Martina Bečvářová; Jiří Veselý
Plimpton 322 — přelomový objev?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 62 (2017), No. 4, 254–263

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/147068`

Plimpton 322 — přelomový objev?

Martina Bečvářová, Jiří Veselý, Praha

Abstrakt. Článek pojednává o matematicky velmi zajímavé mezopotámské hliněné tabulce známé pod názvem Plimpton 322, která ukazuje vyspělost tehdejších matematických znalostí a která je v současné době zdrojem zajímavých spekulací.

Značně staré písemné památky se zachovaly na mezopotámských hliněných tabulkách. Existuje jich mnoho tisíc a obsahují např. patrně nejstarší rozsáhlé literární dílo *Epos o Gilgamešovi*; na tabulkách se nalezly podstatné části jeho tzv. babylonské verze, pocházející z doby cca 2000 let př. n. l. Mezi mezopotámskými tabulkami je i tabulka označovaná *Plimpton 322* z období 19. až 17. století př. n. l., která se již delší dobu těší pozornosti matematiků. Více o matematice v Mezopotámii viz [1], [3], [16], [17] a [18].

Trocha historie

Tabulka Plimpton 322 pochází pravděpodobně z nelegálních vykopávek na území dnešního Iráku. Americký diplomat Edgar James Banks (1866–1945), archeologický nadšenec a obchodník se starožitnostmi, ji koupil někdy v období mezi roky 1898 a 1909, kdy se stal profesorem orientálních jazyků a archeologie na univerzitě v Toledu (OH, USA). Podle jeho svědectví byla tabulka nalezena u Tell as-Senkerehu, města ležícího na místě, kde kdysi dávno stávala starověká Larsa[1]. Prodal ji kolem roku 1922 spolu s dalšími tabulkami Georgu Arthurovi Plimptonovi (1855–1936), nakladateli, sběrateli a filantropovi, který pak svoji sbírku odkázal roku 1936 University of Columbia. Tabulka je dnes součástí kolekce *Rare Book and Manuscript Library*, která se nachází v Butler Library, největší knihovně této univerzity. Ve třicátých letech 20. století studoval tabulku Plimpton 322 François Thureau-Dangin (1872–1944), který se zasloužil o rozluštění mnoha sumerských a akkadských textů; jako první zjistil, že tabulka obsahuje pythagorejské trojice; viz [20]. Ve čtyřicátých letech ji zkoumali Otto Eduard Neugebauer (1899–1990) a jeho kolega na Brown University Abraham Sachs (1915–1983); viz [17]. Odstranili písařské chyby, doplnili poškozená místa a interpretovali ji jako soupis patnácti pythagorejských trojic. Pak zájem o ni vzrostl a trvá dodnes.

[1]Tam se začalo s archeologickými vykopávkami v roce 1850. Vedl je lord William Kenneth Loftus (1820–1858), britský geolog, přírodovědec a archeolog.

Prof. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D., Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní ČVUT, Na Florenci 25, 110 00 Praha 1, e-mail: becvamar@fd.cvut.cz, doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz

