Jan Brandts; Michal Křížek

Pozoruhodné vlastnosti duálních a rovnostěnných čtyřstěnů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 63 (2018), No. 1, 41–50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/147208

Pozoruhodné vlastnosti duálních a rovnostěnných čtyřstěnů

Jan Brandts, Michal Křížek

Věnováno prof. RNDr. Karlu Segethovi, CSc., k jeho 75. narozeninám

Abstrakt. V článku budeme studovat třídu duálních simplexů v n-rozměrném eukleidovském prostoru. Dokážeme, že tato třída je stejná jako třída tzv. dobře centrovaných simplexů. Dále ukážeme, že jisté přirozené konvergenční vlastnosti duálních trojúhelníků nelze přímo zobecnit do trojrozměrného prostoru. K tomuto účelu představíme rovnostěnné čtyřstěny, což je speciální podtřída dobře centrovaných čtyřstěnů.

1. Úvod

Tento článek je volným pokračováním práce [2] o čtyřstěnech a simplexech bez tupých úhlů. Nežli ukážeme, k čemu mohou být duální čtyřstěny užitečné, uvedeme několik základních definic a tvrzení.

Nechť $m \geq n$ jsou přirozená čísla. Připomeňme, že *n-rozměrný simplex S* v m-rozměrném eukleidovském prostoru $\mathbb{E}^m$ je konvexní obal $n+1$ bodů, které neleží v jedné nadrovině n-rozměrného prostoru. Tyto body se nazývají *vrcholy S*. Jeho *nadstěnami* budeme rozumět $(n-1)$-rozměrné simplexy tvořené konvexními obaly jakýchkoliv n vrcholů simplexu S. V celém článku budeme ztotožňovat vrcholy s vektory.

Definice 1.1. Simplex S se nazývá *dobře centrovaný*, jestliže střed koule opsané leží ve vnitřku S.

Následující věta podává zajímavou charakterizaci dobře centrovaných simplexů.

Věta 1.1. *Simplex je dobře centrovaný právě tehdy, když jeho vrcholy neleží na jedné hemisféře opsané koule.*

Důkaz lze nalézt v článku [4]. Opírá se o některé úvahy J. W. Gadduma [9] z roku 1956.

Definice 1.2. Nechť S je libovolný simplex. Pak simplex, jehož vrcholy jsou body dotyku n-rozměrné koule vepsané do S, budeme značit S' a nazývat *simplex duální k S*.

Věta 1.2. *Každý duální simplex je dobře centrovaný.*

Důkaz. Nechť S' je duální simplex k simplexu S. Koule vepsaná S je zřejmě zároveň koulí opsanou duálnímu simplexu S'. Podle [4, věta 3] lze střed G koule vepsané S vyjádřit jako konvexní kombinaci vrcholů $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ simplexu S' s kladnými koeficienty $c_i > 0$, tj. $G = c_0A'_0 + c_1A'_1 + \cdots + c_nA'_n$. Vrcholy A'_i tedy neleží na jedné hemisféře uvažované koule. Z věty 1.1 je nyní patrno, že S' je dobře centrovaný. $\square$

Assoc. Prof. Jan Brandts, PhD., Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, P. O. Box 94248, 1090 GE Amsterdam, Nizozemsko, e-mail: `J.H.Brandts@uva.nl`, prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., Matematický ústav Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`

V kapitole 3 ukážeme, že platí i obrácené tvrzení — viz věta 3.2. Dobře centrované simplexy hrají důležitou roli při numerickém řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou konečných prvků, viz např. [3], [10], [12]. Pokud například triangulace ohraničené rovinné oblasti obsahuje jeden tupoúhlý trojúhelník (jenž podle definice 1.1 není dobře centrovaný), pak při numerickém řešení Laplaceovy či Poissonovy rovnice je porušen diskrétní princip maxima. Pak ovšem teplo počítané numericky může téci z chladnějších částí do teplejších, což neodpovídá skutečnosti [3]. Jestliže každý simplex v dané konformní (angl. *face-to-face*) triangulaci polytopické oblasti v $\mathbb{E}^n$ obsahuje střed koule opsané (střed může být i na hranici simplexu), pak je triangulace Delaunayova, viz [13, s. 200] a [17]. Ne každá Delaunayova triangulace se ale skládá z dobře centrovaných simplexů.

