
Nyní si představme krychlový krystal, například kuchyňské soli. Postavme ho na špičku a pak mu vodorovným řezem odřízněme roh. Při pohledu mikroskopem na plochu řezu uvidíme právě takové krychličky postavené na špičku. A když si vzniklý vzorek překreslíme, získáme periodické pokrytí roviny kosočtverci.

Nyní se seznámíme s jedním velmi slavným dlážděním, které vymyslel pan Roger Penrose. Toto Penroseovo dláždění má pětičetnou rotační symetrii. Hned nás může při srovnání s krychlí na obr. 7 napadnout, že k pětičetné rotační symetrii bychom potřebovali krychle pětirozměrné.

Ano, je to tak. Pětirozměrný prostor vyplněný pětirozměrnými krychlemi si asi nepředstavíte, matematici však s takovými vícerozměrnými prostory pracují poměrně běžně. Pan Penrose tedy začal s pětirozměrným prostorem vyplněným pětirozměrnými krychlemi a tímto prostorem pak vedl šikovnou rovinu řezu.

Přesné určení této roviny je poměrně komplikované a je k tomu potřeba pokročilejší algebra. Když tuto rovinu našel a vykreslil si vzor, který získal na rovině řezu, uviděl dláždění ze dvou druhů kosočtverců (obr. 8). Toto dláždění je kvaziperiodické, to znamená, že podobné motivy se opakují v nesčetných variacích, nikdy však docela stejně.

Po objevu tohoto prvního kvaziperiodického dláždění brzy následovala další. Vyrobit můžeme např. dláždění se sedmičetnou rotační symetrií ze sedmirozměrných krychlí apod.

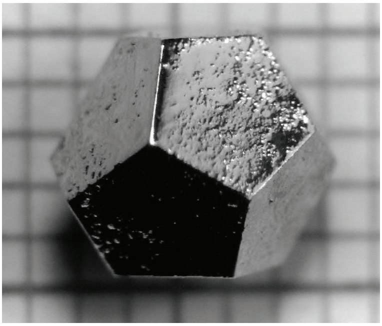


Obr. 8: Penroseovo dláždění [z4]

Nyní si vysvětleme, jak měl objev kvaziperiodického dláždění svůj dopad i na fyziku a chemii. Nejprve se od roviny přesuňme k třírozměrnému prostoru. Ptejme se, jak můžeme periodicky vyplnit prostor nebo, ekvivalentně, jaké různé krystaly mohou existovat. Tím se zabývá krystalografie. Krystalografie rozeznává mnoho druhů krystalů, žádný z nich však nemá a mít nemůže pětičetnou rotační symetrii.

Co je pak ale vyfoceno na obr. 9? Krystal z atomů holmia, hořčíku a zinku má tvar pravidelného dvanáctistěnu a pětičetná rotační symetrie je evidentní. Správná odpověď je, že se nejedná o krystal s periodickou strukturou, ale o kvazikrystal. Krystalické buňky jsou uspořádány kvaziperiodicky. Jde o jakousi třírozměrnou obdobu Penroseova dláždění.

Dnes můžeme kvazikrystaly nalézt v některých LED světelných zdrojích, jako tepelnou izolaci motorů nebo třeba jako nepřilnavou vrstvu v kuchyňských pánvích [3].



Obr. 9: Kvazikrystal z atomů Al, Cu, Fe [z5]

Literatura

[1] Šolcová, A.: *Praktické aplikace teorie čísel.* Habilitační přednáška, ČVUT, Praha, 2008, `http://www.cvut.cz/pracoviste/odbor-rozvoje/dokumenty/hab_inaug/hp/2008/hp-22-2008-solcova-fsv.pdf`.

[2] Caspar, D. L. D., Fontano, E.: *Five-fold symmetry in crystalline quasicrystal lattices.* In: Symmetries Throughout the Sciences, Henley, E. M. (ed.), National Academy of Sciences of the USA, Irvine, CA, 1996, May, 11–12, `http://www.pnas.org/content/93/25/14271.full.pdf+html`.

[3] Králová, M.: Kvazikrystaly. *Techmania Science Center*, June 4 (2009) `http://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/fyzika/struktura-latek/pevne-latky/kvazikrystaly`.

[4] Zhouf, J.: *Speciální teselace – mozaiky z pravidelných mnohoúhelníků.* In: Krátká, M. (ed.), Jak učit matematiku žáky ve věku 11–15 let, Vydavatelský servis, Plzeň, 2006.

Zdroje vyobrazení

[z1] `http://www.staff.u-szeged.hu/~koszo/index.html`
[z2] `http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html`
[z3] `http://burtleburtle.net/bob/tile/pentagon.html`
[z4] `http://www.robojenny.com/2008_05_01_archive.html`
[z5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Holmium%E2%80%93magnesium%E2%80%93zinc_quasicrystal`

Zaujímavý rok 2018

Dušan Jedinák, Trnava

Abstract. The paper introduces an unexpected solution to a typical test problem. The aim is to point out the incorrect solution techniques which are often presented in various tests.

Úloha: Doplňte ďalší člen postupnosti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... a zdôvodnite to.

Moje riešenie: Doplňam 2018. Zdá sa vám to podivné? Myslel som postupnosť (a_n) zadanú n-tým členom

$$a_n = n + 2010 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{7!}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Prvých sedem členov tejto postupnosti si určite vyčíslite sami. Ôsmy člen mnou myslenej postupnosti je $a_8 = 2018$. Vyhovuje to. V roku 2018 je to predsa celkom dobre pochopiteľné.

Čo ste mysleli vy? Viete predsa, že postupnosť nie je jednoznačne určená svojimi prvými členmi!

Literatura

[1] Zhouf, J.: *Jsou testy IQ opravdovými testy IQ?* In: Ani jeden matematický talent nazmar 2015, Zhouf, J., Růžičková, L. (eds), Gaudeamus, Hradec Králové, 2015, s. 51–57.