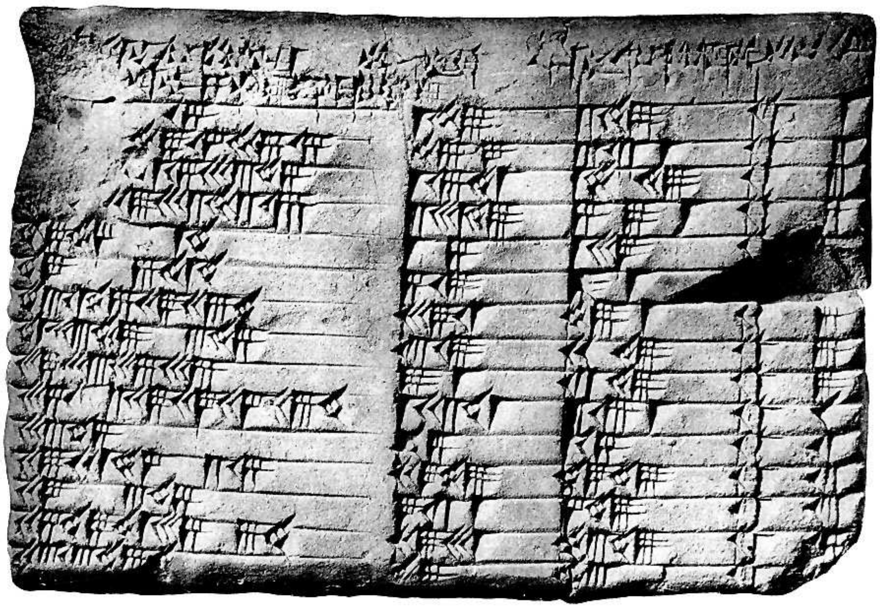
Popis tabulky

V katalogu přírůstků knihovny (viz [4]) je tabulka stručně popsána slovy:

> *322. Clay tablet, left-hand edge broken away, bottom of right-hand corner, and a piece of columns* 3 *and* 4 *chipped off; fairly well preserved, dark-brown.* 8.8 × 12.5 *cm; on obverse* 4 *columns with* 16 *lines, reverse blank. Content: Commercial account. No date.*

Jak vidíme, z tohoto zápisu je také odvozen její standardně užívaný název.

Tabulka, která je poškozena zejména na okrajích, ale i v textové části, obsahuje zápis v klínovém písmu. Kromě dvouřádkového záhlaví se jedná o 15 řádků čísel uspořádaných do čtyř sloupců. Je dokonce možné, že její část chybí, neboť na levém okraji jsou stopy po relativně novodobém přilepení další části, která se však ztratila či ji někdo úmyslně odstranil.[2] Současný vzhled a stav tabulky je patrný z obrázku 1.



Obr. 1. Plimpton 322. Převzato z `https://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322`.

Přepíšeme-li klínopisný zápis a zachováme-li šedesátkovou soustavu (jako obvyklé oddělovače „číslic" užijeme zřejmým způsobem čárky a středníky, záhlaví je vynecháno), dostaneme následující tabulku, v níž jsou již odstraněny zjištěné chyby ([4] jich uvádí 6, [2] celkem 4 „písařské" a 3 početní), na některých místech jsou doplněny nuly a poškozená místa jsou rekonstruována:

[2]V literatuře se odhady o pravděpodobné šířce zmizelé části tabulky pohybují mezi 55 a 80 mm; viz [4].

$(1;59,00,15)$	$(01,59)$	$(02,49)$	(01)
$(1;56,56,58,14,50,06,15)$	$(56,07)$	$(01,20,25)$	(02)
$(1;55,07,41,15,33,45)$	$(01,16,41)$	$(01,50,49)$	(03)
$(1;53,10,29,32,52,16)$	$(03,31,49)$	$(05,09,01)$	(04)
$(1;48,54,01,40)$	$(01,05)$	$(01,37)$	(05)
$(1;47,06,41,40)$	$(05,19)$	$(08,01)$	(06)
$(1;43,11,56,28,26,40)$	$(38,11)$	$(59,01)$	(07)
$(1;41,33,45,14,03,45)$	$(13,19)$	$(20,49)$	(08)
$(1;38,33,36,36)$	$(08,01)$	$(12,49)$	(09)
$(1;35,10,02,28,27,24,26)$	$(01,22,41)$	$(02,16,01)$	(10)
$(1;33,45)$	(45)	$(01,15)$	(11)
$(1;29,21,54,02,15)$	$(27,59)$	$(48,49)$	(12)
$(1;27,00,03,45)$	$(02,41)$	$(04,49)$	(13)
$(1;25,48,51,35,06,40)$	$(29,31)$	$(53,49)$	(14)
$(1;23,13,46,40)$	(28)	(53)	(15)

