Libor Koudela; Jiří Veselý

Felix Hausdorff (1868-1942) (ke 150. výročí narození)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 63 (2018), No. 2, 108–124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147327

Felix Hausdorff (1868–1942)
(ke 150. výročí narození)

Libor Koudela, Jiří Veselý

Abstrakt. Článek pojednává o životě a díle jednoho z nejvýznamnějších německých matematiků Felixe Hausdorffa, který podstatně ovlivnil vývoj mnoha odvětví matematiky 20. století.

Život

Felix Hausdorff se narodil 8. listopadu 1868 ve Vratislavi (tehdy Breslau, nyní Wrocław) v rodině zámožného židovského obchodníka s textilem. Nevíme mnoho o tom, jak striktně byl vychováván k judaismu, jeho otec byl však přesvědčen, že základem židovské víry nejsou kázání a obřady, ale dobrá rodinná výchova. Hausdorffovi se přestěhovali v roce 1870 do Lipska, kde Felix získal středoškolské vzdělání na elitní škole (Nicolaigymnasium); již tehdy projevoval touhu věnovat se přírodním vědám. V letech 1887 až 1891 studoval v Lipsku matematiku a astronomii (po jednom semestru též ve Freiburgu a v Berlíně). Na konci studia pracoval s astronomem Heinrichem Brunsem (1848–1919), pod jehož vedením napsal i disertační práci [12] o refrakci světla v atmosféře.

Volba další dráhy byla pro Hausdorffa velmi obtížná. Již záhy se projevil jeho literární talent, byl hudebně nadaný a byl výborným pianistou. Znal velmi dobře tvorbu Richarda Wagnera (1813–1883) a měl jeho hudbu rád. O jeho všestrannosti svědčí výběr přednášek z filosofie, literatury, historie, matematiky, astronomie, fyziky, zeměpisu, teologie i kriminalistiky, které během studia navštěvoval. Habilitoval se roku 1895, avšak mezitím ještě stihl absolvovat dobrovolnou vojenskou službu a po dva roky pracovat jako výpočtář pro observatoř v Lipsku. Nebylo to z finančních důvodů; Hausdorff byl po celou dobu svého života dobře finančně zajištěn, což ovlivnilo celou jeho životní dráhu již od středoškolských studií.

Hausdorffovy ambice se zpočátku netýkaly matematiky. Pohyboval se v uměleckých kruzích a věnoval se filosofii a literatuře. Pod pseudonymem Paul Mongré publikoval v období 1897–1912 celkem 22 textů (většina z nich vyšla do roku 1904), mezi nimiž je kniha aforismů, filosofická studie, divadelní hra, sbírka básní, recenze, eseje apod. To, že pozdějším generacím je Hausdorff takřka výhradně známý pouze jako matematik, neznamená, že jeho filosofické a literární texty zůstaly ve své době bez většího ohlasu. Jeho divadelní hra měla značný úspěch a hrála se na více než třiceti divadelních scénách v několika zemích. Kratší texty vycházely v prestižních časopisech, převážně v Die neue Rundschau, a byly oceňovány pro svou duchaplnost i poetický výraz.

Mgr. Libor Koudela, Ph.D., Ústav matematiky a kvantitativních metod, FES, Univerzita Pardubice, Studentská 84, 532 10 Pardubice, e-mail: `libor.koudela@upce.cz`, doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Kolínská 2272/15, 130 00 Praha-Vinohrady, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

Vraťme se zpět k Hausdorffovu osobnímu životu: v roce 1899 se oženil s Charlottou Goldschmidt (1873–1942) z rodiny známého židovského lékaře z Bad Reichenhallu. Následující rok se jim narodila dcera Lenora, která přežila nacistickou éru v úkrytu v okolí Jeny a zemřela roku 1991 v Bonnu. Provdala se roku 1924 za astronoma Arthura Königa (1896–1969), syna známého fyzika Arthura Petera Königa (1856–1901). Zdrojem cenných informací o Hausdorffovi je mj. i její pozůstalost, přechovávaná stejně jako Hausdorffova pozůstalost v Univerzitní a zemské knihovně v Bonnu.[1]

Hausdorff se habilitoval roku 1895 na univerzitě v Lipsku, kde pak získal roku 1901 místo mimořádného profesora. Děkan fakulty sledoval při jednání o profesuře velmi pozitivní názor kolegů formulovaný Brunsem; zajímavý je však připojený komentář: „Fakultní učitelský sbor cítí povinnost oznámit ministerstvu, že rozhodnutí sboru, přijaté na shromáždění druhého listopadu, nebylo učiněno jednomyslně, ale 22 ku 7 hlasům. Menšina oponovala, protože Dr. Hausdorff je židovské víry.“ K tomuto komentáři ještě poznámka: po finančním krachu roku 1873 narostl v Německu prudce antisemitismus a jedním z jeho center se stalo Lipsko, zejména tamní studentské prostředí. Je možné, že tento antisemitismus pociťoval i Hausdorff a že pod jeho vlivem později odešel z Lipska.

K Hausdorffovým literárním zálibám se začala postupně přidávat matematika. Asi kolem roku 1897 začal studovat práce Georga Cantora (1845–1918) a v letním semestru roku 1901 o teorii množin začal přednášet, ani ne o rok později než v Göttingen Ernst Zermelo (1871–1953); je zajímavé, že existuje nepotvrzená domněnka, že Hausdorff měl nabídku přejít do Göttingen. Do této doby spadají také první Hausdorffovy výsledky, kterých v teorii množin dosáhl. V letním semestru roku 1910 získal profesuru v Bonnu, kde začal také přednáškou z teorie množin. Tu pak v roce 1912 zopakoval s podstatně rozšířeným obsahem. V té době již pracoval na svém stěžejním díle *Grundzüge der Mengenlehre* [14], které dokončil v Greifswaldu. Tam získal řádnou profesuru v roce 1913 a od dubna následujícího roku tam již přednášel, po nějakou dobu jako jediný profesor matematiky. V roce 1914 kniha [14] také vyšla. Přerušme nyní popis Hausdorffových životních osudů a věnujme se jeho pracím.

Filosofické a literární dílo

Všimněme si nejprve blíže rané Hausdorffovy tvorby; v této části uvádíme stručné citace přímo v textu. Pseudonym Paul Mongré svědčí o vlivu, jaký na Hausdorffovo myšlení na konci 19. století měl Friedrich Nietzsche (1844–1900). Francouzské „a mon gré“ lze překládat jako „podle mé vůle“, „podle mého vkusu“, „po mé chuti“. Pojem chuť (Geschmack) patří do Nietzscheho filosofického programu. Klam, falešné zdání, udržování v nevědomosti o sobě samém, to jsou prostředky, kterými „duch tíže“ poutá

[1] Königovi měli ve srovnání se zbytkem širší Hausdorffovy rodiny štěstí; viz ještě dále. Obě sestry Felixe Hausdorffa, Martha (*1869, Wrocław) a Wally (*1874, Lipsko) žily v Praze. Wally se provdala za Antona Glasera, oba zemřeli roku 1944 v Terezíně. Jejich dcera Edita, její manžel Rudolf Spitzer a jeho tři synové (první dva měl s její zemřelou sestrou Margitou) František, Hanuš a Tomáš zahynuli všichni roku 1943 v Osvětimi. Martha (†1932) měla za manžela továrníka Antona Brandeise (†1931). Jejich synové Herbert (*1892, Praha) a Wilhelm (*1894, Praha) padli v 1. světové válce, nejmladší Ludwig (*1898, Praha), jeho žena Hana (*1907, Praha) a jejich děti Tomáš Karel (*1933, Praha) a Anita Eva (*1936, Praha) zahynuli v roce 1944 v Osvětimi.

