Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 2, 54–59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146875

Naše soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. září 2017* na adresu redakce.

Úloha 63 Číslo 22 001 177 je dělitelné jedenácti. Kolik osmiciferných čísel složených z cifer 2, 2, 0, 0, 1, 1, 7, 7 je dělitelných jedenácti?

(*Jaroslav Zhouf*)

Úloha 64 *Pohyb puku*

Puk s počáteční rychlostí o velikosti v_0 se zastaví působením stálé třecí síly na dráze s_0. Určete

a) velikost zrychlení a pohybu a dobu t_0 pohybu,

b) součinitel f smykového tření,

c) dráhu s_1 uraženou za první polovinu doby pohybu,

d) velikost rychlosti v_1 dosaženou v polovině dráhy,

e) dobu t_1, během níž urazí první polovinu dráhy.

Řešte obecně, pak pro hodnoty $v_0 = 14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $s_0 = 120\ \mathrm{m}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

(*Josef Jírů*)

Řešení úloh z čísla 3/2016

Úloha 57 Určete počet všech devítimístných přirozených čísel, v nichž se každá z číslic 1–9 vyskytuje právě jednou, pravidelně se v nich střídají liché a sudé číslice, součet prvních čtyř číslic se rovná součtu posledních čtyř číslic a jsou dělitelná

a) jedenácti při čtení čísla zepředu i zezadu,

b) sedmi při čtení čísla zepředu i zezadu.

(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Hledaná devíticiferná čísla s číslicemi se střídající se paritou označme $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$.

a) Jelikož je

$$(a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1) - (a_8 + a_6 + a_4 + a_2) = 5$$

není žádné číslo $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ dělitelné jedenácti.

b) Jelikož zároveň platí

$$a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 45,$$
$$a_9 + a_8 + a_7 + a_6 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1,$$

je

$$a_5 + 2(a_4 + a_3 + a_2 + a_1) = 45.$$

Číslo $a_4+a_3+a_2+a_1$ je sudé, proto může být pouze $a_5 = 1$, nebo $a_5 = 5$, nebo $a_5 = 9$.

Kritérium dělitelnosti sedmi dává rovnosti

$$2a_9 + 3a_8 + a_7 - 2a_6 - 3a_5 - a_4 + 2a_3 + 3a_2 + a_1 = 7k,$$
$$a_9 + 3a_8 + 2a_7 - a_6 - 3a_5 - 2a_4 + a_3 + 3a_2 + 2a_1 = 7l,$$

kde k a l jsou celá čísla. Snadno ověříme, že obě tato čísla jsou lichá, tedy $k + l$ i $k - l$ jsou sudá čísla.

Postupně platí

$$3(a_9 + 2a_8 + a_7 - a_6 - 2a_5 - a_4 + a_3 + 2a_2 + a_1) = 7(k + l),$$
$$3(45 + a_8 - 2a_6 - 3a_5 - 2a_4 + a_2) = 7(k + l),$$
$$3(45 + 20 - 3a_6 - 3a_5 - 3a_4) = 7(k + l).$$

Číslo $45+20-3a_6-3a_5-3a_4$ dává po dělení třemi zbytek 2, proto číslo $k + l$ dává po dělení devíti zbytek 6. Jelikož platí nerovnosti

$$-28 \leq 7(k + l) \leq 132,$$
$$-4 \leq k + l \leq 18,$$

může být jedině $k + l = 6$.

Také platí

$$a_9 - a_7 - a_6 + a_4 + a_3 - a_1 = 7(k - l),$$
$$-18 \leq 7(k - l) \leq 18,$$

tedy může být jedině $k - l = 2$, nebo $k - l = 0$, nebo $k - l = -2$.

Je-li $k - l = 2$ a $k + l = 6$, je $k = 4$, což je ve sporu s lichostí čísla k. Je-li $k - l = -2$ a $k + l = 6$, je $k = 2$, což je také ve sporu s lichostí čísla k. Zbývá jediná možnost $k - l = 0$ a $k + l = 6$, odkud je $k = l = 3$. Budeme tedy dále uvažovat tento případ.

V tomto případě postupně máme

$$3(45 + 20 - 3a_6 - 3a_5 - 3a_4) = 7(k + l) = 7 \cdot 6,$$
$$a_6 + a_5 + a_4 = 17.$$

Odsud je vidět, že nemůže být $a_5 = 1$.

