Ľubomíra Dvořáková; Marie Dohnalová

Mince zajímají nejen numismatiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 62 (2017), No. 2, 110–120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146814

Mince zajímají nejen numismatiky

Ľubomíra Dvořáková, Marie Dohnalová, Praha

Abstrakt. V článku představíme dva druhy úloh týkajících se platby mincemi, které souvisejí s optimalitou počtu použitých mincí. V případě problému platby (říká se také rozměňování — anglicky *change making problem*), tj. skládání částky z mincí bez možnosti vracení, jsou úlohy spojené s optimalitou dobře prozkoumané. Analogické úlohy zformulujeme pro směnu, tj. skládání částky z mincí s možností vracení. Zde zůstává naopak řada problémů otevřená.

Úvod

Už jste někdy přemýšleli o výhodách a nevýhodách hodnot českých mincí? Platíme každou částku relativně nízkým počtem mincí? Lze takové výhodné platby provádět hladovým algoritmem? Nevyplatilo by se do českého systému nějakou minci přidat? Bylo výhodné ukončit v roce 2008 platnost padesátníku? A co když porovnáme české koruny s americkými centy, eury nebo některými exotickými měnami? Budou v nějakých ohledech české koruny výhodnější? Tyto a podobné otázky si klade první z autorek [2]. Ke studiu této problematiky byl inspirací článek M. Klebera a kol. [6].

V tomto textu se ovšem téměř odpoutáme od běžně používaných systémů mincí a budeme studovat problematiku obecněji. V první části se budeme věnovat reprezentaci částek při platbě, zavedeme a prozkoumáme optimální reprezentaci a s ní související optimální systémy mincí. Dále se budeme zabývat hladovou reprezentací a s ní spjatými optimálními hladovými systémy. Vyšetříme vztah mezi optimálními a hladovými reprezentacemi u běžně používaných systémů mincí. Dále uvedeme některé výsledky týkající se výpočetní složitosti nejznámějších platebních problémů.

Ve druhé části definujeme směnu a zformulujeme pro ni analogické pojmy jako pro platbu. Uvedeme, které problémy zůstávají v případě směny otevřené, a zmíníme, jaké výsledky z teorie numeračních systémů by mohly pomoci při jejich řešení.

1. Platba

Platbou rozumíme, vágně řečeno, skládání částky pomocí mincí o předepsaných hodnotách.

Definice 1. Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \dots, e_D \in \mathbb{N}$ (mince), kde $1 = e_1 < e_2 < \dots < e_D$, a dále $n \in \mathbb{N}_0$ (částka). Pokud $n = \sum_{i=1}^{D} a_i e_i$, kde $a_i \in \mathbb{N}_0$, pak konečnou posloupnost $(a_D, \dots, a_2, a_1)$ nazveme *reprezentací částky n (při platbě)*.[1] Říkáme, že tato reprezen-

[1] Často budeme pro jednoduchost nazývat reprezentací přímo zápis ve tvaru $\sum_{i=1}^{D} a_i e_i$.

Doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D., Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2, e-mail: `lubomira.dvorakova@fjfi.cvut.cz`, Marie Dohnalová, gymnázium EDUCAnet Praha, Roztylská 1, 140 00 Praha 4, e-mail: `marie.dohnalova21@gmail.com`

tace je *optimální* (nebo *minimální*), pokud součet koeficientů $\sum_{i=1}^{D} a_i$ je minimální mezi všemi reprezentacemi částky n.

Příklad 1. Uvažujeme-li české mince o hodnotách $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 5$, $e_4 = 10$, $e_5 = 20$ a $e_6 = 50$ korun, pak

$$30 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 = 30 \cdot 1,$$

tedy $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ a $(0, 0, 0, 0, 0, 30)$ jsou příklady reprezentací částky 30 Kč, přičemž první z nich je optimální. Jak uvidíme za chvíli, v případě českých korun má každá částka jedinou optimální reprezentaci. Nemusí tomu tak ovšem být vždy. Máme-li mince o hodnotách $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 4$, potom

$$5 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2,$$

tedy optimální reprezentace částky 5 jsou $(1, 0, 0, 1)$ i $(0, 1, 1, 0)$.

