Emil Calda

Umíte určit obvod trojúhelníku s nepřístupným vrcholem?

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 2, 25–27

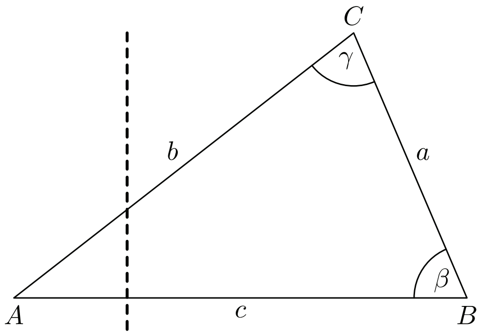
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146870

Umíte určit obvod trojúhelníku s nepřístupným vrcholem?

Emil Calda, MFF UK Praha

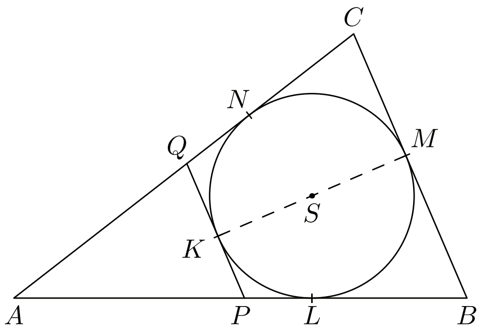
Abstract. The article describes how to derive the perimeter formula for a triangle with an inaccessible vertex without the use of sine law.

Představme si, že máme zjistit obvod trojúhelníku ABC, jehož vrchol A na obr. 1 leží mimo nákresnu, takže délky $c = |AB|$ a $b = |AC|$ neznáme; známá je pouze délka $|BC| = a$ a velikosti úhlů β, γ při vrcholech B, C. Uvidíme, že k vyřešení této úlohy budou stačit elementární geometrické poznatky, které se týkají zejména podobnosti trojúhelníků a vlastnosti tečen vedených z daného bodu ke kružnici. Stačí nám použít učebnici [1].



Obr. 1

Vyjdeme z obr. 2, v němž je sestrojena kružnice vepsaná trojúhelníku ABC; její střed a body, v nichž se dotýká stran AB, AC a BC, jsou po řadě označeny S, L, N a M. Bod K, který je průsečíkem této kružnice a přímky MS, je dotykovým bodem tečny t rovnoběžné se stranou BC. Tato tečna protíná strany AB a AC v bodech P, Q, o nichž předpokládáme, že na rozdíl od bodu A přístupné jsou, takže jejich vzájemnou vzdálenost $d = |PQ|$ můžeme považovat za známou.



Obr. 2

Všimněme si nyní, že trojúhelníky ABC a APQ jsou podobné. Označíme-li o obvod trojúhelníku ABC, o' obvod trojúhelníku APQ a k jejich koeficient podobnosti, platí pro délky jejich stran

$$b = k|AQ|, \quad c = k|AP|, \quad a = k|PQ| = kd$$

a pro jejich obvody

$$o = a + b + c = k(|PQ| + |AQ| + |AP|) = ko'.$$

Z rovností $a = kd$ a $o = ko'$ dostaneme vyjádření

$$o = \frac{o'a}{d},$$

z něhož se zdá, že jsme si mnoho nepomohli, protože o' je obvod trojúhelníku, jehož vrchol A je nepřístupný. My se však nevzdáme a pokusíme se nalézt ještě jinou závislost mezi obvody obou podobných trojúhelníků.

Z vlastnosti tečen vedených ke kružnici z daného bodu ležícího v její vnější oblasti podle obr. 2 plyne

$$|CN| + |BL| = |CM| + |MB| = |CB| = a,$$
$$|QN| + |PL| = |QK| + |PK| = |PQ|,$$

což znamená, že pro obvod o' platí

$$o' = o - a - (|CN| + |BL|) = o - 2a.$$

Dosazením tohoto výrazu pro o' do rovnosti $o = \frac{o'a}{d}$ dostaneme

$$o = \frac{(o - 2a)a}{d},$$

odkud je obvod o roven

$$o = \frac{2a^2}{a-d}.$$

Tím je úloha vyřešena.

Ověřme ještě tento výsledek pro případ, že úhly β a γ mají velikost 60°, tj. že se jedná o rovnostranný trojúhelník o straně délky a. Z obr. 2 je zřejmé, že v tomto případě je AM těžnice, takže je

$$|SM| = |KS| = |AK|,$$

což znamená, že pro výše zmíněný koeficient podobnosti trojúhelníků ABC a APQ platí $k = 3$. Je tedy $d = \frac{a}{3}$ a pro obvod rovnostranného trojúhelníku ABC dostaneme

$$o = \frac{2a^2}{a-d} = 3a,$$

což vskutku platí.

Na závěr ještě poznámka. Úlohu by bylo možné vyřešit také jinak, a to s použitím vlastností goniometrických funkcí a sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Tato věta umožňuje ze znalosti velikosti úhlů β a γ a délky strany a určit délky stran b, c; podle ní platí

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}, \qquad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)},$$

neboť $\sin\alpha = \sin(180^\circ - (\beta+\gamma)) = \sin(\beta+\gamma)$.

Literatura

[1] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Prometheus, Praha, 2004.