Rozhledy matematicko-fyzikální

Úlohy domácího kola 68. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 2, 21–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147261

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2018

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Úlohy domácího kola 68. ročníku Matematické olympiády pro žáky základních škol

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Míša má pět pastelek. Vojta jich má méně než Míša. Vendelín jich má tolik, kolik Míša a Vojta dohromady. Všichni tři dohromady mají sedmkrát více pastelek, než má Vojta.

Kolik pastelek má Vendelín? (*L. Hozová*)

Z5–I–2

Tereza dostala čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky se stranami délek 3 cm, 4 cm a 5 cm. Z těchto trojúhelníků (ne nutně ze všech čtyř) zkoušela skládat nové útvary. Postupně se jí podařilo složit čtyřúhelníky s obvodem 14 cm, 18 cm, 22 cm a 26 cm, a to pokaždé dvěma různými způsoby (tj. tak, že žádné dva čtyřúhelníky nebyly shodné).

Nakreslete, jaké čtyřúhelníky mohla Tereza složit. (*L. Růžičková*)

Z5–I–3

Šárka ráda oslavuje, takže kromě narozenin vymyslela ještě *antinarozeniny*: datum antinarozenin vznikne tak, že se vymění číslo dne a číslo měsíce v datu narození. Sama se narodila 8. 11., takže antinarozeniny má 11. 8. Její maminka antinarozeniny slavit nemůže: narodila se 23. 7., její antinarozeniny by měly být 7. 23., což ale není datum žádného dne v roce. Její bratr sice antinarozeniny slavit může, ale má je ve stejný den jako narozeniny: narodil se 3. 3.

Kolik dní v roce je takových, že člověk, který se toho dne narodil, může slavit svoje antinarozeniny, a to v jiný den než svoje narozeniny? (*V. Hucíková*)

Z5–I–4

V nové klubovně byly jen židle a stůl. Každá židle měla čtyři nohy, stůl byl trojnohý. Do klubovny přišli skauti. Každý si sedl na svoji židli, dvě židle zůstaly neobsazené a počet nohou v místnosti byl 101.

Určete, kolik židlí bylo v klubovně. (*L. Hozová*)

Z5–I–5

Tomáš dostal devět kartiček, na nichž byly následující čísla a matematické symboly:

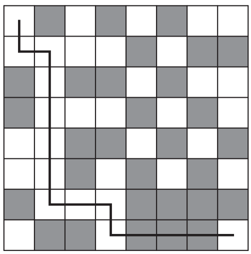
$$18,\ 19,\ 20,\ 20,\ +,\ -,\ \times,\ (,\ )$$

Kartičky skládal tak, že vedle sebe nikdy neležely dvě kartičky s čísly, tj. střídaly se kartičky s čísly a kartičky se symboly. Takto vzniklé úlohy vypočítal a výsledek si zapsal.

Určete, jaký největší výsledek mohl Tomáš získat. (*K. Pazourek*)

Z5–I–6

Na obrázku je herní plánek a cesta, kterou Jindra zamýšlel projít z pravého dolního rohu do levého horního. Poté zjistil, že má plánek chybně pootočený, tedy že by nezačínal v pravém dolním rohu. Tvar zamýšlené cesty už ale nemohl změnit a musel ji projít při správném natočení plánku.



Pro každé ze tří možných natočení překreslete uvedenou cestu a určete, kolika šedými poli tato cesta prochází. (*E. Semerádová*)

KATEGORIE Z6

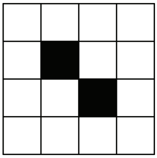
Z6–I–1

Ivan a Mirka se dělili o hrušky na míse. Ivan si vždy bere dvě hrušky a Mirka polovinu toho, co na míse zbývá. Takto postupně odebírali Ivan, Mirka, Ivan, Mirka a nakonec Ivan, který vzal poslední dvě hrušky.

Určete, kdo měl nakonec víc hrušek a o kolik. (*M. Dillingerová*)

Z6–I–2

Arnošt si ze čtverečkového papíru vystřihl čtverec 4×4. Kristián v něm vystřihl dvě díry, viz dva černé čtverečky na obrázku. Tento útvar zkoušel Arnošt rozstřihnout podle vyznačených čar na dvě shodné části.

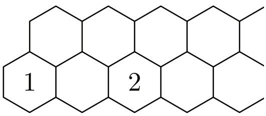


Najděte alespoň čtyři různé způsoby, jak to mohl Arnošt udělat. (Přitom dvě stříhání považujte za různá, pokud části vzniklé jedním stříháním nejsou shodné s částmi vzniklými druhým stříháním.)