člověka k zemi.[2] Svobodná, nespoutaná mysl si sama volí cesty, po kterých se bude ubírat – podle svého vkusu.

Explicitní přihlášení k Nietzschemu obsahoval už název prvního díla vydaného pod jménem Paul Mongré – sbírky filosofických aforismů *Sant' Ilario* (1897)[3] s podtitulem *Gedanken aus der Landschaft Zarathustras* (Myšlenky z krajiny Zarathustrovy), kterou Hausdorff napsal na přelomu let 1896 a 1897 v době ozdravného pobytu na pobřeží Ligurského moře poblíž Janova, v místech, kde se o více než deset let dříve zrodil Nietzscheho Zarathustra. Spíše než na toto hlavní dílo Nietzscheho navazuje však Hausdorff na jeho *Die fröhliche Wissenschaft* (Radostná věda, 1882). Smrt Boha, základní Nietzscheho téma, se odráží i v Hausdorffově díle. Znamená ztrátu jistoty, rozvrat vžitých předpokladů, ale zároveň přináší úlevu, odkrývání nových horizontů, cestu k nové, radostné vědě, pro niž našel Hausdorff podle svého svědectví na břehu Středozemního moře s jeho barvami a světlem vhodné prostředí. Zvolená forma *Sant' Ilaria* odráží touhu po svobodném vyjádření; aforismus je specifický literární útvar umožňující vyhnout se schematičnosti a dogmatičnosti. Znakem autorova myšlení je střízlivost a poctivost spojená s vyzdvihováním kultivovaného individualismu.

Hausdorff nebyl Nietzscheho imitátorem. V některých ohledech zaujímal stejná východiska, avšak jinde vyjadřoval od Nietzscheho myšlenek zřetelný odstup. V pozdějším pojednání *Der Wille zur Macht* (Vůle k moci, 1902) např. kriticky hodnotil Nietzscheho pojetí morálky. Odmítnutí Nietzscheho ideje věčného návratu bylo motivem k napsání epistemologické studie *Chaos in der kosmischer Auslese* (Chaos v kosmickém výběru, 1898).

Chaos je označením světa o sobě, o němž nic nevíme, přičemž není způsobu, jak bychom se o něm mohli něco dozvědět. Kosmos je svět naší zkušenosti, vytvářený individuálním vědomím; je výsledkem výběru v souladu s našimi možnostmi a poznáním. Kosmos se jeví jako jediný reálně existující svět a vyvolává tendenci přisuzovat jeho specifické vlastnosti i „transcendentnímu jádru světa“. Každý takový pokus je však odsouzen k nezdaru. Náš „kosmocentrismus“, podobně jako v minulosti geocentrismus, je neodůvodněným předpokladem a jako takový musí být odmítnut. Hausdorff pro podporu svého „epistemologického radikalismu“ využil jazyk matematiky a speciálně Cantorovy teorie množin. Právě v tomto období leží zřejmě počátky jeho hlubšího zájmu o tuto oblast matematiky.

O dva roky později vydal Hausdorff opět pod pseudonymem Paul Mongré básnickou sbírku *Ekstasen* (Zanícení, 1900), v níž se projevila obraznost spojená s dekadentní atmosférou konce století. Za zmínku stojí, že některé Hausdorffovy básně zhudebnil později skladatel Joseph Marx (1882–1964).

Svoje kriticko-epistemologické úvahy o čase a prostoru rozvíjel Hausdorff v dalších pracích z počátku 20. století, zejména v přednášce *Das Raumsproblem* (Problém prostoru, 1903) přednesené u příležitosti jmenování mimořádným profesorem na univerzitě v Lipsku. Podle Hausdorffa je třeba odmítnout představu, že empirická zkušenost jednoznačně určuje vědeckou koncepci prostoru. Hausdorff zde rozlišuje tři významové roviny pojmu prostor: matematickou, empirickou a absolutní. V případě empirického prostoru musíme akceptovat zkušenost jako fait accompli. V dalších dvou případech

[2] Dílo Nietzscheho *Tak pravil Zarathustra* je na síti volně přístupné, část *O duchu tíže* je na str. 188. Viz: `http://web2.mlp.cz/koweb/00/03/40/49/81/tak_pravil_zarathustra.pdf` [cit. 30. 4. 2018].

[3] Jde o místní jméno. Poblíž se nachází též známé Rapallo.

Obr. 1. Cedule představení hry Paula Mongrého *Der Arzt seiner Ehre* (Neues deutsches Theater, 4. 2. 1905). Sbírka Národního muzea, H6C-28493

máme nicméně svobodu volby způsobu popisu. Hausdorff v této souvislosti používá termín „Spielraum“ jako metaforu celého spektra možností popisu, které otevírá prostor pro hru. Matematika poskytuje množství přístupů, z nichž některé jsou vhodnější pro popis empirického prostoru a jiné méně. Vztah absolutního a empirického prostoru ilustruje Hausdorff na příkladu reálné krajiny a jejího zobrazení na zeměpisnou mapu: nemáme žádné prostředky ke zjištění, co (pokud vůbec něco) a jakým způsobem toto zobrazení ukazuje, neboť my sami se všemi měřicími přístroji jsme předmětem téhož zobrazení. Úkolem matematiky je ukázat možnosti empiricky přijatelných koncepcí prostoru. Hausdorffův zájem o problém prostoru vyústil později v hlubokou topologickou analýzu toho, co je vlastně při konstituování pojmu prostor podstatné.

Jednoaktová divadelní hra *Der Arzt seiner Ehre* (Lékař své cti, 1904) byla vydána v Die neue Rundschau[4] a byla s úspěchem hrána v mnoha evropských městech včetně Prahy. Hra s názvem upomínajícím na známé Calderónovo drama je satirou kritizující zkostnatělé pojetí cti. Pojednává o neuskutečněném souboji, v předvečer kterého se oba soupeři spolu se svými sekundanty setkají v jediném volném hostinském pokoji, kde se navzdory soubojovému kodexu společně věnují pití šampaňského, hlubokomyslným řečem a od svého úmyslu nakonec upustí. Hra byla příznivě přijata publikem i kritikou. Pražská premiéra se uskutečnila 4. února 1905 v Neues deutsches Theater (Nové německé divadlo, dnešní Státní opera) a představení se dočkalo třinácti repríz. V recenzi pražské premiéry píše Emil Faktor (1876–1942): „Autor tohoto díla, které ve svých scénických prvcích odvážně zesměšňuje široce rozšířený názor, že s nevěrou se srovnává pouze souboj, je údajně astronomem v Lipsku. Každopádně je vysoce vzdělaným mužem, který v tichu vědecké pracovny ukoval velmi řízné zbraně.“[5] Hausdorff ke hře později napsal epilog, který však byl poprvé veřejně předveden až v roce 2006 na výročním shromáždění Německé matematické společnosti (DMV) v Bonnu.