Každou konformní triangulaci v $\mathbb{E}^3$ tvořenou dobře centrovanými čtyřstěny s ostroúhlými stěnami (angl. *fully well-centered*) lze rozdělit na pravoúhlé čtyřstěny [12], což jsou přirozená zobecnění pravoúhlých trojúhelníků do $\mathbb{E}^3$. Radim Hošek v [10] uvádí, proč je vhodné používat dobře centrované čtyřstěny na okrajové úlohy s Neumannovou okrajovou podmínkou. Dále předkládá algoritmus, jak rozdělit trojrozměrný prostor na shodné (až na zrcadlení) dobře centrované čtyřstěny (viz též [3, s. 326] a [15]). Řada dalších užitečných vlastností dobře centrovaných simplexů je uvedena též v [8], [16], [17] aj.

Definice 1.3. Dva simplexy S a $\tilde{S}$ budeme nazývat *podobné* a psát

$$S \sim \tilde{S},$$

jestliže existuje konstanta $q > 0$, ortogonální matice Q (tj. $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}$) a vektor posunutí $b \in \mathbb{E}^n$ tak, že $\tilde{S} = f(S)$, kde $f(x) = qQx + b$ pro $x \in \mathbb{E}^n$.

Zobrazení f výše uvedeného typu se nazývá *podobnost* a platí pro ně

$$d(f(x), f(y)) = qd(x, y) \quad \forall x, y \in S,$$

kde $d(\cdot,\cdot)$ je standardní eukleidovská vzdálenost. Je-li $q = 1$, pak se zobrazení f nazývá *izometrie.*

2. Duální trojúhelníky

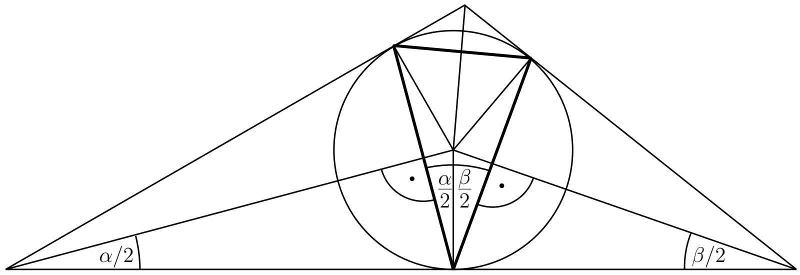
Pro jednoduchost se v této přípravné kapitole budeme zabývat pouze případem $n = 2$. Předně je důležité si uvědomit, že trojúhelník je ostroúhlý právě tehdy, když jeho vrcholy neleží na jedné půlkružnici opsané kružnice. To nastává právě tehdy, když je dobře centrovaný (viz definice 1.1).

Lemma 2.1. *Nechť T je libovolný trojúhelník. Pak jeho duál T' je ostroúhlý trojúhelník.*

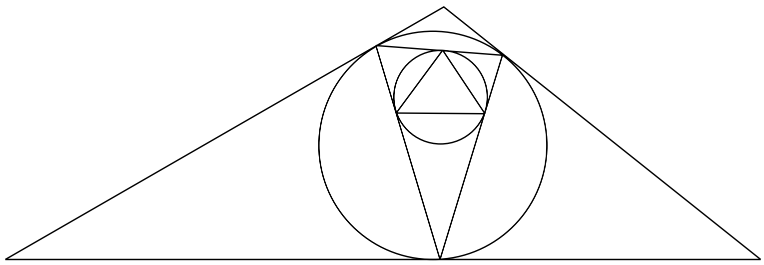
Důkaz. Označme α, β, γ úhly v trojúhelníku T. Pak

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma), \quad \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \tag{2.1}$$

jsou úhly v duálním trojúhelníku T' (viz obrázek 2.1). Zřejmě jsou ostré, protože $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°$. □



Obr. 2.1. Úhly v trojúhelníku T a jeho duálu T'



Obr. 2.2. Duální trojúhelník k duálnímu trojúhelníku tupoúhlého trojúhelníka je téměř rovnostranný trojúhelník.