(*A. Bohiniková*)

Z6–I–3

Na obrázku jsou naznačeny dvě řady šestiúhelníkových polí, které doprava pokračují bez omezení. Do každého pole doplňte jedno kladné celé číslo tak, aby součin čísel v libovolných třech sousedících polích byl 2018.



Určete číslo, které bude v 2019. políčku v horní řadě. (*L. Růžičková*)

Z6–I–4

Pan Ticháček měl na zahradě tři sádrové trpaslíky: největšímu říkal Mašík, prostřednímu Jíňa a nejmenšímu Fanýnek. Protože si s nimi rád hrával, časem zjistil, že když postaví Fanýnka na Jíru, jsou stejně vysocí jako Mašík. Když naopak postaví Fanýnka na Mašíka, měří dohromady o 34 cm víc než Jíňa. A když postaví na Mašíka Jíru, jsou o 72 cm vyšší než Fanýnek.

Jak vysocí jsou trpaslíci pana Ticháčka? (*M. Petrová*)

Z6–I–5

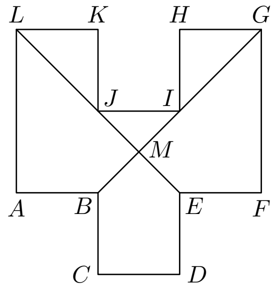
V následujícím příkladě na sčítání představují stejná písmena stejné číslice, různá písmena různé číslice:

$$\begin{array}{r} R\,A\,T\,A\,M \\ R\,A\,D \\ \hline U\,L\,O\,H\,Y \end{array}$$

Nahraďte písmena číslicemi tak, aby byl příklad správně. Najděte dvě různá nahrazení. (*E. Novotná*)

Z6–I–6

Ve dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ jsou každé dvě sousední strany kolmé a všechny strany s výjimkou stran AL a GF jsou navzájem shodné. Strany AL a GF jsou oproti ostatním stranám dvojnásobně dlouhé. Úsečky BG a EL se protínají v bodě M a rozdělují dvanáctiúhelník na šest útvarů (tři trojúhelníky, dva čtyřúhelníky a jeden pětiúhelník). Čtyřúhelník $EFGM$ má obsah 7 cm^2.



Určete obsahy ostatních pěti útvarů. (*E. Semerádová*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

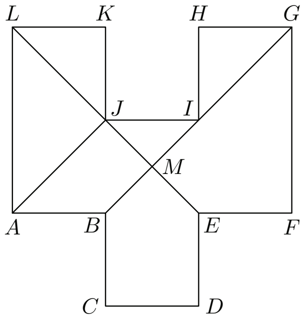
Na každé ze tří kartiček je napsána jedna číslice různá od nuly (na různých kartičkách nejsou nutně různé číslice). Víme, že jakékoli trojmístné číslo poskládané z těchto kartiček je dělitelné šesti. Navíc lze z těchto kartiček poskládat trojmístné číslo dělitelné jedenácti.

Jaké číslice mohou být na kartičkách? Určete všechny možnosti.

(*V. Hucíková*)

Z7–I–2

Ve dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ jsou každé dvě sousední strany kolmé a všechny strany s výjimkou stran AL a GF jsou navzájem shodné. Strany AL a GF jsou oproti ostatním stranám dvojnásobně dlouhé. Úsečky BG a EL se protínají v bodě M. Čtyřúhelník $ABMJ$ má obsah 1,8 cm^2.



Určete obsah čtyřúhelníku $EFGM$. (*E. Semerádová*)

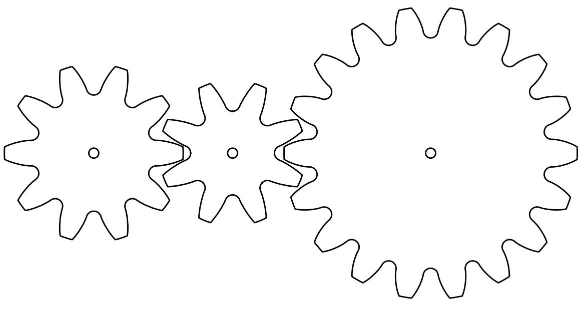
Z7–I–3

Děda připravil pro svých šest vnoučat hromádku lískových oříšků s tím, ať si je nějak rozeberou. První přišel Adam, odpočítal si polovinu, přibral si ještě jeden oříšek a odešel. Stejně se zachoval druhý Bob, třetí Cyril, čtvrtý Dan i pátý Eda. Jen Franta smutně hleděl na prázdný stůl; už na něj žádný oříšek nezbyl.