Grundzüge der Mengenlehre

Stěžejním Hausdorffovým matematickým dílem je nesporně monografie *Grundzüge der Mengenlehre*. Popišme toto Hausdorffovo dílo nejprve povšechně. Vyšlo v Lipsku v dubnu 1914, tedy krátce před 1. světovou válkou. Je to dílo obsáhlé (viii + 476 str.), věnované teorii množin, teorii reálných funkcí, topologii, míře a integraci apod. Objevilo se v době, kdy se tyto části matematiky formovaly a intenzivně rozvíjely.

Dílo je připsáno Cantorovi, „tvůrci teorie množin“. Práce, v nichž Cantor položil základy teorie, která hluboce ovlivnila budoucí koncepci celé matematiky, byly publikovány zhruba o tři desítky let dříve. Během této doby se žádné ucelené pojednání o teorii množin neobjevilo. Nejblíže k němu má dvoudílná „zpráva o výzkumu křivek a bodových množin“ Arthura Moritze Schoenfliese (1853–1928), napsaná pro DMV, jejíž první díl vyšel v přepracované podobě znovu roku 1913. Hausdorffova kniha, která vyšla několik měsíců poté, nebyla pouhou zprávou o výsledcích, ale systematickým pojednáním s často novými a elegantními důkazy a přinášela i dosud nepublikované výsledky. Za zmínku stojí i Hausdorffův vytříbený a svěží literární styl.

---

[4] U tohoto časopisu se několikrát změnil název, dříve zněl např. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne). Srv. [27] či [18].

[5] Bohemia, ročník 1905, č. 36 (5. 2. 1905). Dostupné z: `http://kramerius.nkp.cz/kramerius/handle/ABA001/21855508` [cit. 30. 4. 2018].

Teorie množin je v Hausdorffově knize chápána jako základ veškeré matematiky. Ačkoliv Hausdorff byl obeznámen s Zermelovým axiomatickým přístupem, volí ve své knize pedagogicky přístupnější naivní pojetí v Cantorově stylu, doplněné o omezení, umožňující vyhnout se některým paradoxům. Úvodní kapitoly obsahují základní pojmy týkající se množin, operací s množinami, relací a funkcí. Následuje část věnovaná ekvivalenci množin, kardinálním číslům, hustým, řídkým a souvislým množinám, uspořádaným a dobře uspořádaným množinám a ordinálním číslům. Tato část obsahuje mj. i výsledky Hausdorffova studia uspořádaných množin, které byly publikovány v předchozích letech, zejména pojmy konfinality, regulárních a singulárních ordinálních čísel a jejich souvislosti s počátečními ordinálními čísly. V knize je formulován také princip maximality (v současné době nesoucí Hausdorffovo jméno), který je ekvivalentní se známým Zornovým lemmatem (podrobnosti lze nalézt např. v knize [19]).

Těžiště celého díla však spočívá v kapitolách, kde je teorie bodových množin budována nejprve v rámci abstraktních topologických prostorů a dále ve speciálních (metrických, popř. eukleidovských) prostorech. Obecnost je spojena s důslednou logickou výstavbou, která umožnila vyhnout se některým chybám pramenícím z přílišného spoléhání na intuici. Setkáme se tam se známými axiomy okolí (podrobněji v následující části), dále s pojmy otevřené množiny, kompaktnosti, souvislosti apod. Systematické pojednání o metrických prostorech zahrnuje i některé nové pojmy, jako je např. vzdálenost množin (označovaná dnes Hausdorffovým jménem).[6]

Hausdorffova kniha silně ovlivnila řadu matematiků v Rusku/SSSR, v Polsku i jinde. Přinesla Hausdorffovi známost a uznání v matematickém světě, avšak s relativním zpožděním zaviněným patrně zejména válkou. V *Mathematische Annalen* se objevila první citace [14] v roce 1921 (kromě vlastní Hausdorffovy citace v [16]) a v *Journal für die reine und angewandte Mathematik* dokonce až v roce 1926. Obsáhlou a fundovanou recenzi z pera Henryho Blumberga přinesl roku 1920 *Bulletin AMS* [4]. Uveďme jen krátký úryvek: „Pokud jsou někteří matematici ještě podezíraví vůči teorii množin a nejsou ochotní ji uznat za rigorózní matematickou disciplínu, budou to mít těžké setrvat ve svých pochybách pod palbou logiky Hausdorffova díla. Bylo by obtížné jmenovat dílo z jakéhokoli odvětví matematiky včetně průzračné oblasti teorie čísel, které by překonalo *Grundzüge* ve srozumitelnosti a přesnosti.“

Již v polovině roku 1923 byla kniha rozebrána a začalo se připravovat druhé vydání. Vydavatelství Veit & Comp. bylo mezitím koupeno vydavatelstvím Walter de Gruyter, Berlin, které od roku 1921 začalo vydávat knižnici „Göschens Lehrbücherei“ se silnými omezeními na rozsah jednotlivých svazků. Pro tuto knižnici připravil Hausdorff knihu stručně nazvanou *Mengenlehre* s podtitulem „Zweite, neu bearbeitete Auflage“ [17], naznačujícím návaznost na *Grundzüge*. Změny vynucené omezeným rozsahem zahrnovaly vypuštění partií věnovaných míře a integrálu a podstatnou redukci výkladu o obecné topologii.

Následovalo další vydání z roku 1935, které vyšlo se stejným titulem a s podtitulem „Dritte Auflage. Mit einem zusätzlichen Kapitel und einigen Nachträgen“, opět

[6] Úvahami o vzdálenosti a konvergenci množin se zabýval také Dimitrie Pompeiu (1873–1954) ve své disertační práci z roku 1905, kterou Hausdorff v [14] cituje. Hausdorffův a Pompeiův přístup není totožný, ale obě vzdálenosti mají ekvivalentní vlastnosti, což je důvod, proč se někdy v této souvislosti hovoří o Hausdorffově–Pompeiově vzdálenosti. Široké uplatnění nachází v současné době např. v teorii diferenciálních inkluzí, v oblasti počítačové grafiky a speciálně tzv. počítačového vidění při rozpoznávání objektů.

u de Gruytera v Berlíně. Jeho přetisk vyšel pak během války v nakladatelství Dover Publ. v New Yorku roku 1944.[7]

Existuje též ruské vydání [17], jehož překladatelem byl N. B. Vedenisov a redaktory Pavel Sergejevič Aleksandrov (1896–1982) a Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), to je však *naprosto jiná* kniha. Ač vyšla jako *Těorija množestv* pod Hausdorffovým jménem, je to dílo zásadně přepracované a pouze část je překladem Hausdorffova textu. V dílu III spisů [18] se píše (str. 32): „Ostatně – a v historii matematické literatury je to skoro mimořádný případ – pod Hausdorffovým jménem vyšla kniha, kterou on nenapsal.“ Kniha má sice vysvětlující předmluvu, která částečně zkoriguje čtenářovu představu, že ji napsal Hausdorff, ale vyžaduje to ji *nepřeskočit* a *pozorně přečíst.* Podrobné srovnání pak ukazuje podstatný zásah do původního textu. Všimněme si nyní těch částí matematiky, které Hausdorff podstatně ovlivnil, ať již prostřednictvím [14], nebo jinými pracemi.