Pro zajištění jednoznačnosti optimální reprezentace se obvykle definice doplňuje tak, že optimání reprezentací rozumíme lexikograficky největší[2] z reprezentací, které obsahují minimální počet mincí. V předchozím příkladě je tedy optimální reprezentací částky 5 při takto rozšířené definici reprezentace $(1, 0, 0, 1)$.

Přirozenou úlohou je hledání systémů mincí, kde průměrný počet mincí použitých v optimálních reprezentacích je minimální. Zavedeme takové systémy formálně.

Definice 2. Mějme $D \in \mathbb{N}$ a dále $N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < < e_2 < \cdots < e_D$, nazveme *optimální (pro platbu)*, jestliže minimalizuje hodnotu výrazu

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\text{počet mincí v optimální reprezentaci } n \text{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Minimální hodnotu výše uvedeného výrazu označíme $P_{\text{opt}}(D, N)$.

Autoři [6] v běžně používaných systémech mincí volí za N hodnotu nejnižší bankovky. Pro české mince je tedy $N = 100$, pro americké centy taktéž $N = 100$ (kovový dolar je spíše raritou). My se této konvence přidržíme. (Samozřejmě by bylo možné nerozlišovat mince a bankovky a např. pro český peněžní systém položit $N = 5000$.)

Právě fakt, že pro čtyři mince a částky 0 až 99 je optimální systém složen z mincí o hodnotách $1, 5, 18, 25$ (viz tab. 1), vysvětluje název článku *What this country needs is an 18¢ piece* [6]. V americkém systému mincí o hodnotách $1, 5, 10, 25$ centů by pro zajištění optimality stačilo nahradit desetník hodnotou 18 ¢. Dá se ale očekávat, že k tomu nikdo jiný než matematici nebude svolný.

Hledat optimální reprezentace částek není obvykle jednoduchá úloha. K její výpočetní složitosti se zanedlouho dostaneme. Představme nyní jeden typ reprezentací, které se hledají snadno.

Definice 3. Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, a dále $n \in \mathbb{N}_0$. Reprezentaci $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme *hladovou reprezentací částky n (při platbě)*, pokud je získaná následujícím hladovým algoritmem:

[2] Říkáme, že posloupnost $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ je lexikograficky větší než $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$, pokud jsou tyto posloupnosti navzájem různé a nejvyšší index j, kde se liší, splňuje $a_j > b_j$.

počet mincí D	hodnoty	$P_{\text{opt}}(D, 100)$
3	1, 12, 19	5,15
4	1, 5, 18, 25	3,89
4	1, 5, 18, 29	3,89
5	1, 5, 16, 23, 33	3,29
6	1, 4, 6, 21, 30, 37	2,92
6	1, 5, 8, 20, 31, 33	2,92

Tab. 1. Optimální systémy pro platbu částek 0 až 99 ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané počítačovým programem.

1. Položíme $i = D, a_D = \ldots = a_1 = 0$.
2. Vypočítáme celočíselný podíl $k = \lfloor \frac{n}{e_i} \rfloor$ a položíme $a_i = k$.
3. Určíme zbytek $n - a_i e_i$.
4. Pokud je zbytek nenulový, položíme n rovno zbytku, snížíme i o jedničku a pokračujeme bodem 2, jinak jsme našli hladovou reprezentaci.

Hladová reprezentace je vždy jediná. Z popsaného algoritmu je vidět, že hladová reprezentace je lexikograficky největší ze všech reprezentací.

Příklad 2. Uvažujeme-li české koruny, pak hladovým algoritmem dostaneme $30 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10$, tj. hladová reprezentace částky 30 je rovna $(0, 1, 1, 0, 0, 0)$ a splývá s optimální reprezentací. Tato situace nastává pro všechny částky, což lze ověřit pomocí Pearsonova algoritmu (viz část 1.1).

V jiných systémech mincí ale nemusí být optimální a hladová reprezentace vždy totožné. Například pro optimální systém čtyř mincí $e_1 = 1$, $e_2 = 5$, $e_3 = 18$, $e_4 = 25$ máme $36 = 2 \cdot 18 = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1$, přičemž první reprezentace $(0, 2, 0, 0)$ je optimální a druhá $(1, 0, 2, 1)$ je hladová.