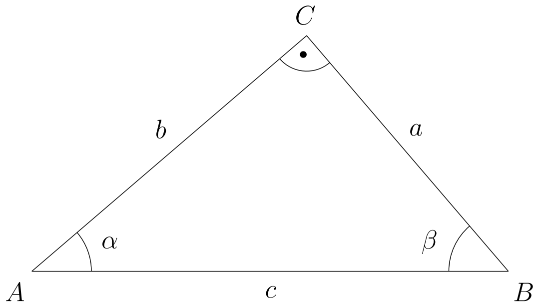
Tabulka tak získala trochu na srozumitelnosti, ale jediné, co je zřejmé na první pohled, je, že čtvrtý sloupeček obsahuje pořadová čísla řádků. Zbývající tři sloupce zůstávají stále nesrozumitelné. Nyní převedeme čísla do desítkové soustavy (v prvním sloupečku uvádíme vždy 7 desetinných míst):

1,983 402 7	119	169	1
1,949 158 5	3 367	4 825	2
1,918 802 1	4 601	6 649	3
1,886 247 8	12 709	18 541	4
1,815 007 6	65	97	5
1,785 192 8	319	481	6
1,719 983 5	2 291	3 541	7
1,692 709 3	799	1 249	8
1,642 669 4	481	769	9
1,586 122 5	4 961	8 161	10
1,562 500 0	45	75	11
1,489 416 7	1 679	2 929	12
1,450 017 3	161	289	13
1,430 238 8	1 771	3 229	14
1,387 160 3	28	53	15

Teď si vypomůžeme obrázkem 2: Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC se standardním označením stran a úhlů. Třetí sloupec tabulky Plimpton 322 udává patnáct různých (celočíselných) hodnot délky přepony c, druhý sloupec patnáct různých hodnot délky kratší odvěsny a, první sloupec odpovídající hodnoty čísel

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = (\operatorname{cosec}\beta)^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2} = 1 + \frac{a^2}{b^2} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha. \tag{1}$$

Poznamenejme, že pokud bychom se chtěli vyhnout vyjádření, které zahrnuje úhel, bylo by možné interpretovat výraz $\left(c/b\right)^2$ „geometricky“, tedy chápat jej např. jako



Obr. 2. Schéma označení významu sloupců tabulky

podíl obsahů čtverce nad přeponou a čtverce nad odvěsnou. S ohledem na velikost předpokládané chybějící levé části tabulky většina autorů uvažuje o dvou chybějících sloupcích, ale s různým obsahem.

Sloupec odpovídajících velikostí strany b není na tabulce Plimpton 322 uveden, snad proto, že se jedná o pythagorejské trojúhelníky a příslušné hodnoty se snadno dopočtou. Např. v sedmém řádku je $c = 3\,541$, $a = 2\,291$, odtud

$$b = \sqrt{3\,541^2 - 2\,291^2} = \sqrt{7\,290\,000} = 2\,700;$$

dále je

$$\left(\frac{3\,541}{2\,291}\right)^2 = 1 + \frac{43}{60} + \frac{11}{60^2} + \frac{56}{60^3} + \frac{28}{60^4} + \frac{26}{60^5} + \frac{40}{60^6} \doteq 1{,}719\,983\,5.$$

Druhý a třetí sloupec nedávají zjevný klíč pro uspořádání řádků tabulky, které explicitně obsahuje sloupec čtvrtý. Lze si však povšimnout, že v prvním sloupci jsou čísla uspořádána sestupně podle velikosti.

Doplníme nyní tabulku o hodnoty délek druhé odvěsny b a nahradíme první sloupec dvěma sloupci, udávajícími ve stupních zaokrouhlené velikosti úhlů α a β. Na pravou stranu tabulky doplníme sloupce hodnot p a q, jejichž význam objasníme dále. Obdržíme následující tabulku:

β	α	b	a	c	n	p	q
45,24°	44,76°	120	119	169	1	12	5
45,75°	44,25°	3 456	3 367	4 825	2	64	27
46,21°	43,79°	4 800	4 601	6 649	3	75	32
46,73°	43,27°	13 500	12 709	18 541	4	125	54
47,92°	42,08°	72	65	97	5	9	4
48,46°	41,54°	360	319	481	6	20	9
49,68°	40,32°	2 700	2 291	3 541	7	54	25
50,23°	39,77°	960	799	1 249	8	32	15
51,28°	38,72°	600	481	769	9	25	12
52,56°	37,44°	6 480	4 961	8 161	10	81	40
53,13°	36,87°	60	45	75	11	2	1
55,02°	34,98°	2 400	1 679	2 929	12	48	25
56,14°	33,86°	240	161	289	13	15	8
56,74°	33,26°	2 700	1 771	3 229	14	50	27
58,11°	31,89°	45	28	53	15	9	5