Topologie

Topologické partie knihy [14] představují první ucelený a přístupný výklad nově vznikající matematické disciplíny. Jak to bývá obvyklé, jde o završení dlouhé etapy vývoje, kterou nelze jednoduchým způsobem krátce popsat; srv. [10]. Hausdorff definoval topologický prostor X pomocí axiomů, popisujících vlastnosti okolí bodů U_x přiřazených bodům x tohoto prostoru:

(A) Každý bod x má alespoň jedno okolí U_x; každé okolí U_x obsahuje bod x.

(B) Jsou-li U_x, V_x okolí téhož bodu x, pak existuje okolí W_x, které leží v obou okolích U_x a V_x ($W_x \subset U_x \cap V_x$).

(C) Leží-li bod y v okolí U_x bodu x, pak existuje okolí U_y, které je částí okolí U_x ($U_y \subset U_x$).

(D) Pro dva různé body x, y, existují dvě okolí U_x, U_y, která nemají společný bod ($U_x \cap U_y = \emptyset$).[8]

Axiomy (A), (B), (C) užíváme k popisu (báze) topologie běžně i dnes, oddělovací axiom (D) splňují tzv. Hausdorffovy nebo též T_2-prostory.[9] Hausdorff pak zavedl další dnes běžné pojmy, i když s trochu odlišnou terminologií, např. limitní body, hromadné body a body kondenzace množiny A nazýval α-, β- a γ-body množiny A; nekonečnou množinu A bez hromadných bodů nazýval divergentní a množinu K bez divergentních podmnožin pak kompaktní. Pro kompaktní *uzavřené* množiny dokázal Cantorovu větu o neprázdném průniku a Borelovu pokrývací větu i s jejím obrácením. Zavedl pojem souvislé množiny a dokázal tvrzení o jejich základních vlastnostech. Vše doprovázel příklady. Pro reálnou osu dokázal Bolzanovu–Weierstrassovu větu o existenci hromadného bodu (větu i s těmito jmény spojoval). Není bez zajímavosti, že problém mohutnosti nespočetné borelovské množiny (má mohutnost kontinua) vyřešili nezávisle na sobě

[7] Anglické vydání, pořízené z [17] J. R. Aumannem a dalšími, vyšlo pod názvem *Set theory* v Chelsea Publ. Co., New York, 1957, a opětovně v letech 1962, 1967, 1978, 1991 a 2005 (AMS).

[8] Užíváme soudobé značení, stylizace kopíruje Hausdorffovo vyjádření.

[9] Blíže o historii oddělovacích axiomů viz [9], str. 47.

Aleksandrov (1915) a Hausdorff (1916). Později, v roce 1927, oba nezávisle dokázali, že každý kompaktní metrický prostor je spojitým obrazem Cantorova diskontinua.

V mnoha směrech si byli Aleksandrov a Hausdorff blízcí, např. svojí všestranností, literárními sklony, vztahem k divadlu apod. Udržovali vzájemný kontakt až do roku 1933, kdy se k moci v Německu dostali nacisté. V devátém díle sebraných spisů [18][10] zaujímá vzájemná korespondence Hausdorffa a Aleksandrova spolu s předčasně zesnulým Pavlem Samujlovičem Urysonem (1898–1924) přes 130 stran.[11]

Poznamenejme ještě, že část věnovanou topologickým prostorům doprovází v [14] i systematický výklad o metrických prostorech. Dříve je zkoumal ve své disertaci z roku 1906 Maurice Fréchet (1878–1973); Hausdorff jim dal dnes užívané jméno a zpopularizoval jejich užívání.

Obr. 2. Felix Hausdorff u svého pracovního stolu[12]

O míře a paradoxu

Poslední kapitola [14] je věnována míře a integrálu; speciálně pak pojednává o Jordanově–Peanově obsahu bodových množin a Lebesgueově teorii míry a integrálu. V do-

[10] V roce 2018 vyšel již svazek [18], IB (Biografie), a ještě by měl vyjít i poslední svazek [18], VI. První svazek byl z technických důvodů rozdělen do dvou knih.

[11] Dopisy Hausdorffovi do 3. 8. 1924 jsou podepisovány Aleksandrovem a Urysonem. V následující odpovědi z 11. 8. je Hausdorff oslovuje „Vážení nerozluční pánové!“. Aleksandrovův dopis z 18. 8. po oslovení začíná větou „Stalo se neštěstí – včera odpoledne v 5 hodin se Uryson utopil v moři“.

[12] Snímek je z Bonnu, dle kalendáře byl pořízen mezi 8. a 14. listopadem 1934. Zdroj: Hausdorffova pozůstalost, schránka 65, č. 29. Autorům [18] děkujeme za mnoho použitých informací i za možnost reprodukovat tento snímek.

datku k této kapitole je formulován pozoruhodný výsledek, který Hausdorff dokázal v článku [15] ze stejného roku.

Nechť $\mathcal{A}$ je systém podmnožin množiny X, který obsahuje množinu X a pro který je $A^c := (X \setminus A) \in \mathcal{A}$ pro každou $A \in \mathcal{A}$. Nechť je dále systém $\mathcal{A}$ uzavřený vzhledem k operaci sjednocení konečně mnoha resp. spočetně mnoha množin. Potom se systém $\mathcal{A}$ nazývá algebra, resp. σ-algebra podmnožin X.

Je-li μ nezáporná množinová funkce na algebře, resp. σ-algebře $\mathcal{A}$, pro kterou je

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\,, \text{ resp. } \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,,$$

pro každý systém po dvou disjunktních A_k, říkáme, že μ je aditivní na algebře $\mathcal{A}$, resp. že μ je σ-aditivní na σ-algebře $\mathcal{A}$. V posledním případě též říkáme, že μ je míra na $\mathcal{A}$.