Opět se nabízí úloha hledat systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v hladových reprezentacích je minimální. Definujme takové systémy formálně.

Definice 4. Mějme $D, N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, nazveme *optimální hladový (pro platbu)*, jestliže minimalizuje hodnotu výrazu

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\text{počet mincí v hladové reprezentaci } n \text{ pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Minimální hodnotu výše uvedeného výrazu označíme $P_{\text{hlad}}(D, N)$.

V tab. 2 uvádíme optimální hladové systémy pro 3 až 6 mincí.

Zajímavou úlohou je zkoumat systémy mincí, v nichž splývá optimální a hladová reprezentace každé částky. V příkladu 2 jsme zmiňovali, že pro české koruny tomu

počet mincí D	**hodnoty**	$\boldsymbol{P_{\mathrm{hlad}}(D, 100)}$
3	1, 5, 22 (23)	5,26
4	1, 3, 11, 37 (38)	4,10
5	1, 3, 7, 16, 40 (41)	3,46
5	1, 3, 7, 18, 44 (45)	3,46
5	1, 3, 8, 20, 44 (45)	3,46
6	1, 2, 5, 11, 25, 62 (63)	3,13
6	1, 2, 5, 13, 29, 64 (65)	3,13

Tab. 2. Optimální hladové systémy pro platbu částek 0 až 99 ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané počítačovým programem. Když existuje více optimálních hladových systémů a liší se pouze v nejvyšší minci, uvádíme hodnotu různých variant nejvyšší mince v závorce. Žádný ze systémů není zároveň optimální.

tak je, ale uváděli jsme zároveň příklad systému, kde tomu tak není. V dalším textu představíme Pearsonův algoritmus, který umožňuje pro daný systém mincí efektivně rozhodnout, zda se optimální a hladová reprezentace vždy shodují. Právě tento algoritmus nám umožnil prozkoumat chování běžně používaných systémů mincí. Vyšetřovali jsme systémy mincí celkem 195 států (těch, které USA uznávají za nezávislé státy) a zdá se, že podmínka, aby optimální reprezentace šlo počítat hladovým algoritmem, tj. aby optimální a hladové reprezentace všech částek splývaly, hraje důležitou roli při volbě systémů mincí. K neshodě optimálních a hladových reprezentací dochází pouze pro:

- západoafrický frank (např. Benin, Burkina Faso, Pobřeží slonoviny): mince jsou v hodnotách $1, 5, 10, 25, 50, 100, 200, 250$ a 500 franků a k neshodě dochází poprvé pro částku 400 franků, jejíž optimální reprezentace je $2 \cdot 200$ a hladová reprezentace je $1 \cdot 250 + 1 \cdot 100 + 1 \cdot 50$;

- jamajský dolar: mince jsou v hodnotách $1, 10, 25, 50$ centů a $1, 5, 10, 20$ dolarů a k neshodě dochází poprvé pro částku 30 centů, jejíž optimální reprezentace je $3 \cdot 10$ a hladová reprezentace je $1 \cdot 25 + 5 \cdot 1$;

- malgašský ariar (Madagaskar): mince jsou v hodnotách 1 a 2 iraimbilanja a $1, 2, 4, 5, 10, 20, 50$ ariary, přičemž 1 ariar $=$ 5 iraimbilanja, a k neshodě dochází poprvé pro částku 8 ariarů, jejíž optimální reprezentace je $2 \cdot 4$ a hladová reprezentace je $1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$;

- somoni (Tádžikistán): mince jsou v hodnotách $1, 2, 5, 10, 20, 25, 50$ diramů a $1, 3, 5$ somoni, přičemž 1 somoni $=$ 100 diramů, a k neshodě dochází poprvé pro částku 40 diramů, jejíž optimální reprezentace je $2 \cdot 20$ a hladová reprezentace je $1 \cdot 25 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5$.