Všimněme si, že čísla b mají v poslední tabulce „pěkný“ tvar. Jedná se o tzv. regulární čísla. Jsou to čísla tvaru $n = 2^i\, 3^j\, 5^k$, která jsou děliteli přirozené mocniny čísla 60.[3] Regularita b zajišťuje, že hodnoty c/b a jejich druhé mocniny uvedené na tabulce Plimpton 322 lze v šedesátkové soustavě vyjádřit přesně. Je téměř nemyslitelné, že by tabulka byla sestavována pomocí náhodných pokusů o nalezení pythagorejských čísel, na to je příliš pravidelná. Její tvůrce musel pravděpodobně znát nějaký způsob / nějaké způsoby jejich generování. Tak se dostáváme k problému v širším měřítku známému pod označením „zpětné inženýrství“: hledáme k výsledku způsob jeho nalezení.

Pravděpodobné vytváření tabulky Plimpton 322

Například tak zvané základní (někdy též primitivní) pythagorejské trojice[4] a, b, c získáme tak, že dosazujeme navzájem nesoudělná přirozená čísla p, q, $p > q$ do vztahů:

$$a = p^2 - q^2, \qquad b = 2pq, \qquad c = p^2 + q^2. \tag{2}$$

Pak je totiž zřejmě

$$\left(p^2 - q^2\right)^2 + \left(2pq\right)^2 = \left(p^2 + q^2\right)^2. \tag{3}$$

Prověřením případů čísel p, q, které vedou k údajům v námi přepsané tabulce, se zdá *velmi pravděpodobné*, že tvůrce tabulky Plimpton 322 tento způsob generování znal a (částečně) použil[5]. Budeme mu stručně říkat pq-metoda; její jádro je popsáno již v [17] a podrobněji v [1].

Je-li m liché přirozené číslo, pak snadno ověříme, že platí

$$\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2, \tag{4}$$

z čehož je zřejmé, že čísla

$$\frac{1}{2}\left(m^2 - 1\right), \qquad m, \qquad \frac{1}{2}\left(m^2 + 1\right),$$

tvoří celočíselnou pythagorejskou trojici. Rovnost (4) platí, nahradíme-li m libovolným reálným číslem λ. Speciálně při náhradě kladným číslem λ dostaneme po dělení obou stran vzniklé rovnosti číslem λ^2 rovnost

$$\left(\frac{\lambda - 1/\lambda}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\lambda + 1/\lambda}{2}\right)^2. \tag{5}$$

Ta je východiskem pro další metodu.[6] Na rovnost (5) můžeme pohlížet jako na vyjádření Pythagorovy věty pro nějaký trojúhelník, jsme však zatím daleko od pythagorejské trojice, která je tvořena přirozenými čísly. Pokud však λ bude voleno tak, aby mělo

[3] Protože například $60^2 = 240 \times 15$, je číslo $240 = 2^4\, 3^1\, 5^1$ regulární.

[4] Jsou to takové pythagorejské trojice a, b, c, v nichž jsou čísla a, b, c navzájem nesoudělná.

[5] Poznamenejme, že 11. a 15. řádek vykazují odchylky, k nimž se dále ještě podrobněji vrátíme.

[6] Při $\lambda \in \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$ bude první člen na levé straně (5) z intervalu $(0, 1)$ a pro $\lambda > 1 + \sqrt{2}$ bude tento člen větší než 1. V prvém případě musí být delší rameno trojúhelníka rovno 1, ve druhém musí být kratší rameno rovno 1. Případ $\lambda \leq 1$ nebudeme uvažovat, protože pak by první člen na levé straně v závorce nebyl kladný.