Lemma 2.2. *Jestliže $\hat{T}$ je libovolný ostroúhlý trojúhelník, pak existuje trojúhelník T tak, že $\hat{T} = T'$.*

Důkaz. Nechť $\hat{T}$ je libovolný ostroúhlý trojúhelník. Jak již bylo řečeno na začátku této kapitoly, $\hat{T}$ je zároveň dobře centrovaný. Označme jeho vrcholy symboly $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Tyto body zřejmě neleží na jedné půlkružnici kružnice k opsané $\hat{T}$. Každý pár tečen ke k ve dvou různých vrcholech se protíná ve vrcholu hledaného trojúhelníka T. Všechny tři tečny v bodech $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ k opsané kružnici k proto určují trojúhelník T. Body dotyku $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ jsou tak zároveň vrcholy duálního trojúhelníka T'. $\square$

Věta 2.1. *Nechť T je libovolný trojúhelník. Uvažujme posloupnost trojúhelníků $T, T', (T')', \ldots$ znázorněnou na obrázku 2.2. Pak posloupnosti jejich úhlů $\alpha_i \leq \beta_i \leq \gamma_i$ konvergují k $60°$.*

Důkaz. Označme $\alpha_i \leq \beta_i \leq \gamma_i$ úhly i-tého trojúhelníka v konstruované posloupnosti. Pomocí aritmetického průměrování (2.1) zjistíme, že

$$\alpha_i \leq \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} = \alpha_{i+1}, \quad \gamma_i \geq \frac{\beta_i + \gamma_i}{2} = \gamma_{i+1}.$$

Protože je posloupnost α_i neklesající a ohraničená, konverguje k nějakému $\alpha_\infty > 0$. Podobně je posloupnost γ_i nerostoucí a konverguje k nějakému $\gamma_\infty < 180°$. Tedy i posloupnost $\beta_i = 180° - \alpha_i - \gamma_i$ konverguje k nějakému β_∞.

Nyní sporem dokážeme, že $\alpha_\infty = \beta_\infty = \gamma_\infty = 60°$. Nejprve předpokládejme, že $\alpha_\infty < \beta_\infty$. Protože posloupnosti α_i a β_i konvergují, existuje j takové, že

$$(\alpha_\infty - \alpha_j) + (\beta_\infty - \beta_j) \leq |\alpha_\infty - \alpha_j| + |\beta_\infty - \beta_j| < \beta_\infty - \alpha_\infty.$$

Odtud plyne, že

$$\alpha_\infty < \frac{\alpha_j + \beta_j}{2} = \alpha_{j+1},$$

což je spor, protože α_j je neklesající.

Podobně můžeme vyšetřovat i případ $\beta_\infty < \gamma_\infty$. $\square$

Úhly v duálním trojúhelníku T' jednoznačně určují úhly v původním trojúhelníku T a naopak. Proto jako přímý důsledek (2.1) dostáváme následující tvrzení.

Lemma 2.3. *Jestliže T je rovnostranný trojúhelník, pak T' je také rovnostranný a neexistuje žádný jiný trojúhelník tak, aby $T \sim T'$.*

3. Duální a dobře centrované simplexy

V této a následující kapitole ukážeme, že větu 2.1 nelze přímo zobecnit do n-rozměrného prostoru pro $n \geq 3$. Uvažujme posloupnost simplexů S, S', $(S')'$, … Všechny její prvky zvětšíme, popř. zmenšíme tak, aby byly vepsány do jednotkové koule. Prvky takto vytvořené posloupnosti ale nemusí konvergovat k pravidelnému simplexu. Viz níže uvedený příklad 4.2 pro $n = 3$. Prostá analogie s obrázkem 2.2 tedy například pro čtyřstěny neplatí.

Definice 3.1. Simplex se nazývá *ostroúhlý*, resp. *netupoúhlý*, jestliže všechny jeho dihedrální úhly mezi nadstěnami jsou ostré, resp. nejsou tupé.