1.1. Složitost některých platebních problémů

Hledat optimální reprezentace a optimální systémy mincí je časově náročná úloha. O výpočetní složitosti těchto problémů jsou známy následující skutečnosti (detaily jsou k nalezení v [6]):

Otázka: Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, a $n \in \mathbb{N}$. Jak těžké je najít optimální reprezentaci n?

Odpověď: Pokud za velikost vstupu považujeme délku binárního zápisu n, pak není znám rychlý algoritmus — Lueker [8] dokázal, že tento problém je NP-těžký. Pokud ovšem za velikost vstupu považujeme přímo číslo n, pak pomocí dynamického programování získáme algoritmus výpočetní složitosti $\mathcal{O}(nD)$ s paměťovou náročností $\mathcal{O}(n)$ operující s čísly velikosti $\mathcal{O}(n)$ (např. Wright [10]).

Otázka: Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, a $n \in \mathbb{N}$. Jak těžké je rozhodnout, zda je stejná optimální a hladová reprezentace n?

Odpověď: Podobně jako v předchozí otázce záleží na tom, zda uvažujeme délku binárního zápisu či velikost n. V prvním případě není znám rychlý algoritmus – Kozen a Zachs [7] dokázali, že tento problém je coNP-úplný. Ve druhém případě samozřejmě z předchozí odpovědi plyne, že pomocí dynamického programování získáme algoritmus výpočetní složitosti $\mathcal{O}(nD)$ s paměťovou náročností $\mathcal{O}(n)$ operující s čísly velikosti $\mathcal{O}(n)$.

Otázka: Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$. Jak těžké je zjistit, zda je stejná optimální a hladová reprezentace každé částky $n \in \mathbb{N}$? (Takovým systémům mincí se někdy říká *kanonické*.)

Odpověď: Existuje Pearsonův algoritmus, který provádí $\mathcal{O}(D^3)$ aritmetických operací s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$. Tato odpověď možná překvapí. Jsou k tomu dva důvody. Algoritmus neklade žádné omezení na reprezentované částky n. A dále je zajímavé, že rozhodování pro jednu konkrétní částku n (viz předchozí otázku) je složitější než rozhodování pro všechny částky.

Popišme stručně, jak Pearsonův algoritmus [9] funguje:

- Pokud nesplývá pro každou částku optimální a hladová reprezentace, pak existují $i, j \in \mathbb{N}$, kde $1 \leq j \leq i < D$, taková, že $a_j, \ldots, a_i$ jsou koeficienty určené hladovou reprezentací $e_{i+1} - 1 = \sum_{k=1}^{i} a_k e_k$ a optimální reprezentace nejmenšího protipříkladu je tvaru:

$$n = \begin{cases} a_i e_i + \cdots + a_{j+1} e_{j+1} + (a_j + 1) e_j & \text{pro } j < i, \\ (a_j + 1) e_j & \text{pro } j = i. \end{cases} \tag{1}$$

- Testujeme tedy všechna i, j připadající v úvahu a hledáme nejmenší n ve tvaru (1), pro které počet mincí v hladové reprezentaci je větší než počet mincí v reprezentaci (1), tj. než $(a_j + 1) + a_{j+1} + \cdots + a_i$. Pokud takové n najdeme, pak jde o nejmenší částku, jejíž optimální a hladová reprezentace nesplývá. Pokud takové n nenajdeme, pak splývají optimální a hladové reprezentace všech částek.

Příklad 3. V příkladu 2 jsme ukazovali, že v optimálním systému čtyř mincí $e_1 = 1$, $e_2 = 5$, $e_3 = 18$, $e_4 = 25$ nejsou optimální a hladová reprezentace vždy totožné. Konkrétně jsme jako protipříklad uváděli částku 36 centů. Nyní vyšetříme Pearsonovým algoritmem, zda je tento protipříklad minimální.