λ i $1/\lambda$ konečný šedesátkový rozvoj, nabude rovnost na zajímavosti. Bude-li to zlomek tvaru p/q, nastane to např. v případě, že p, q budou regulární čísla. Těch je mezi prvními sto přirozenými čísly relativně dost, jsou to čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 60, 64, 72, 75, 80, 81, 90, 96, 100. Dosadíme-li p/q do (5), dostaneme po úpravě rovnost

$$\left(\frac{p^2-q^2}{2pq}\right)^2+1=\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^2.$$

Násobením této rovnosti faktorem $4p^2q^2$ dostaneme (3), a tedy pythagorejskou trojici (2). To je vodítko: (5) popisuje až na faktor pythagorejskou trojici. Skutečně, např. volba $\lambda = 9/4$ dá po dosazení do (5) a úpravě pythagorejskou trojici 72, 65, 97 z 5. řádku tabulky. Právě popsanému způsobu budeme říkat λ-metoda. Také ona se vyskytuje již v práci [17]. Srovnání obou metod obsahuje např. [18] nebo stručnější text téže autorky [19].

Ukázalo se, že na tabulce Plimpton 322 jsou všechny pythagorejské trojice, pro něž při užití pq-metody jsou p, q, $p > q$, nesoudělná regulární čísla (to zaručí regularitu b), a navíc

$$q \le 60, \qquad (1;48)=\frac{9}{5}<\frac{p}{q}<\frac{12}{5}=(2;24).$$

Avšak: Jedna nesrovnalost spočívá v tom, že na 11. řádku jsou hodnoty c a a, které odpovídají patnáctinásobku uvedených čísel p, q; pro $p = 2$, $q = 1$ by mělo být $a = 3$, $c = 5$ (což dá $b = 4$). Na tabulce však je $a = 45$, $c = 75$ ($b = 60$).

Vzhledem k absenci znaku pro nulu[7] lze údaje napsané na tabulce interpretovat též jako $c = (01, 15, 00) = 4500$ a $a = (45, 00) = 2700$. Zvolíme-li $p = 60$ a $q = 30$, dostaneme netriviální pythagorejskou trojici $a = 2700$, $c = 4500$ a $b = 3600$, která je s trojicí $a = 3$, $c = 5$, $b = 4$ ekvivalentní. Operaci přechodu na jednodušší trojici snad písař považoval za snadnou. Volba čísel p a q pak odpovídá výše uvedeným nerovnostem, čísla jsou však *soudělná*.

Druhá nesrovnalost se týká 15. řádku. K tam uvedeným hodnotám $b = 45$ a $c = 53$, jimž odpovídá $a = 28$, lze dospět λ-metodou při volbě $\lambda = p/q = 9/5$, zatímco pq-metoda dává pro $p = 9$, $q = 5$ hodnoty $b = 90$ a $c = 106$ a $a = 56$. Tomu by však neodpovídaly další na tabulce uvedené hodnoty. Podrobněji viz [2]. Volbou $p = 7$, $q = 2$ získáme pythagorejskou trojici 45, 28, 53, avšak se zaměněnými hodnotami a a b.

Jedním z rysů tabulky Plimpton 322 je, že žádný ze zlomků p/q a q/p nemá více než čtyřčlenný šedesátkový rozvoj. Takových zlomků je mezi těmi, které mají nejvýše sedmičlenný rozvoj, celkem 18, tedy tři v tabulce chybí. Jeden z nich je tvořen dvojicí čísel p, q (*neplatí* pro ni $q \le 60$), kde $p = 125$, $q = 64$; odpovídající hodnoty jsou $a = 11\,529$, $b = 16\,000$, $c = 19\,721$, a dále je

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = (1;31,09,09,25,42,02,15) \doteq 1{,}519\,210\,3,$$
$$\alpha \doteq 35{,}78^\circ, \qquad \beta \doteq 54{,}22^\circ.$$

[7] Připojme ještě důležitou vysvětlující poznámku: Mezopotámští počtáři nezapisovali nulu na začátku či na konci čísla, tj. zápis (45) mohl znamenat např. číslo 45×60, ale též 45, nebo 45/60 apod. Každý počtář interpretoval zápis podle kontextu. K rozšíření symbolu pro nulu došlo až daleko později a její užívání v evropské astronomii připisujeme Claudiu Ptolemaiovi (asi 85 až 165) a později indickým matematikům z doby kolem roku 650. Ve smyslu použití ke zpřesnění zápisu čísel (k odlišení čísel (1,0,1) od (1,1), resp. (11) v šedesátkové soustavě) se nula objevila asi 400 let př. n. l.