Ostroúhlý simplex ale nemusí být pro $n \geq 3$ dobře centrovaný, i když pro $n = 2$ dobře centrovaný je. Ukažme si to na jednoduchém příkladu.

Příklad 3.1. Pro $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1))$ je čtyřstěn T_ε s vrcholy $(-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ ostroúhlý, ale není dobře centrovaný. Pro $\varepsilon \to 0$ totiž konverguje ke čtyřstěnu T_0, který vznikne useknutím rohu krychle (angl. *cube-corner tetrahedron*). Jeho opsaná koule je shodná s koulí opsanou jednotkové krychli $[0, 1]^3$. Její střed $G = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ zřejmě leží mimo T_ε, protože G je ve středu pravidelného čtyřstěnu s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ a $(1, 1, 1)$.

Věta 3.1 (Fiedlerova). *Všechny nadstěny ostroúhlého, resp. netupoúhlého simplexu jsou ostroúhlé, resp. netupoúhlé.*

Důkaz je uveden v [7]. Snadno lze zjistit, že obrácená implikace neplatí.

Následující příklad ilustruje, že dobře centrovaný čtyřstěn může mít tupoúhlé stěny (srov. lemma 2.1). V tomto případě podle Fiedlerovy věty 3.1 má i tupé dihedrální úhly.

Příklad 3.2. Nechť $A = (-4, 3, -4)$, $B = (4, 3, -4)$, $C = (0, 5, -4)$ a $D = (0, -4, 5)$. Snadno nahlédneme, že trojúhelník ABC (obsažený v rovině $z = -4$) je tupoúhlý. Střed koule opsané $ABCD$ je $G = (0, 0, 0)$, neboť

$$|AG| = |BG| = |CG| = |DG| = \sqrt{41}.$$

Navíc platí

$$\tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{4}B + \tfrac{1}{18}C + \tfrac{4}{9}D = G, \tag{3.1}$$

tj. střed G je konvexní kombinací vrcholů. Jelikož jsou všechny koeficienty kladné, G leží ve vnitřku $ABCD$ a tak $ABCD$ je dobře centrovaný.

Následující věta ukazuje, že platí i obrácená implikace ve větě 1.2.

Věta 3.2. *Každý dobře centrovaný simplex je duálním simplexem S' nějakého simplexu S.*

Důkaz. Označme symbolem $\hat{S}$ dobře centrovaný simplex s vrcholy $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_n \in \mathbb{E}^n$ a se středem $G = (0, 0, \ldots, 0)$ opsané koule o poloměru R. Pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definujme afinní nadrovinu H_j jako množinu všech řešení $x \in \mathbb{E}^n$ rovnice

$$\hat{A}_j \cdot x = R^2, \tag{3.2}$$

kde $\cdot$ označuje obvyklý skalární součin. Tedy H_j je jednoznačně určená tečná nadrovina k $\hat{S}$ v bodě $\hat{A}_j$. Podle věty 1.1 vrcholy $\hat{S}$ neleží na jedné hemisféře opsané koule. Simplex $\hat{S}$ leží v uzavřeném poloprostoru $\hat{A}_j x \le R^2$ pro $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Proto podle (3.2) je $\hat{A}_j$ vnější normála k tomuto poloprostoru.

Nyní pro pevné $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ definujme bod

$$A_j = \bigcap_{i \neq j} H_i,$$

tj. A_j je jediné řešení soustavy n lineárních rovnic

$$\hat{A}_i \cdot A_j = R^2 \quad \text{pro } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{j\}. \tag{3.3}$$

Příslušná matice soustavy řádu n je regulární, protože $\hat{S}$ není degenerovaný simplex.

Označme symbolem S simplex s vrcholy $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Podle (3.2) nadstěna F_j simplexu S oproti A_j leží v afinní nadrovině H_j pro každé $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, tj. dotýká se koule opsané simplexu $\hat{S}$. Vektory $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_n$ jsou vnější normály odpovídajících nadstěn $F_0, F_1, \ldots, F_n$ simplexu S, jak plyne z (3.2). Odtud dostaneme, že $\hat{S}$ je duální simplex k S, tj.

$$\hat{S} = S'. \qquad \square$$

Z vět 1.1, 1.2 a 3.2 tedy plyne ekvivalence následujících podmínek pro daný simplex:

1) je dobře centrovaný,
2) jeho vrcholy neleží na jedné hemisféře,
3) je duální k nějakému simplexu.