Máme $1 \leq j \leq i < 4$, tedy je třeba uvažovat uspořádané dvojice $(j, i) \in \{(1,1), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3)\}$. Podtržením jsme zvýraznili kandidáty na protipříklad — částku n a její eventuální optimální reprezentaci:

- Pro $i = 1$ máme hladovou reprezentaci $e_{i+1} - 1 = 4 = 4 \cdot 1$, tj. $a_i = 4$. Zřejmě platí $j = 1$, tudíž $a_j = a_i = 4$ a $\underline{n = 5 = 5 \cdot 1}$.
- Pro $i = 2$ máme hladovou reprezentaci $e_{i+1} - 1 = 17 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1$, tj. $a_i = 3$. Dále rozlišíme dva případy:

$$j = \begin{cases} 1, & \text{pak } a_i = a_{j+1} = 3, a_j = 2 \text{ a } \underline{n = 18 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 1}, \\ 2, & \text{pak } a_i = a_j = 3 \text{ a } \underline{n = 20 = 4 \cdot 5}. \end{cases}$$

- Pro $i = 3$ máme hladovou reprezentaci $e_{i+1} - 1 = 24 = 1 \cdot 18 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1$, tj. $a_i = 1$. Dále rozlišíme tři případy:

$$j = \begin{cases} 1, & \text{pak } a_i = a_{j+2} = 1, a_{j+1} = 1, a_j = 1 \text{ a } \underline{n = 25 = 1 \cdot 18 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1}, \\ 2, & \text{pak } a_i = a_{j+1} = 1, a_j = 1 \text{ a } \underline{n = 28 = 1 \cdot 18 + 2 \cdot 5}, \\ 3, & \text{pak } a_i = a_j = 1 \text{ a } \underline{n = 36 = 2 \cdot 18}. \end{cases}$$

Pouze v případech částek 28 a 36 používá hladová reprezentace více mincí než reprezentace z výše uvedeného seznamu kandidátů. Hladová reprezentace částky 28 je totiž rovna $1 \cdot 25 + 3 \cdot 1$, tedy používá čtyři mince, zatímco reprezentace $28 = 1 \cdot 18 + 2 \cdot 5$ používá tři mince a je optimální. Částka 28 je tudíž nejmenší částkou, pro niž hladová a optimální reprezentace nesplývají.

Příklad 4. Ukažme si využití Pearsonova algoritmu k zodpovězení otázky, zda splývají optimální a hladové reprezentace všech částek pro systém mincí v hodnotách $1, b, b^2, \ldots, b^{D-1}$, kde $b > 1$. Pokud by existovala částka, pro niž se liší optimální a hladová reprezentace, pak by nejmenší takový protipříklad měl tvar:

$$n = \begin{cases} (b-1)e_i + \cdots + (b-1)e_{j+1} + be_j & \text{pro } j < i, \\ be_j & \text{pro } j = i, \end{cases} \tag{2}$$

protože hladová reprezentace $e_{i+1} - 1 = b^i - 1$ je $\sum_{k=0}^{i-1} (b-1)b^k = \sum_{k=1}^{i} (b-1)e_k$. Není těžké si rozmyslet, že $n = e_{i+1}$. Odtud ale plyne, že hladová (i optimální) reprezentace n obsahuje jedinou minci, a to e_{i+1}, což je méně než $b + (b-1)(i-j)$ (počet mincí v reprezentaci (2)). Proto optimální i hladové reprezentace všech částek splývají.

Ještě efektivnější algoritmus výpočetní složitosti $\mathcal{O}(D^2)$ pracující s čísly velikosti $\mathcal{O}(e_D)$ rozhodující, zda je daný systém mincí kanonický, je popsán v [3]. Rozhodne ovšem pouze pro systémy, pro něž minimální částka mající odlišnou optimální a hladovou reprezentaci je velikosti alespoň e_D. Dále jsou zde popsány nutné a postačující podmínky rozhodující o tom, zda daný systém čtyř či pěti mincí je kanonický. Postačující podmínky pro kanoničnost systémů o libovolném počtu mincí jsou uvedeny v [1] a [3].

2. Směna

Dalším problémem souvisejicím s placením mincemi je také směna, kdy připouštíme i možnost vracení.

Definice 5. Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, a $n \in \mathbb{N}_0$. Pokud $n = \sum_{i=1}^{D} a_i e_i$, kde $a_i \in \mathbb{Z}$, pak $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme *reprezentací částky* n *(při směně)*. Říkáme, že tato reprezentace je *optimální*, pokud $\sum_{i=1}^{D} |a_i|$ je minimální mezi všemi reprezentacemi částky n.