Kolik oříšků bylo původně na hromádce? (*M. Volfová*)

Z7–I–4

Bětka si hrála s ozubenými koly, která skládala tak, jak je naznačeno na obrázku. Když pak zatočila jedním kolem, točila se všechna ostatní. Nakonec byla spokojena se soukolím, kde první kolo mělo 32 a druhé 24 zubů. Když se třetí kolo otočilo přesně osmkrát, druhé kolo udělalo pět otáček a část šesté a první kolo udělalo čtyři otáčky a část páté.



Zjistěte, kolik zubů mělo třetí kolo. (*E. Novotná*)

Z7–I–5

V zahradnictví Rose si jedna prodejna objednala celkem 120 růží v barvě červené a žluté, druhá prodejna celkem 105 růží v barvě červené a bílé a třetí prodejna celkem 45 růží v barvě žluté a bílé. Zahradnictví zakázku splnilo, a to tak, že růží stejné barvy dodalo do každého obchodu stejně.

Kolik celkem červených, kolik bílých a kolik žlutých růží dodalo zahradnictví do těchto tří prodejen? (*M. Volfová*)

Z7–I–6

Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABS se základnou AB. Na kružnici, která má střed v bodě S a prochází body A a B, leží bod C tak, že trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Určete, kolik bodů C vyhovuje uvedeným podmínkám, a všechny takové body sestrojte. (*K. Pazourek*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Ferda a David se denně potkávají ve výtahu. Jednou ráno zjistili, že když vynásobí své současné věky, dostanou 238. Kdyby totéž provedli za čtyři roky, byl by tento součin 378.

Určete součet současných věků Ferdy a Davida. (*M. Petrová*)

Z8–I–2

Do třídy přibyl nový žák, o kterém se vědělo, že kromě angličtiny umí výborně ještě jeden cizí jazyk. Tři spolužáci se dohadovali, který jazyk to je.

První soudil: „Francouzština to není.“

Druhý hádal: „Je to španělština nebo němčina.“

Třetí usuzoval: „Je to španělština.“

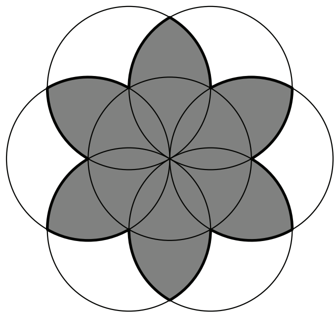
Záhy se dozvěděli, že alespoň jeden z nich hádal správně a alespoň jeden nesprávně.

Určete, který ze jmenovaných jazyků nový žák ovládal.

(*M. Volfová*)

Z8–I–3

Petr narýsoval pravidelný šestiúhelník, jehož vrcholy ležely na kružnici délky 16 cm. Potom z každého vrcholu tohoto šestiúhelníku narýsoval kružnici, která procházela dvěma sousedními vrcholy. Vznikl tak útvar jako na následujícím obrázku.



Určete obvod vyznačeného kvítku. (*E. Novotná*)

Z8–I–4

Na čtyřech kartičkách byly čtyři různé číslice, z nichž jedna byla nula. Vojta z kartiček složil co největší čtyřmístné číslo, Martin pak co nejmenší čtyřmístné číslo. Adam zapsal na tabuli rozdíl Vojtova a Martinova čísla.

Potom Vojta z kartiček složil co největší trojmístné číslo a Martin co nejmenší trojmístné číslo. Adam opět zapsal na tabuli rozdíl Vojtova a Martinova čísla. Pak Vojta s Martinem obdobně složili dvojmístná čísla a Adam zapsal na tabuli jejich rozdíl. Nakonec Vojta vybral co největší jednomístné číslo a Martin co nejmenší nenulové jednomístné číslo a Adam zapsal jejich rozdíl.

Když Adam sečetl všechny čtyři rozdíly na tabuli, vyšlo mu 9090. Určete čtyři číslice na kartičkách. (*L. Růžičková*)

Z8–I–5

Král dal zedníku Václavovi za úkol postavit zeď silnou 25 cm, dlouhou 50 m a vysokou 2 m. Pokud by Václav pracoval bez přestávky a stejným tempem, postavil by zeď za 26 hodin. Podle platných královských nařízení však musí Václav dodržovat následující podmínky:

- Během práce musí udělat právě šest půlhodinových přestávek.
- Na začátku práce a po každé půlhodinové přestávce, kdy je dostatečně odpočatý, může pracovat o čtvrtinu rychleji než normálním tempem, ale ne déle než jednu hodinu.
- Mezi přestávkami musí pracovat nejméně 3/4 hodiny.