Uvažujme tedy nejprve případ $a_5 = 5$. Pak je $a_6 + a_4 = 12$, odkud buď $a_6 = 8$ a $a_4 = 4$, nebo $a_6 = 4$ a $a_4 = 8$. Stačí uvažovat jen první situaci, druhá situace je jen středově souměrná. Jelikož zde je

$$a_9 + a_8 + a_7 + a_6 = 20,$$
$$a_9 + a_8 + a_7 = 12,$$

připadají v úvahu devítimístná čísla 921854763, 921854367, 129854763, 129854367, 723854961, 723854169, 327854961, 327854169. Z nich vyhovují podmínkám úlohy (po zkoušce dělitelnosti sedmi) jen druhé a sedmé číslo.

Uvažujme nyní poslední případ $a_5 = 9$. Pak je $a_6 + a_4 = 8$, odkud buď $a_6 = 6$ a $a_4 = 2$, nebo $a_6 = 2$ a $a_4 = 6$. Stačí uvažovat jen první situaci, druhá situace je jen středově souměrná. Jelikož zde je

$$a_9 + a_8 + a_7 + a_6 = 18,$$
$$a_9 + a_8 + a_7 = 12,$$

připadají v úvahu devítimístná čísla 741692583, 741692385, 147692583, 147692385, 543692781, 543692187, 345692781, 345692187, 381692745, 381692547, 183692745, 183692547. Z nich vyhovují podmínkám úlohy (po zkoušce dělitelnosti sedmi) jen druhé, sedmé a deváté číslo.

Shrneme-li všechny naše výpočty, podmínkám úlohy vyhovují čísla 921854367, 327854961, 741692385, 345692781, 381692745.

Úloha 58 *Posunování vagónu*

Při posunování získal vagón o hmotnosti 40 tun v okamžiku odpojení od lokomotivy nárazem rychlost 6,0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a pohyboval se dále po přímé vodorovné trati. Celková odporová síla je rovna 2 000 N.

a) V jaké nejmenší vzdálenosti od místa odpojení vagónu od lokomotivy může být na trati druhý vagón, aby nedošlo ke vzájemnému nárazu?
b) První vagón narazí do druhého za dobu 40 s po odpojení od lokomotivy. Oba vagóny se spojí a pojedou dále společně. V jaké vzdálenosti od místa spojení vagónů se soustava zastaví? Oba vagóny mají stejnou hmotnost, jejich zrychlení při pohybu $a =$ konst.
c) Porovnejte délku trati od odpojení prvního vagónu od lokomotivy do jeho zastavení v části a), b). Případný rozdíl vysvětlete.

(*Ivo Volf*)

Autorské řešení:

Označíme veličiny: hmotnosti vagónů $m_1 = m_2 = m = 40\,000$ kg, počáteční rychlost vagónu $v_0 = 6{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, odporová síla proti pohybu $F_0 = 2\,000$ N. Zrychlení vagónů při pohybu

$$a = -\frac{F_0}{m} = -0{,}05\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

a) První vagón zastaví za dobu

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} = 120\ \mathrm{s}$$

od okamžiku odpojení, ve vzdálenosti

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2|a|} = 360\ \mathrm{m}$$

od místa odpojení od lokomotivy. Druhý vagón musí být v nejmenší vzdálenosti $s_{\min} = 360$ m.

b) V okamžiku, kdy se oba vagóny spojí, se první vagón pohyboval po dobu $t_0 = 40$ s, měl rychlost $v_1 = v_0 + at_0 = 4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Při spojení došlo k dokonale nepružnému rázu. Obecně pro hybnosti dvou těles při takovém rázu platí

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

V našem případě je $v_2 = 0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pak

$$v = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}v_1.$$

Po spojení se bude soustava pohybovat dále rychlostí $v = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Působí na ni odporová síla $2F_0$, její hmotnost je $2m$, zrychlení je tedy opět a. Soustava se proto zastaví za dobu

$$t_2 = -\frac{v_1}{2a} = 40\ \mathrm{s},$$

dráha nutná k zastavení je $s_2 = 40$ m.

c) V prvním případě je délka trati nutná k zastavení prvního vagónu $s_1 = 360$ m od místa odpojení vagónu od lokomotivy. Ve druhém případě ujede vagón od místa odpojení od lokomotivy do místa spojení s druhým vagónem dráhu

$$s_0 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} = 200\ \mathrm{m}.$$

Od okamžiku spojení do okamžiku zastavení ujede dráhu $s_2 = 40$ m, celkem $s_3 = 240$ m. Rozdíl je $\Delta s = s_1 - s_3 = 120$ m. Při dokonale nepružném rázu při spojení obou vagónů dojde ke změně kinetické energie soustavy.

Stav soutěže po 58 soutěžních úlohách

Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 bodů
Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 36,5 bodů
Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 bodů
Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 bodů
Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 bodů
Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 bodů

Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G, Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 body
Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 body
Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 bod