Na konkrétním příkladě si nyní ukažme, jak lze pro daný dobře centrovaný čtyřstěn $\hat{T}$ zkonstruovat „primární“ čtyřstěn T tak, aby $\hat{T} = T'$.

Příklad 3.3. Položme

$$\hat{A}_0 = (-4, 3, -4), \quad \hat{A}_1 = (4, 3, -4), \quad \hat{A}_2 = (0, 5, -4), \quad \hat{A}_3 = (0, -4, 5).$$

Podle příkladu 3.2 jsou to vrcholy dobře centrovaného tupoúhlého čtyřstěnu. Výpočtem lze zjistit, že vrcholy A_j hledaného čtyřstěnu T splňující soustavu (3.3) pro $R^2 = 41$ jsou

$$A_0 = (\tfrac{41}{2}, 41, 41), \quad A_1 = (-\tfrac{41}{2}, 41, 41), \quad A_2 = (0, -369, -287), \quad A_3 = (0, 0, -\tfrac{41}{4}).$$

Tudíž $\hat{A}_0\hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3$ je čtyřstěn duální k $A_1A_2A_3A_4$ a $\frac{1}{4}A_0 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{18}A_2 + \frac{4}{9}A_3 = G = (0, 0, 0)$. Příslušné koeficienty jsou zřejmě stejné jako v konvexní kombinaci (3.1).

4. Rovnostěnné čtyřstěny

Jestliže dvě hrany čtyřstěnu nemají společný bod, nazývají se *protilehlé.*

Definice 4.1. Čtyřstěn se nazývá *rovnostěnný* (angl. *isosceles tetrahedron*), když každé dvě jeho protilehlé hrany mají stejnou délku.

Snadno nahlédneme, že všechny stěny rovnostěnného čtyřstěnu jsou shodné trojúhelníky. Tyto zvláštní čtyřstěny jsou studovány např. v [1] a [5]. V této kapitole nejprve ukážeme, že každý rovnostěnný čtyřstěn může být rotován a posunut tak, že jeho vrcholy splynou se čtyřmi vzájemně nesousedními vrcholy kvádru

$$K = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c] \tag{4.1}$$

tak, jak je nakresleno na obrázku 4.1.

Lemma 4.1. *Nechť $d \geq e \geq f$ jsou strany ostroúhlého trojúhelníka. Pak existují jednoznačně určená kladná čísla a, b, c tak, že*

$$d^2 = 4(a^2 + b^2), \quad e^2 = 4(a^2 + c^2), \quad f^2 = 4(b^2 + c^2). \tag{4.2}$$

Důkaz. Existence: Protože d, e, f tvoří ostroúhlý trojúhelník, čísla $d^2 + e^2 - f^2$, $d^2 + f^2 - e^2$ a $e^2 + f^2 - d^2$ jsou podle kosinové věty kladná. Položíme-li

$$a = \sqrt{\frac{d^2 + e^2 - f^2}{8}}, \quad b = \sqrt{\frac{d^2 + f^2 - e^2}{8}}, \quad c = \sqrt{\frac{e^2 + f^2 - d^2}{8}}, \tag{4.3}$$

vidíme, že (4.2) platí.

Jednoznačnost: Nechť $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ jsou obecně jiná čísla splňující (4.2). Pak

$$\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = a^2 + b^2, \quad \hat{a}^2 + \hat{c}^2 = a^2 + c^2, \quad \hat{b}^2 + \hat{c}^2 = b^2 + c^2.$$

Sečteme-li první dvě rovnice a odečteme-li třetí, dostaneme

$$2\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 - \hat{b}^2 - \hat{c}^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - b^2 - c^2,$$

a tedy $\hat{a} = a$. Podobně obdržíme, že $\hat{b} = b$ a $\hat{c} = c$. $\square$