Za jakou nejkratší dobu může Václav splnit zadaný úkol? (*J. Norek*)

Z8–I–6

V lichoběžníku $KLMN$ má základna KL velikost 40 cm a základna MN má velikost 16 cm. Bod P leží na úsečce KL tak, že úsečka NP rozděluje lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.

Určete velikost úsečky KP. (*L. Hozová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Najděte všechna kladná celá čísla x a y, pro která platí

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

(*A. Bohiniková*)

Z9–I–2

V rovnostranném trojúhelníku ABC je K středem strany AB, bod L leží ve třetině strany BC blíže bodu C a bod M leží ve třetině strany AC blíže bodu A.

Určete, jakou část obsahu trojúhelníku ABC zaujímá trojúhelník KLM. (*L. Růžičková*)

Z9–I–3

V našem městě jsou čtyři kina, kterým se říká podle světových stran. O jejich otevíracích dobách je známo, že:

- pokud má otevřeno jižní kino, potom nemá otevřeno severní kino,
- nikdy nemá otevřeno současně severní a východní kino,
- pokud má otevřeno východní kino, potom má také otevřeno jižní nebo severní kino (nebo obě).

Vydali jsme se do jižního kina a zjistili jsme, že je zavřené. Které ze zbývajících kin má jistě otevřeno? (*M. Dillingerová*)

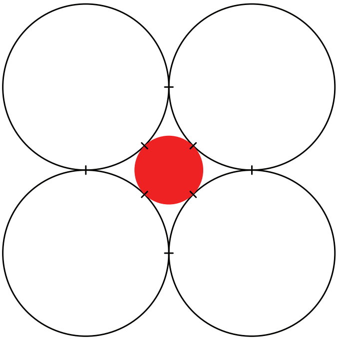
Z9–I–4

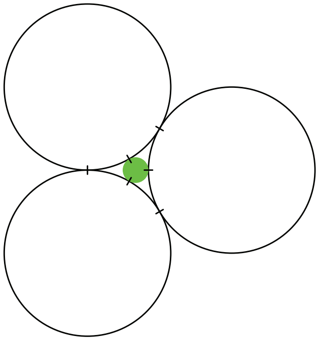
Hoteliér chtěl vybavit jídelnu novými židlemi. V katalogu si vybral typ židle. Až při zadávání objednávky se od výrobce dozvěděl, že v rámci slevové akce nabízejí každou čtvrtou židli za poloviční cenu a že tedy oproti plánu může ušetřit za sedm a půl židle. Hoteliér si spočítal, že za původně plánovanou částku může pořídit o devět židlí více, než zamýšlel.

Kolik židlí chtěl hoteliér původně koupit? (*L. Šimůnek*)

Z9–I–5

Adam a Eva vytvářeli dekorace z navzájem shodných bílých kruhů. Adam použil čtyři kruhy, které sestavil tak, že se každý dotýkal dvou jiných kruhů. Mezi ně pak vložil jiný kruh, který se dotýkal všech čtyř bílých kruhů, a ten vybarvil červeně. Eva použila tři kruhy, které sestavila tak, že se dotýkaly navzájem. Mezi ně pak vložila jiný kruh, který se dotýkal všech tří bílých kruhů, a ten vybarvila zeleně.





Eva si všimla, že její zelený kruh a Adamův červený kruh jsou různě velké, a začali společně zjišťovat, jak se liší. Vyjádřete poloměry červeného a zeleného kruhu obecně pomocí poloměru bílých kruhů.

(*M. Krejčová*)

Z9–I–6

Přirozené číslo N nazveme *bombastické*, pokud neobsahuje ve svém zápise žádnou nulu a pokud žádné menší přirozené číslo nemá stejný součin číslic jako číslo N.

Karel se nejprve zajímal o bombastická prvočísla a tvrdil, že jich není mnoho. Vypište všechna dvojmístná bombastická prvočísla.

Potom Karel zvolil jedno bombastické číslo a prozradil nám, že obsahuje číslici 3 a že jen jedna z jeho dalších číslic je sudá. O kterou sudou číslici mohlo jít? (*M. Rolínek*)