Na začátku 20. století byly již známé díky Émile Borelovi (1871–1956) a jeho žáku Henri Lebesgueovi (1875–1941)[13] dnes běžně užívané míry na eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^m$. V případě Lebesgueovy míry je σ-algebra $\mathcal{A}$ tvořena (lebesgueovsky) měřitelnými množinami. Existenci neměřitelné množiny v $\mathbb{R}^1$ dokázal až roku 1905 Giuseppe Vitali (1875–1932), Lebesgue se tímto problémem v [24] nezabýval. Poznamenejme, že Lebesgueova míra je invariantní vůči izometrickým zobrazením na $\mathbb{R}^m$ a že dnešní standardní cesta k ní je odlišná od původní Lebesgueovy. Vede přes zavedení Lebesgueovy σ-subaditivní *vnější míry* μ^* definované na *všech* podmnožinách $\mathbb{R}^m$ a její restrikci na měřitelné množiny definované podmínkou náležející Constantinu Carathéodorymu (1873–1950): Množina A je μ^*-měřitelná, jestliže pro ni platí

$$\mu^*(M \setminus A) + \mu^*(M \cap A) \geq \mu^*(M) \tag{1}$$

pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^m$. Takto definované μ^*-měřitelné množiny tvoří σ-algebru $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^m$ a restrikce μ^* na $\mathcal{A}$ je právě Lebesgueova míra.[14] Přirozeným způsobem se nabízí otázka, na jak velkých množinových systémech mohou být definovány σ-aditivní nebo aditivní množinové funkce. Již Lebesgue zformuloval v [24] problém existence σ-aditivní, resp. aditivní nezáporné množinové funkce μ, jejíž hodnota na uzavřené jednotkové krychli $K \subset \mathbb{R}^m$ by byla 1, kongruentní (izometrické) množiny by měly stejnou míru, která by byla definována na všech omezených možinách v $\mathbb{R}^m$. Hausdorffovy výsledky můžeme zformulovat takto:

(a) Neexistuje σ-aditivní míra popsaných vlastností definovaná na všech podmnožinách $\mathbb{R}^m$ pro žádné $m \in \mathbb{N}$.

(b) Neexistuje konečně aditivní míra popsaných vlastností definovaná na všech podmnožinách $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$.

Oba výsledky využívají axiom výběru. Neexistenci v (a) dokázal Hausdorff pomocí konstrukce neměřitelné množiny v $\mathbb{R}^1$, kterou vytvořil podobně jako Vitali, zatímco

[13] Lebesgue zavedl míru po něm pojmenovanou v knize [24], což byla jeho disertace obhájená roku 1902 na Université de Paris. Poradcem práce byl Borel. Její výsledky byly mezi oběma předmětem sporů, kvůli kterým se odcizili.

[14] Ve vztahu (1) ve skutečnosti platí rovnost, neboť obrácená nerovnost je důsledkem subaditivity μ^*. Prof. Jan Mařík (1920–1994) to komentovával slovy „Měřitelná množina je nůž, který krájí každou množinu aditivně“.

v bodě (b) použil paradoxní rozklad jednotkové sféry $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Poznamenejme ještě, že výslovně zmínil fakt, že problém s konečnou aditivitou v prostorech $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$ zůstává otevřený. Jeho řešení publikoval roku 1923 Stefan Banach (1892–1945) v [1]: takové konečně aditivní míry v $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$ existují a je jich v obou případech nekonečně mnoho.

Hausdorffova myšlenka z konstrukce paradoxního rozkladu sféry S^2 vedla později k dalšímu objevu. V roce 1924 Banach spolu s Alfredem Tarskim (1901–1983) publikovali v [2] paradox, který lze zformulovat takto: Jsou-li A, B libovolné omezené množiny v $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, s neprázdnými vnitřky, lze je rozložit na n vzájemně izometricky ekvivalentních částí. Podrobněji: Je $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ a A_k je izometricky ekvivalentní s B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Zájemce odkazujeme na knížku [32] nebo na její snadno dostupnou recenzi [26].

Vnější míra a dimenze

V obecném povědomí je dnes Hausdorffovo jméno zřejmě nejčastěji spojováno s pojmem dimenze, která může nabývat i neceločíselných hodnot. Hausdorff ji zavedl roku 1918 v [16], kde v návaznosti na Carathéodoryho práci [7] formuloval obecnou teorii p-dimenzionální vnější míry v m-rozměrném eukleidovském prostoru. Dnes běžně užívané označení Hausdorffova dimenze a Hausdorffova vnější míra použil poprvé Georg Nöbeling (1907–2008) v roce 1932. I když lze snadno Hausdorffovu vnější míru definovat podobně v obecném metrickém prostoru, omezíme se na jednodušší případ eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^m$.

Nechť $0 < d < \infty$ a nechť $M \subset \mathbb{R}^m$. Každému spočetnému systému uzavřených koulí K_k s průměry $\delta_k < d$ pokrývajícímu množinu M přiřadíme číslo $\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_k)^p$. Označme $A_d^p(M) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_k)^p\}$, kde infimum bereme přes všechna taková pokrytí M, pro která platí $\delta_k < d$. Zřejmě je $A_d^p(M)$ neklesající funkcí d, neboť s rostoucím d roste i počet systémů, přes které se infimum počítá. Definujeme (ne nutně konečné) číslo

$$\mu_p^*(M) := \lim_{d \to 0+} A_d^p(M). \tag{2}$$

Toto číslo nazýváme Hausdorffovou vnější mírou množiny M. Tímto přiřazením je definována funkce na všech podmnožinách $\mathbb{R}^m$, je však pouze σ-subaditivní. Carathéodoryho podmínka, aplikovaná na tuto vnější míru, by umožnila definovat na μ_p^*-měřitelných množinách míru, a tak vzniká přirozená otázka, jak tato míra souvisí s Lebesgueovou mírou. Pro přirozená p je Lebesgueova míra rovna $c_p\, \mu_p^*$, kde faktor c_p je objem p-rozměrné koule o průměru 1. Pokrývání konvexními množinami, otevřenými množinami, uzavřenými množinami nebo libovolnými množinami s diametrem nejvýše d místo uzavřených koulí vede k témuž výsledku.[15]

Poznamenejme, že podmnožiny přímky nebo roviny apod. mají v prostoru $\mathbb{R}^m$ dimenze $m \geq 3$ nulovou (m-dimenzionální) Lebesgueovu míru a mohou mít kladnou míru pouze příslušné nižší dimenze. Hausdorff v [16] studuje dále dimenzi množin v obecnějším pojetí: říká, že množina M má dimenzi p, jestliže je

$$0 < \mu_p^*(M) < \infty,$$

[15] Podobně dospěl Carathéodory v práci [7] k lineární míře v $\mathbb{R}^m$; na konci této práce poznamenává, že analogicky lze postupovat v případě p-rozměrné míry v q-rozměrném prostoru. Hausdorff práci [7] cituje a hovoří o jejím *zobecnění*, umožňujícím pracovat s fraktálními dimenzemi.

a dokazuje, že standardní Cantorovo diskontinuum má dimenzi $\log 2/\log 3$. Dnes jsme zvyklí definovat Hausdorffovu dimenzi p, $0 \le p \le \infty$, množiny M jako

$$p := \sup\{\alpha > 0 \,:\, \mu^*_\alpha(M) = \infty\} = \inf\{\alpha > 0 \,:\, \mu^*_\alpha(M) = 0\}.$$

Poznamenejme, že množina M může mít dimenzi $p \in (0, \infty)$ a přitom $\mu^*_p(M) = 0$ nebo $\mu^*_p(M) = \infty$.