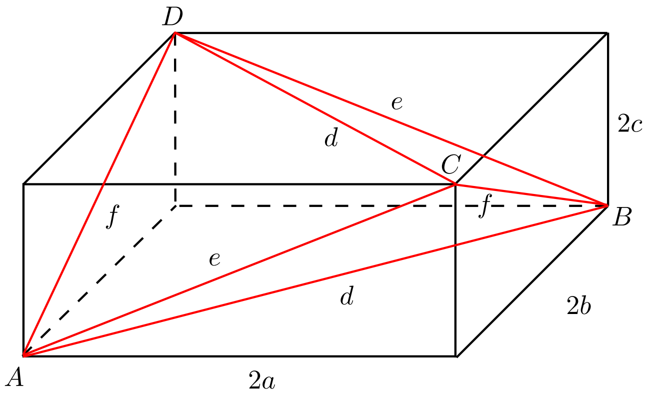
Z předchozího lemmatu je patrno, že libovolný rovnostěnný čtyřstěn T, jehož stěny jsou ostroúhlé trojúhelníky s hranami $d \geq e \geq f$, může být dvěma způsoby vložen do kvádru (4.1), kde $a \geq b \geq c$ splňují (4.3). V prvním případě jsou jeho vrcholy dány vztahy

$$A = (-a, -b, -c), \quad B = (a, b, -c), \quad C = (a, -b, c), \quad D = (-a, b, c). \tag{4.4}$$

Z obrázku 4.1 je patrno, že tyto vrcholy nejsou sousedními vrcholy K. Ve druhém případě jsou vrcholy T umístěny ve zbývajících čtyřech vrcholech K.

Poznámka 4.1. Pokud by $d > e \geq f$ byly strany pravoúhlého trojúhelníka, pak by podle (4.3) kvádr K zdegeneroval na případ $c = 0$.

Poznámka 4.2. Pro rovnostěnný čtyřstěn je součet všech tří stěnových úhlů v každém ze čtyř vrcholů roven 180°. Také všechny čtyři prostorové úhly (tj. trihedrální měřené ve steradiánech) jsou stejné. Minimální (resp. maximální) dihedrální úhel může být



Obr. 4.1. Vložení libovolného rovnostěnného čtyřstěnu do kvádru K

libovolně blízko $0°$ (resp. $180°$) pro $a = b = 1$ a $c \to \infty$ (resp. $c \to 0$). Z (4.3) lze odvodit (viz též [11, s. 205]), že objem rovnostěnného čtyřstěnu je

$$\frac{8abc}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(d^2+e^2-f^2)(d^2+f^2-e^2)(e^2+f^2-d^2)}.$$

Označme $G = (0,0,0)$ těžiště kvádru K. Pak G je zřejmě střed koule opsané a také střed koule vepsané T (viz též [1, s. 97]). Poloměr koule opsané je

$$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Spojíme-li středy protilehlých hran čtyřstěnu T přímkou, pak tato přímka evidentně prochází středem G. Tímto způsobem získáme tři vzájemně kolmé přímky, které splývají s osami x, y, z.

Věta 4.1. *Nechť T je libovolný rovnostěnný čtyřstěn. Pak jeho duál je také rovnostěnný čtyřstěn a platí*

$$T \sim (T')'.$$

Důkaz. Nechť A, B, C, D definované v (4.4) jsou vrcholy T. Vidíme, že rovina BCD je dána rovnicí

$$bcx + acy + abz = abc. \tag{4.5}$$

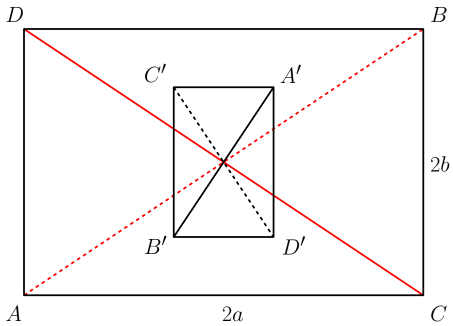
Ostatní stěny mají podobná vyjádření. Odtud a díky podobnosti trojúhelníků z obrázku 4.2 má duál k $ABCD$ následující vrcholy (až na vhodný kladný koeficient stejnolehlosti $q = abc/(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$)

$$\begin{aligned} A' &= (bc, ac, ab), & B' &= (-bc, -ac, ab), \\ C' &= (-bc, ac, -ab), & D' &= (bc, -ac, -ab). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Tedy T' je rovnostěnný čtyřstěn, protože jeho vrcholy lze ztotožnit s vrcholy duálního kvádru

$$K' := [-bc, bc] \times [-ac, ac] \times [-ab, ab],$$

jehož čtyři vrcholy jsou dány vztahem (4.6).



