

Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 93 (2018), No. 1, 57–60

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/147170>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2018

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Naše soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. června 2018* na adresu redakce.

Úloha 69 Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, které mají stejnou číselnou hodnotu obsahu i obvodu.

(Jaroslav Zhouf)

Úloha 70 *Pohyb náboje*

Náboj vystřelený z povrchu Země se roztrhl v nejvyšším bodě dráhy na dvě části též hmotností. Za 2,0 s po roztržení dopadla část na povrch Země ve vzdálenosti 1 000 m od místa výstřelu, přesně pod místem, kde došlo k výbuchu. V jaké vzdálenosti od místa výstřelu dopadla druhá část náboje?

Odpor prostředí zanedbejte, povrch Země považujte za vodorovnou rovinu. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.

(Ivo Volf)

Řešení úloh z čísla 2/2017

Úloha 63 Číslo 22 001 177 je dělitelné jedenácti. Kolik osmiciferných čísel složených z cifer 2, 2, 0, 0, 1, 1, 7, 7 je dělitelných jedenácti?

(Jaroslav Zhouf)

Řešení: Součet cifer čísla 22 001 177 na lichých pozicích a součet cifer na sudých pozicích je stejný, takže rozdíl obou součtů je nula, a proto je dané číslo dělitelné jedenácti.

Součet $2 + 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 7 + 7$ je sudé číslo, proto rozdíl součtu jakýchkoli čtyř cifer a součtu zbylých čtyř cifer čísla 22 001 177 je číslo sudé. Pro dělitelnost jedenácti nás tedy zajímá jen rozdíl obou takových součtů, který je roven číslům -14 , 0 a 14 (rozdíly -28 či 28 atd. jsou zde nedosažitelné).

Uvažujme nejprve onen rozdíl roven číslu 0 . Tato situace vznikne jen permutací číslic na sudých pozicích a permutací číslic na lichých pozicích čísla 22 001 177. Jelikož na začátku nemůže být číslice 0 , proto počet permutací na lichých pozicích (zleva) je $3 \cdot 3!$. Na sudých pozicích (zleva) je počet permutací roven $4!$. Zde je tedy počet hledaných čísel roven $3 \cdot 3! \cdot 4! = 432$.

Uvažujme nyní rozdíl součtů cifer na sudých a lichých pozicích roven číslu 14 . Jedním takovým číslem dělitelným jedenácti je 72 712 010. Stejně jako v předchozím případě je počet hledaných čísel roven

$$\frac{4!}{2} \cdot \frac{4!}{2} = 144.$$

Nakonec uvažujme rozdíl součtů cifer na sudých a lichých pozicích roven číslu -14 . Jedním takovým číslem dělitelným jedenácti je 27 170 201. Stejně jako v předchozích případech je počet hledaných čísel roven

$$\frac{2 \cdot 3!}{2} \cdot \frac{4!}{2} = 72.$$

Celkový počet hledaných čísel je tedy $432 + 144 + 72 = 648$.

Úloha 64 *Pohyb puku*

Puk s počáteční rychlostí o velikosti v_0 se zastaví působením stálé třecí síly na dráze s_0 . Určete

- velikost zrychlení a pohybu a dobu t_0 pohybu,
- součinitel f smykového tření,
- dráhu s_1 uraženou za první polovinu doby pohybu,
- velikost rychlosti v_1 dosaženou v polovině dráhy,
- dobu t_1 , během níž urazí první polovinu dráhy.

Řešte obecně, pak pro hodnoty $v_0 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $s_0 = 120 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

(Josef Jírů)

Autorské řešení:

a) Vyjdeme z kinematických zákonů rovnoměrně zpomaleného pohybu, tj.

$$v = v_0 - at, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2.$$

V čase t_0 se puk zastaví. Platí tedy $0 = v_0 - at_0$. Z toho je

$$t_0 = \frac{v_0}{a}, \quad s_0 = v_0 t_0 - \frac{1}{2} at_0^2 = \frac{v_0 t_0}{2} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Potom $a = \frac{v_0^2}{2s_0} = 0,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $t_0 = \frac{2s_0}{v_0} = 17 \text{ s}$.

b) Platí:

$$f = \frac{F_t}{G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}.$$

Po dosazení za a z úlohy a) a po úpravě máme $f = \frac{v_0^2}{2gs_0} = 0,083$.

c) Platí

$$s_1 = v_0 \frac{t_0}{2} - \frac{1}{2} a \left(\frac{t_0}{2} \right)^2 = s_0 - \frac{s_0}{4} = \frac{3}{4} s_0.$$

Po dosazení $s_1 = 90 \text{ m}$.

d) Platí $\frac{1}{2} s_0 = \frac{1}{2} at_2^2$, kde t_2 je doba pohybu na druhé polovině dráhy. Z rovnice plyne $t_2 = \sqrt{\frac{s_0}{a}}$. Dále je $v_1 = at_2 = \sqrt{as_0}$, kam nyní dosadíme zrychlení z úlohy a). Dostaneme

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 9,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

e) Platí

$$t_1 = t_0 - t_2 = \frac{2s_0}{v_0} - \sqrt{\frac{s_0}{a}},$$

kde po dosazení za zrychlení a z úlohy a) a po úpravě máme

$$t_1 = (2 - \sqrt{2}) \frac{s_0}{v_0} = 5,0 \text{ s}.$$

Stav soutěže po 64 soutěžních úlohách

Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 58,5 b., Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 b., Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 b., Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 b., Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 b., Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 b., Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 b., Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 b., Martin Bucháček (G Ludka Pika, Plzeň) – 26 b., Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 b., Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 b., Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 b., Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 b., Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 b., Marian Poljak (GJŠ, Přerov) – 15 b., Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 b., Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 b., Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 b., Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 b., Matouš Bílek (GJŠ, Přerov) – 10 b., Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 b., Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 b., Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 b., Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 b., David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 b., Libor Drozek (G, Holešov) – 9 b., Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 b., Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 7,5 b., Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 b., Tomáš Pavlín (G, Parlérova, Praha 6) – 7 b., Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 b., Veronika Hladíková (G, Praha 5 – Radotín) – 5 b., Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 b., Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 b., Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 b., Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 b., Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 b., Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 b., Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 b., Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 b., Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 b., Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 b., Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 b., Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 – Radotín) – 4,5 b., Jiří Guth (G, Jirovcova, České Budějovice) – 3 b., Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 b., Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 b., Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b., Václav Skála (G, Klatovy) – 1 b., Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 b., Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 b.