Tyto hodnoty by ve výše uvedené tabulce patřily mezi 11. a 12. řádek. Někteří autoři se domnívají, že tento řádek „11a“ nebyl uveden právě pro svou složitost.

Všimněme si krátce širšího kontextu. Asi z pěti set tisíc nalezených tabulek byla prozkoumána jen malá část a těm matematické povahy nebyla věnována velká pozornost, neboť pro sumerology a asyrology nejsou textově příliš přitažlivé a podnětné. Co do matematické složitosti a zajímavosti je tabulka Plimpton 322 ojedinělá. Byly nalezeny např. tabulky pro násobení, tabulky druhých a třetích mocnin, tabulky převrácených hodnot, popisy kvantitativních změn týkajících se zboží, práce, času apod. Většinou se jedná o „standardizované tabulky“, které se dochovaly ve více exemplářích. Nepopisují ale rozvoj matematiky, protože obvyklí písaři matematiky nebyli. Právě jedinečnost obsahu tabulky Plimpton 322 ztěžuje její dnešní hodnocení. Můžeme si klást otázku, zda představovala učební pomůcku a spekulovat o stadiu její tvorby, jestli je v přípravné fázi nebo zda již jde o řešení zformulovaného problému. Není totiž jasné, zda představuje definitivní podobu dokumentu, i když nese znaky opisování z jiného, možná staršího zdroje. Není asi seznamem pythagorejských trojic (třetí člen trojice není tabelován), má asi spíše geometrické pozadí (studium trojúhelníků). Nedostatek srovnávacího materiálu umožňuje různé hypotézy.

V každém případě jsou tyto hypotézy méně pravděpodobné nežli ty, které zapadají do rámce širšího zkoumání. Ačkoli se autoři v [17] přikláněli spíše k pq-metodě generování tabulky, z širšího pohledu se dnes zdá pravděpodobnější užití λ-metody, i když je zdánlivě složitější. Nasvědčuje tomu částečně i analýza chyb, které jsou na tabulce obsaženy. V tomto směru lze čtenáři doporučit k nahlédnutí práce [18] nebo [6].

Ohlasy

O tabulce Plimpton 322 vyšly od roku 1945 asi dvě desítky prací, z nichž některé jsou značně obsáhlé. Neuvádíme záměrně všechny, ale pouze inspirativní výběr. Lze říci, že v posledním desetiletí zájem o tabulku nápadně vzrostl, což nás vedlo k napsání tohoto textu.

Je pochopitelné, že za výše popsaného stavu existuje široké pole možných dohadů a směrů zkoumání. Jeden z posledních článků [14] je doprovázen zvýšeným zájmem novinářů (i u nás) a má přídech senzace. Objevují se titulky jako např. *3,700-year-old Babylonian tablet rewrites the history of maths — and shows the Greeks did not develop trigonometry* ([10], The Telegraph, 27. 8. 2017) nebo *Mathematical secrets of ancient tablet unlocked after nearly a century of study* ([8], webová verze The Guardian (US), 24. 8. 2017).

Jádro věci spočívá v názoru na vývoj matematiky. Starší respektované prameny (např. [9]) uvádějí jako tvůrce trigonometrie řeckého astronoma a matematika Hipparcha (asi 190 až 125 př. n. l.), avšak [14] se snaží dobu jejího vzniku posunout na základě tabulky Plimpton 322 o více než tisíciletí do minulosti. Tato teorie není nová (viz [7]), lze ji vystopovat např. k [17]; srovnej též s obsáhlým textem [6]. Kromě odborného časopisu Historia Mathematica však autoři zapojili i populární sdělovací prostředky. Čtenář si může prohlédnout např. video *Old Babylonian mathematics and Plimpton 322: A new understanding of the OB tablet Plimpton 322* na [8], resp. další video s podobnou tématikou (a obsazením) *Ancient Babylonian tablet — world's first trig table* na [13]. Viz též [21] nebo na ČT 24 [15].