Obr. 4.2. Projekce čtyř bodů dotyku koule vepsané do rovnostěnného čtyřstěnu $ABCD$. Duální čtyřstěn $A'B'C'D'$ se promítne na obdélník (s diagonálami), jenž je podobný $ABCD$.

Tedy duál k $A'B'C'D'$ má vrcholy

$$A'' = (-a(abc), b(abc), -c(abc)), \quad B'' = (a(abc), -b(abc), -c(abc)),$$

$$C'' = (a(abc), b(abc), -c(abc)), \quad D'' = (-a(abc), -b(abc), -c(abc)).$$

Srovnáme-li tyto vrcholy s (4.4), dostaneme tvrzení věty. □

Důsledek 4.1. *Nechť T je libovolný rovnostěnný čtyřstěn. Pak jeho duál má stejný střed opsané koule jako T.*

Důkaz. Podle lemmatu 4.1 lze rovnostěnný čtyřstěn T vložit do kvádru (4.1) tak, jak je nakresleno na obrázku 4.1. Jeho vrcholy jsou dány vztahy (4.4) a jeho střed $G = (0, 0, 0)$ je zřejmě středem koule opsané T a také T'. □

Poznámka 4.3. Pomocí (4.5) a (4.6) lze odvodit, že poloměr koule vepsané rovnostěnnému čtyřstěnu $ABCD$ s vrcholy (4.4) je dán vztahem

$$\rho = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

Poznámka 4.4. Je-li T pravidelný čtyřstěn, pak i T' je pravidelný čtyřstěn.

Příklad 4.1. Nechť $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$ a nechť vrcholy T jsou dány vztahy (4.4), tj.

$$A = (-4, -2, -1), \quad B = (4, 2, -1), \quad C = (4, -2, 1), \quad D = (-4, 2, 1).$$

Pak z (4.6) dostaneme, že

$$A' = (1, 2, 4), \quad B' = (-1, -2, 4), \quad C' = (-1, 2, -4), \quad D' = (1, -2, -4),$$

a proto

$$T' \sim T.$$

Podle věty 4.1 se v posloupnosti $T, T', (T')', \ldots$ střídá čtyřstěn T se svým zrcadlovým obrazem až na měřítko. To je dosti odlišná situace od věty 3.2.

Příklad 4.2. Položíme-li $a = b = 2$ a $c = 1$, pak podle (4.4) a (4.6) zjistíme, že v posloupnosti $T, T', (T')', \ldots$ se střídají tupoúhlé a ostroúhlé čtyřstěny. Jejich maximální úhel je 109.47°, resp. 83.62° (srov. větu 2.1).

Věta 4.2. *Jestliže $T \sim (T')'$, pak T je rovnostěnný čtyřstěn.*

Důkaz je uveden v práci [4, kap. 2.4].

Věta 4.3. *Všechny čtyři prostorové úhly čtyřstěnu T mají stejnou velikost právě tehdy, když T je rovnostěnný.*

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$ je zřejmá. K tomu, abychom dokázali opačnou implikaci, tak označíme α, β, γ dihedrální úhly u hran čtyřstěnu $T = ABCD$, které vycházejí z jeho vrcholu D. Dihedrální úhly u protilehlých hran označíme po řadě α', β', γ'. Průnik T s dostatečně malou dvojrozměrnou sférou se středem v D je sférický trojúhelník s úhly α, β a γ. Podobným způsobem získáme další tři sférické trojúhelníky u zbývajících vrcholů A, B, C. Protože všechny čtyři prostorové úhly T mají stejnou velikost, pro sférický exces platí (viz [14, s. 84])