Práce [16] se dočkala většího ohlasu až přibližně po deseti letech, když se Hausdorffovou mírou a dimenzí začal zabývat Abram Samojlovič Bezikovič (1891–1970) v souvislosti se studiem bodových množin, které nemají celočíslenou dimenzi. Hausdorffova dimenze se ukázala být vhodnou kvantitativní charakteristikou složitosti struktur, které Benoît Mandelbrot (1924–2010) začal v polovině sedmdesátých let 20. století nazývat fraktály. Zájemce o využití Hausdorffových měr odkazujeme např. na výbornou knihu [28]. Poznamenejme ještě, že existují i jiná pojetí neceločíselné dimenze.

Sčítací metody

Sčítací metody jsou standardním a velmi užitečným matematickým nástrojem; připomeňme např. větu Lipóta Fejéra (1880–1959) z roku 1900, která říká, že Fourierova řada spojité 2π-periodické funkce je vždy cesàrovsky sčítatelná k této funkci. Přitom může na husté podmnožině $\mathbb{R}$ divergovat.

Sčítacích metod existují desítky a některé souvisejí s nekonečnými maticemi. Podstatou cesàrovské (C,1)-sčítatelnosti řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je nahrazení limity posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_0^\infty$ limitou posloupnosti postupných aritmetických průměrů

$$\begin{aligned} \{S_n\}_0^\infty &= \{s_0/1, (s_0+s_1)/2, \ldots, (s_0+s_1+\ldots+s_k)/(k+1), \ldots\} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

První Hausdorffovy práce z této oblasti se objevily v roce 1921, avšak studium jeho pozůstalosti ukázalo, že tuto oblast sledoval ještě v 30. letech. Pro představu uveďme alespoň definici Hausdorffovy matice v soudobém označení: Je-li $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ číselná posloupnost a $\Delta\, a_k = a_k - a_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, položme

$$\Delta^0 a_k = a_k, \quad \Delta^n a_k = \Delta(\Delta^{n-1} a_k) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \Delta^{n-j} a_j \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Hausdorffova matice (H, a_k) generovaná posloupností $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ je dolní trojúhelníková matice, pro jejíž prvky platí

$$c_{kn} = \binom{k}{n} \Delta^{k-n} a_n, \quad 0 \le n \le k,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Matice tohoto typu byly studovány právě v souvislosti se sčítacími metodami a později s operátory na prostorech posloupností. Položíme-li nyní obecněji pro $p \in \mathbb{R}$, $-p \notin \mathbb{N}$,

$$a_k^{(p)} = \left[\binom{k+p}{k}\right]^{-1},$$

dostaneme po úpravě (podrobněji viz např. v [5])

$$c_{kn}^{(p)} = \binom{k}{n} \Delta^{k-n} a_n^{(p)} = \binom{k-n+p-1}{k-n} \left[\binom{k+p}{k} \right]^{-1},$$

což pro $p = 1$ dává matici metody (C,1) z (3) a obecněji cesàrovských metod (C,p). Obě klasické sčítací metody, které jsou spojovány se jmény Otto Höldera (1859–1937) a Ernesta Cesàra (1859–1906), jsou tohoto typu. Jejich ekvivalenci dokázali v letech 1907 a 1909 Konrad Knopp (1882–1957) (disertační práce) a Walter Schnee (1885–1958) v [29]. Hausdorff byl pomocí nalezených výsledků schopen tuto ekvivalenci dokázat jiným způsobem a poskytnout na tyto a další sčítací metody maticového typu jednotný pohled.

Pomocí vybudovaného aparátu dokázal jednoduše i větu o hustotě lineárních kombinací funkcí $\{1, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, x^{\alpha_3}, \ldots\}$ s $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$ v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$, právě když diverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty}(1/\alpha_k)$. Tuto větu dokázal jinými prostředky Herman (Chaim) Müntz (1884–1956) roku 1914.

Poznamenejme, že Hausdorff v této souvislosti použil vztah těchto matic a funkcí s konečnou variací na intervalu $[0,1]$. V tom náleží Hausdorffovi priorita, neboť jako prvý odhalil souvislost „svých“ matic a momentového problému.

Teorie pravděpodobnosti

Není přesně známo, proč se Hausdorff začal zabývat pravděpodobností; snad ho k ní přivedl Bruns, který vydal knihu o teorii pravděpodobnosti v roce 1906 a jehož přednášku navštěvoval. Ve své první práci z této oblasti z roku 1901 Hausdorff upozornil na důležitost podmíněné pravděpodobnosti a zavedl pro ni po dlouhou dobu užívané označení. Měl tuto problematiku promyšlenu z přednášek, které konal ve školním roce 1897/1898 a 1900/1901. Na některých byl i Gerhard Kowalewski (1876–1950) a velmi pochvalně se o nich zmiňuje ve svých pamětech; viz [23], str. 100.

Hausdorff na několika místech pracoval s pravděpodobnostní problematikou také v [14]. Uvědomoval si, že např. některá tvrzení z teorie míry se stávají průhlednější při použití pojmů z teorie pravděpodobnosti. Ilustroval to elegantním důkazem Borelova zákona o normálních číslech z roku 1909 a je zřejmé, že si uvědomoval jeho souvislost se zákonem velkých čísel.

Trochu podrobněji: představme si, že čísla x z intervalu $[0,1]$ vyjádříme ve dvojkové soustavě. Počet číslic 0 (resp. 1) na prvních n místech rozvoje čísla x označme $p_n(x)$. Číslo x se nazývá normální, pokud pro jeho diadický rozvoj je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(x)}{n} = \frac{1}{2}\,.$$

(Poznamenejme, že pokud tento vztah platí pro číslice 0, platí analogicky i pro číslice 1.) Borelův zákon normálních čísel říká, že skoro všechna čísla $x \in [0,1]$ jsou normální. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$A(n,\varepsilon) := \left\{ x \in [0,1] \,:\, \left| \frac{p_n(x)}{n} - \frac{1}{2} \right| \geq \varepsilon \right\}.$$

Je-li μ Lebesgueova míra, pak se dá $\mu(A(n,\varepsilon))$ jednoduše odhadnout a dokázat, že pro

$$A(\varepsilon) := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A(k,\varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} A(n,\varepsilon)$$

platí $x \in A(\varepsilon)$, právě když $x \in A(n,\varepsilon)$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Pro množinu

$$A := \bigcup_{\varepsilon>0} A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(1/n)$$

se ukáže, že $\mu(A) = 0$, přičemž množina A je právě ta množina, pro níž

$$\left|\frac{p_n(x)}{n} - \frac{1}{2}\right|$$

nekonverguje pro $n \to \infty$ k 0, což už dává Borelův zákon normálních čísel.