Ne všechny novinářské ohlasy jsou striktně kladné. Na stránkách Scientific American můžeme nalézt text *Don't fall for Babylonian trigonometry hype* (viz text [12] s podtitulkem *Separating fact from speculation in math history*), který je k této moderní interpretaci skeptický (a kritický).

Je dobře, že se takové články objevují i v renomovaných matematických časopisech? Podle našeho názoru ano: spojují matematiku s (obecnou) historií, o níž by měl mít povědomost každý kulturní člověk. A je taky dobré, aby se všichni učili kriticky myslet a rozlišovali mezi doloženými fakty a hypotézami. Článek [14] je hezký přehledový článek s něčím navíc: nabízí řešení některých otázek spojených s tabulkou Plimpton 322 a některá dřívější řešení podrobuje kritice. V otázce kořenů trigonometrie však bez dalších nálezů či objevů nebude patrně možné považovat jím nabízený výklad za definitivní řešení. Zkrátka: Je to další vrchol koncentrace jednoho směru zájmu o tabulku Plimpton 322, konkrétně se jedná o její vztah ke goniometrickým funkcím a trigonometrii.

Jak již bylo řečeno, myšlenka takto interpretovat tabulku Plimpton 322 není nová. Autoři [14] zdůrazňují, že na tabulce se nacházejí *exaktní*, nikoli zaokrouhlené hodnoty. Druhý a třetí sloupec chápou jako zkrácený zápis (pro pohodlí písaře) *poměrů* stran a/b a c/b se společným vynechaným faktorem $1/b$. Tyto poměry by mohly být uvedeny na chybějící části tabulky. A tak jistý vztah ke goniometrickým funkcím je dán prvním sloupcem, uvádějícím hodnoty čtverců funkce kosekans pro úhel β. Změny hodnot úhlů v tabulce jsou poměrně pravidelné. Jsou to postačující argumenty pro to, abychom Plimpton 322 považovali za „trigonometrickou tabulku“?

Kolem této otázky běží již delší dobu diskuse matematiků, asyrologů i historiků matematiky; viz např. [5], [11], [18]. Z pohledu matematika není vůbec podstatné, zda se na tabulce jedná o obdélníky o stranách a, b a úhlopříčce c, nebo zda jde o trojúhelníky o stranách a, b, c. Není však až tak důležité, jak velká část tabulky možná chybí, ale to, jaké další údaje na ní mohly být či byly zaznamenány.

Stále totiž nejsou dostatečně přesvědčivě zodpovězeny základní otázky, a to jak a proč byla tabulka vytvořena, k čemu byla používána, zda byla původně obsáhlejší a jaké další sloupce na ní ještě byly.[8] Nejzávažnějším problémem je právě objasnění významu hodnot $(c/b)^2$ v zachovaném prvním sloupci tabulky a výše zmíněných odhadů pro podíl p/q.

Zmínili jsme pár poznatků o tom, co na tabulce Plimpton 322 *skutečně je*, ostatní byly jen z části již známé hypotézy. Jakkoli se mohou jevit velmi pravděpodobné, jistota „o tom, jak to původně bylo“ se z nich nezvratně vyvodit nedá. Pomoci by nám mohly nové šťastné nálezy či prozkoumání dalších již objevených, avšak nezpracovaných zdrojů. Jistě je „téměř jisté“, že Pythagorova věta byla známa a využívána „v praxi“ (tj. ve stavitelství, vyměřování, vyučování apod.) asi 1 000 let před Pythagorem (viz např. [11]), avšak na otázku o počátcích trigonometrie … na tu si musí čtenář (po eventuálním přečtení citovaných pramenů) udělat zatím názor sám.[9]

[8] Text [2] obsahuje např. tabulku, doplněnou o řádky 16–38, kterými by snad mohla/měla tabulka (na rubu) pokračovat, a další dva sloupce, tabelující hodnoty délek strany b a hodnoty příslušných podílů p/q. Poznamenejme, že v doplněné části se vyskytují další dva řádky, v nichž hodnoty závisejí na tom, zda se použije pq-metoda nebo λ-metoda. V ostatních případech poskytují obě metody tytéž výsledky.