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \alpha' + \beta' + \gamma - \pi, \quad \alpha + \beta' + \gamma' - \pi = \alpha' + \beta + \gamma' - \pi,$$

a tedy

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta', \quad \alpha + \beta' = \alpha' + \beta.$$

Tudíž $\alpha = \alpha'$ a $\beta = \beta'$. Podobně dostaneme, že $\gamma = \gamma'$, tj. dihedrální úhly u protějších hran mají stejnou velikost. Tím je důkaz hotov, neboť všechny dihedrální úhly jednoznačně určují čtyřstěn až na jeho velikost. $\square$

Všechny čtyři stěny čtyřstěnu mají stejný obvod (resp. stejnou plochu) právě tehdy, když je uvažovaný čtyřstěn rovnostěnný. Důkaz je uveden v [6, s. 494].

Poděkování. Autoři děkují doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., a doc. RNDr. Tomášovi Vejchodskému, Ph.D., za cenné připomínky. Michal Křížek byl podpořen grantem 18-09628S Grantové agentury ČR a RVO 67985840.

Literatura

[1] Altshiller-Court, N.: *The isosceles tetrahedron.* Modern pure solid geometry, Chelsea, New York, 1979, pp. 94–101 and 300.

[2] Brandts, J., Korotov, S., Křížek, M.: *O triangulacích bez tupých úhlů.* PMFA *50* (2005), 193–207.

[3] Brandts, J., Korotov, S., Křížek, M., Šolc, J.: *On nonobtuse simplicial partitions.* SIAM Rev. *51* (2009), 317–335.

[4] Brandts, J., Křížek, M.: *Simplicial vertex-normal duality with applications to well-centered simplices.* Proc. of the 12th European Conf. on Numer. Math. and Advanced Appl., ENUMATH 2017, Voss (eds. Jan Martin Nordbotten et al.), Springer, Berlin–Heidelberg, 2018, 8 pp.

[5] Edmonds, A. L.: *The geometry of an equifacetal simplex.* Mathematika *52* (2009), 31–45.

[6] Edmonds, A. L., Hajja, M., Martini, H.: *Coincidences of simplex centers and related facial structures.* Beitr. Algebra Geom. *46* (2005), 491–512.

[7] Fiedler, M.: *Über qualitative Winkeleigenschaften der Simplexe.* Czechoslovak Math. J. *7* (1957), 463–476.

[8] Fiedler, M.: *Matice a grafy v euklidovské geometrii.* Dimatia, MFF UK, Praha, 2001.

[9] Gaddum, J. W.: *Distance sums on a sphere and angle sums in a simplex.* Amer. Math. Monthly *63* (1956), 91–96.

[10] Hošek, R.: *Face-to-face partitions of 3D space with identical well-centered tetrahedra.* Appl. Math. *60* (2015), 637–651.

[11] Klee, V., Wagon, S.: *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* Math. Assoc. Amer., Washington, DC, 1991.

[12] Křížek, M., Pradlová, J.: *Nonobtuse tetrahedral partitions.* Numer. Methods Partial Differential Equations *16* (2000), 327–334.

[13] Rajan, V. T.: *Optimality of the Delaunay triangulations in R^d.* Discrete Comput. Geom. *12* (1994), 189–202.

[14] Rektorys, K.: *Přehled užité matematiky I.* Prometheus, Praha, 1995.

[15] Sommerville, D. M. Y.: *Space-filling tetrahedra in Euclidean space.* Proc. Edinb. Math. Soc. *41* (1923), 49–57.

[16] VanderZee, E., Hirani, A. N., Guoy, D., Ramos E. A.: *Well-centered triangulation.* SIAM J. Sci. Comput. *31* (2009/2010), 4497–4523.

[17] VanderZee, E., Hirani, A. N., Guoy, D., Zharnitsky V., Ramos E. A.: *Geometric and combinatorial properties of well-centered triangulations in three and higher dimensions.* Comput. Geom. *46* (2013), 700–724.

[18] Vatne, J. E.: *The probability that a simplex is well-centered.* Appl. Math. *62* (2017), 213–223.