Hausdorff se o pravděpodobnost zajímal celý život, což je patrné z rukopisů v jeho pozůstalosti. V letním semestru roku 1923 měl opět přednášku o teorii pravděpodobnosti, jejíž obsah je natolik zajímavý, že byla přetištěna v [18], V. Dnes vznik této teorie spojujeme s Kolmogorovovou obsáhlou prací [21]. Na rozdíl od Aleksandrova, který byl s Hausdorffem v poměrně pravidelném písemném styku v letech 1923–1935, není nám o kontaktech Kolmogorova s Hausdorffem nic známo.[16] Kolmogorovova práce [21] je *završením* jisté etapy vývoje, vedoucího k axiomatizaci teorie pravděpodobnosti; někdy bývá označována jako mezník v přechodu od pravděpodobnostního počtu k teorii pravděpodobnosti. Chtěli jsme ukázat, jak k němu přispěl Hausdorff. Zájemce odkazujeme na dvě obsáhlé práce [3] a [30]; zejména v první, která má celkem 68 stran, je Hausdorffovi a jeho knize [14] věnováno 8 stran.

Ještě jedna poznámka: Ve druhém z těchto článků je zmíněn i Richard von Mises (1883–1953), jehož přístup k pravděpodobnosti byl odlišný, založený na pojmu „kolektiv“. Tento přístup se neprosadil, ale přestože byl problematický, byl ve vztahu k aplikacím inspirující. Kolmogorov postupoval jinak, avšak píše „…Při vytváření základů pro aplikovatelnost teorie pravděpodobnosti v prostředí reálných jevů autor [Kolmogorov] ve velké míře sledoval model vytvořený p. von Misesem…“ Zmiňujeme se o tom proto, že Hausdorff s von Misesem o přístupu k pravděpodobnosti korespondoval. V [18] v díle IX jsou reprodukovány dva jeho dopisy, ve kterých von Misese upozorňoval na nedostatky jeho přístupu. Pravděpodobnost, jak ji chtěl definovat von Mises, měla vážné nedostatky: kromě skrytých nekonzistencí základních vlastností („axiomů“) nebyla též σ-aditivní. Tři dopisy, které von Mises napsal Hausdorffovi, se nezachovaly.[17] Navzdory nedorozuměním a snad i hořkosti na straně von Misese byl jejich dialog užitečný. Byl součástí dialogu mezi „čistou“ a „užitou“ matematikou, v tomto konkrétním případě mezi pravděpodobností reálného světa a matematickou pravděpodobností; tak ho v jedné práci z roku 1994 charakterizoval Joseph L. Doob (1910–2004), budovatel moderní teorie pravděpodobnosti s vazbami na ostatní matematické disciplíny.

[16] V dopise z 13. 9. 1930 Aleksandrov píše o možnosti Kolmogorovovy návštěvy u Hausdorffových, není ale známo, zda k návštěvě došlo. Viz [18], IB, str. 937.

[17] To, že byly tři, plyne z von Misesových zachovalých deníků, které si psal téměř padesát let.

I když von Mises dlouhou dobu věřil v nějakou možnost záchrany svého pojetí, v roce 1957 napsal: „Můj první skromný pokus o obecné formulace (‚Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung‘, Mathematische Zeitschrift *4* (1919), 1–97) je dnes v mnoha ohledech zastaralý. S pomocí moderní teorie množin a teorie reálných funkcí bylo možné zdokonalit formální matematické základy způsobem, který je esteticky vyhovující a není bez praktické hodnoty. To se týká zejména poměrně nedávných výsledků, které zpřístupnily oblast tzv. stochastických procesů.“ Podrobnější popis dialogu Hausdorff – von Mises včetně anglických překladů Hausdorffových dopisů von Misesovi a zasvěceného komentáře lze nalézt v práci [31].

Z části o tomto dialogu by čtenář mohl nabýt dojmu, že Hausdorff byl oddán abstrakci a zobecňování, byl až pedanticky přesný a tak byl spolu se svými výsledky „prakticky nepoužitelný“. Třebaže patrně neměl nikdy na mysli prvoplánově to, jak by se dalo jeho výsledků prakticky využít, existuje dost příkladů, že je to možné a užitečné. Např. ona „teoretická pravděpodobnost“ byla dovedena Kolmogorovem až k vytvoření efektivního předvídání jevů z předchozích pozorování. Tato technika se uplatnila v radarovém pozorování ve válce při bombardování lodí na moři či při přistávacích manévrech letadel.

V Hitlerově stínu

Vraťme se k další etapě Hausdorffova života. Jeho zatížení pedagogickými povinnostmi bylo z pochopitelných důvodů v Greifswaldu veliké. To se pronikavě zlepšilo po jeho přechodu do Bonnu v roce 1921. Tam se mohl plně rozvinout a přednášet o svých nejnovějších výsledcích.

V Bonnu také měl výtečné stimulující prostředí; jeho kolegy a přáteli se zde stali Eduard Study (1862–1930) a Otto Toeplitz (1881–1940). V roce 1927 vydává přepracovanou verzi [14], která je v podstatě jinou knihou. V Bonnu ho také zastihla změna režimu, když se v roce 1933 stal Hitler německým kancléřem s neomezenými pravomocemi. První vlna aplikace zákona o obnově civilní služby Hausdorffa nepostihla, neboť byl od roku 1914 důstojníkem, avšak k 31. březnu 1935 byl penzionován. Pracuje však intenzivně a neúnavně dál. Publikuje řadu článků, zejména v časopise *Fundamenta mathematicæ.*

Pro Židy se situace v Německu velmi rychle zhoršovala. Připomeňme norimberské rasové zákony (1935) a řadu nařízení, která byla postupně uváděna do praxe. Hausdorff si uvědomuje rostoucí tlak i přímé ohrožení. Den po jeho sedmdesátinách přichází Křišťálová noc (9. listopadu 1938). Bylo vypáleno 1 406 synagog, asi 400 Židů zabito a přes 7 000 židovských obchodů zničeno.[18] Vycházejí nařízení, zakazující Židům vstup do kin, divadel, na výstavy, atd. Nesmějí ze svých bankovních účtů vyzvedávat více než 100 marek měsíčně. Přitom s Hausdorffovými žije v domácnosti Edith Pappenheimová (1883–1942).[19]

[18]Údaje se týkají Německa, Rakouska a Sudet dohromady. Ti, kteří měli zakročit, pouze přihlíželi. Další den události komentoval Joseph Goebbels (1897–1945) slovy: „Němci jsou antisemité. Nemají zájem, aby byla v budoucnu jejich práva omezována, či aby byli provokováni parazity židovské rasy.“ Příčinou byly podle něj „zdravé instinkty“ německého lidu. Viz [18], IB.

[19]Sestra Charlotty Hausdorffové Edith žila po rozvodu v roce 1919 s dcerou, úspěšnou lékařkou, v Rakousku. Po emigraci dcery do USA zůstala v Rakousku sama bez prostředků a Hausdorffovi se jí ujali. Doufala, že odjede za dcerou do USA, ale nebylo to už možné.