[9] Pokud ovšem neovládá cestování v čase :-).

L i t e r a t u r a

[1] Aaboe, A.: *Episodes from the early history of mathematics.* New Mathematical Library *13.* Mathematical Association of America, Washington, 1964.

[2] Abdulaziz, A. A.: *The Plimpton 322 tablet and the Babylonian method of generating Pythagorean triples.* arXiv:1004.0025v1 [math.HO], 1–34.

[3] Bečvářová, M.: *Matematika ve staré Mezopotámii.* In: Bečvář, J., Bečvářová, M., Vymazalová, H. (Eds): Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie. Dějiny matematiky 23. Prometheus, Praha, 2003.

[4] Britton, J. P., Proust, Ch., Shnider, S.: *Plimpton 322: a review and a different perspective.* Arch. Hist. Exact Sci. *5* (2011), 519–566.

[5] Creighton, B. R.: *Sherlock Holmes in Babylon.* Amer. Math. Monthly *87* (1980), 338–345.

[6] Hajossy, R.: *Plimpton 322: A universal cuneiform table for old Babylonian mathematicians, builders, surveyors and teachers.* Tatra Mt. Math. Publ. *67* (2016), 1–40.

[7] Joyce, D. E.: *Plimpton 322 Tablet.* Clark University, 1995 [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html`

[8] Kennedy, M.: *Mathematical secrets of ancient tablet unlocked after nearly a century of study.* The Guardian, 2017 [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `https://www.theguardian.com/science/2017/aug/24/mathematical-secrets-of-ancient-tablet-unlocked-after-nearly-a-century-of-study`

[9] Kline, M.: *Mathematical thoughts from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York, 1990 (první vydání 1972).

[10] Knapton, S.: *3,700-year-old Babylonian tablet rewrites the history of maths – and shows the Greeks did not develop trigonometry.* The Telegraph, 2017 [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `http://www.telegraph.co.uk/science/2017/08/24/3700-year-old-babylonian-tablet-rewrites-history-maths-could/`

[11] Knuth, D. E.: *Ancient Babylonian algorithms.* Comm. ACM *15* (1972), 671–677.

[12] Lamb, E.: *Don't fall for Babylonian trigonometry hype. Separating fact from speculation in math history.* Scientific American, 2017 [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/dont-fall-for-babylonian-trigonometry-hype/`

[13] Mansfield, D. F.: *Ancient Babylonian tablet – world's first trig table.* UNSWTV 2017, YouTube [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `https://www.youtube.com/watch?v=i9-ZPGp1AJE`

[14] Mansfield, D. F., Wildberger, N. J.: *Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry.* Hist. Math. *44* (2017), 395–419.

[15] Matematici odhalili záhadu babylonské hliněné destičky. Obsahovala první popis trigonometrie [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `http://www.ceskatelevize.cz/ct24/veda/2223535-matematici-odhalili-zahadu-babylonske-hlinene-desticky-obsahovala-prvni-popis`

[16] Neugebauer, O.: *Mathematische Keilschrift-Texte.* Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil) (reprint Springer-Verlag, Berlin, 1973).

[17] Neugebauer, O., Sachs, A.: *Mathematical cuneiform texts.* American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, 1945 (reprint American Oriental Society, New Haven, 1986).

[18] ROBSON, E.: *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reassessment of Plimpton 322.* Historia Math. *28* (2001), 167–206.

[19] ROBSON, E.: *Words and pictures: new light on Plimpton 322.* Amer. Math. Monthly *109* (2002), 105–120.

[20] THUREAU-DANGIN, F.: *Le théorème de Pythagore.* (*Notes Assyriologigues LXVIII.*) Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale *29* (1932), 131–142.

[21] WILDBERGER, N. J.: *Old Babylonian mathematics and Plimpton 322: A new understanding of the OB tablet Plimpton 322.* YouTube [online], [cit. 20. 10. 2017]. Dostupné z: `https://www.youtube.com/watch?v=L24GzTaOll0`