Hausdorffovi jsou deprimováni svým zhoršujícím se zdravím. Hausdorff nemá přístup do knihovny a je odkázán na pomoc přítele Ericha Bessela-Hagena (1898–1946), který se snaží ze všech sil svým židovským kolegům pomáhat. Hausdorff si uvědomuje, že situace je kritická, na druhé straně je však unaven, má svůj dům s osobní knihovnou, může ještě pracovat, je podporován hrstkou přátel a stále patrně nevěří, že věci mohou dojít tam, kam posléze došly. Žádá však 31. ledna 1939 o pomoc Richarda Couranta (1888–1972), který uprchl do USA z Göttingen. Když žádost dojde, Courant okamžitě odpovídá a uvědomí Hermanna Weyla (1885–1955) a Johna von Neumanna (1903–1957); ti poskytují bezvýhradně kladná dobrozdání, na emigraci je však již příliš pozdě.[20]

Zmiňujeme to proto, aby čtenář dokázal pochopit to, že sáhli po krajním řešení. Když byli v lednu 1942 Hausdorffovi a současně i Edith povoláni do sběrného tábora v Endenichu, otrávili se společně veronalem. Bylo to racionální rozhodnutí, nikoli podlehnutí okamžitým emocím. Podává o tom svědectví Bessel-Hagen, který s nimi byl do poslední chvíle ve styku (viz příspěvek Erwina Neuenschwandera v [6]). Hausdorff píše svému příteli právníkovi tento dopis na rozloučenou:

Bonn, 25. ledna 1942

> *Milý příteli Wollsteine!*
>
> *Až obdržíte tyto řádky, bude problém nás tří vyřešen, a to tím způsobem, od kterého jste se nás snažil neustále odrazovat. Pocit bezpečí, který jste nám předpověděl, pokud překonáme prvotní potíže se stěhováním, se ne a ne dostavit, naopak:*
>
> *K tomu Endenich*
> *není přece konec!*

Je to pouze začátek dopisu, který v další části obsahuje informace o poslední vůli apod. Závěrečná věta reprodukované části se ukázala bohužel pravdivá: připomeňme konferenci ve Wannsee, kde bylo deklarováno konečné řešení židovské otázky. Teror se stupňoval a vraždění začalo nabývat průmyslové povahy. Do konce války stačili nacisté připravit o život šest miliónů Židů.

Poděkování. Druhý z autorů byl podpořen grantem GAČR registrační číslo 18-00449S. Zároveň děkujeme mnoha přátelům za připomínky, kterými přispěli ke zpracování tohoto textu.

L i t e r a t u r a

[1] Banach, S.: *Sur le probleme de la measure.* Fund. Math. *4* (1923), 7–33.

[2] Banach, S., Tarski, A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fund. Math. *6* (1924), 244–277.

[3] Barone, J., Novikoff, A.: *A history of the axiomatic formulation of probability from Borel to Kolmogorov, Part I.* Arch. Hist. Exact Sci. *18* (1978), 123–190.

[4] Blumberg, H.: *Hausdorff's Grundzüge der Mengenlehre.* Bull. Amer. Math. Soc. *27 (3)* (1920), 116–129.

[20] Podrobněji [18], IB, str. 984.

[5] Boos, J., Cass, J.: *Classical and modern methods in summability.* Oxford University Press, Oxford, New York, 2000.

[6] Brieskorn, E. (ed.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis B. I, Aspekte seines Werkes.* Vieweg Ver., Braunschweig/Wiesbaden, 1996. (Druhý díl nevyšel, viz [18].)

[7] Carathéodory, C.: *Über das lineare Maß von Punktmengen – eine Veralgemeinerung des Längenbegriffs.* In: Göttingen Nachr., Math.-Phys. Klasse, Weidmannsche Buchhandlung, Berlin, 1914, 404–426.

[8] Czyż, J.: *Paradoxes of measures and dimensions originating in Felix Hausdorff's ideas.* World Scientific, Singapore, 1994.

[9] Engelking, R.: *General topology.* Heldermann, Berlin, 1989.

[10] Folland, G. B.: *A tale of topology.* Amer. Math. Monthly *117 (8)* (2010), 663–672.

[11] Fréchet, M.: *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rend. Circ. Mat. Palermo *22* (1906), 1–74.

[12] Hausdorff, F.: *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.* Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Classe *43* (1891), 481–566.

[13] Hausdorff, F. (Mongré, P.): *Der Arzt seiner Ehre, Groteske.* Die neue Rundschau *15 (8)* (1904), 989–1013.

[14] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit, Leipzig, 1914.

[15] Hausdorff, F.: *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen.* Math. Ann. *75* (1914), 428–433.

[16] Hausdorff, F.: *Dimension und äußeres Maß.* Math. Ann. *79* (1918), 157–179.

[17] Hausdorff, F.: *Mengenlehre.* Zweite, neu bearbeitete Auflage. Walter de Gruyter, Berlin, 1927.

[18] Hausdorff, F.: *Gesammelte Werke IAB–IX.* Springer, Heidelberg, 2001–2018.

[19] Hewit, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis.* Springer, Berlin, 1969.

[20] Hilbert, D.: *Über die Grundlagen der Geometrie.* Göttingen Nachr., Math.-Phys. Klasse *(3)* (1902), 233–241; také viz Math. Ann. *56 (3)* (1902), 381–422.

[21] Kolmogorov, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer, Berlin, 1933.

[22] Koudela, L.: *The Hausdorff–Alexandroff theorem and its application in theory of curves.* In: WDS'07 Proceedings of Contributed Papers, Part I, MatfyzPress, Praha, 2007, 257–260.

[23] Kowalewski, G.: *Bestand und Wandel.* Oldenbourg, München, 1950.

[24] Lebesgue, H.: *Intégrale, longueur, aire.* Bernandon de C. Rebeschini, Milan, 1902.

[25] Moore, G. H.: *The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology.* Hist. Math. *35 (3)* (2008), 220–241.

[26] Netuka, I., Veselý, J.: *Stan Wagon: The Banach-Tarski paradox.* PMFA *32* (1987), 227–230.

[27] Purkert, W.: *Felix Hausdorff — Paul Mongré, mathematician — philosopher — man of letters.* Hausdorff Center for Mathematics, University of Bonn, Bonn, 2013.

[28] Rogers, C. A.: *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, 1970.

[29] Schnee, W.: *Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes.* Math. Ann. *67* (1909), 110–125.

[30] Shafer, G., Vovk, V.: *The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe.* Statist. Sci. *21 (1)* (2006), 70–98.

[31] Siegmund-Schulze, R.: *Sets versus trial sequences, Hausdorff versus von Mises: "Pure" mathematics prevails in the foundations of probability around 1920.* Hist. Math. *37 (2)* (2010), 204–224.

[32] Tomkowicz, G., Wagon, S.: *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, 2016.