Příklad 5. Optimální reprezentace dané částky při směně používá samozřejmě méně nebo stejně mincí jako optimální reprezentace této částky při platbě. Např. pro české koruny máme:

$$8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 10 + (-1) \cdot 2,$$

přičemž první reprezentace je optimální při platbě a potřebuje tři mince a druhá je optimální při směně a potřebuje jen dvě mince.

Optimální reprezentace nemusí být jednoznačná. Jednak může nejednoznačnost plynout už z nejednoznačnosti při platbě. Navíc může nejednoznačnost vzniknout připuštěním širší množiny koeficientů. Např. pro české mince je optimální reprezentace každé částky při platbě jednoznačná, ale optimální reprezentace částky 15 při směně má dvě možné podoby:

$$15 = 1 \cdot 20 + (-1) \cdot 5 = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5.$$

Navíc už není jasné, proč upřednostnit mezi všemi optimálními reprezentacemi lexikograficky největší. Proč by např. pro mince 1, 2, 98, 100 měla mít přednost reprezentace $2 = 1 \cdot 100 + (-1) \cdot 98$ před $2 = 2 \cdot 1$?

Poznamenejme, že pro optimální i hladovou reprezentaci při platbě platí následující tvrzení [9]: Jsou-li $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ a $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$ posloupnosti s členy z $\mathbb{N}_0$, $a_i \geq b_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, D\}$ a je-li $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ optimální, resp. hladová reprezentace, potom $(b_D, \ldots, b_2, b_1)$ je také optimální, resp. hladová reprezentace. Tato vlastnost se při směně nezachovává a není známa žádná podobná vlastnost.

Analogicky jako v případě platby nás mohou zajímat systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v optimálních reprezentacích je minimální.

Definice 6. Mějme $D, N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, nazveme *optimální (pro směnu)*, jestliže minimalizuje hodnotu výrazu

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\text{počet mincí v optimální reprezentaci } n \text{ při směně pro mince } e_1, e_2, \ldots, e_D).$$

Minimální hodnotu výše uvedeného výrazu označíme $P_{\text{opt-směna}}(D, N)$.

V tab. 3 uvádíme optimální systémy pro směnu pro 3 až 6 mincí.

Opět platí, že pro hledání optimální reprezentace nemáme k dispozici rychlý algoritmus, proto se pokusíme najít jednoduchou reprezentaci, která se nabízí jako analogie hladové reprezentace.

počet mincí D	**hodnoty**	$\boldsymbol{P_{\text{opt-směna}}(D, 100)}$
3	1, 18, 29	3,96
3	1, 20, 28	3,96
4	1, 21, 26, 35	3,12
5	1, 7, 25, 42, 47	2,74
5	1, 9, 22, 42, 48	2,74
5	1, 11, 27, 44, 47	2,74
5	1, 11, 31, 44, 48	2,74
5	1, 11, 34, 40, 49	2,74
5	1, 15, 26, 43, 49	2,74
5	1, 26, 30, 40, 47	2,74
5	1, 27, 31, 36, 48	2,74
6	1, 8, 21, 38, 44, 49	2,49

Tab. 3. Optimální systémy pro směnu částek 0 až 99 ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané počítačovým programem.

Definice 7. Mějme $D \in \mathbb{N}$, $e_1, e_2, \cdots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \cdots < e_D$, a $n \in \mathbb{N}_0$. Reprezentaci $(a_D, \ldots, a_2, a_1)$ nazveme *hladovou reprezentací částky n (při směně)*, pokud je získaná následujícím zobecněným hladovým algoritmem:

1. Položíme $a_D = \ldots = a_1 = 0$ a $e_{D+1} = +\infty$.
2. Pokud $n = 0$, máme hladovou reprezentaci n a končíme.
3. Je-li n kladné, najdeme $j \in \{1, \ldots, D\}$ takové, že $e_j \leq n \leq e_{j+1}$, a rozlišíme tři případy:
    - pokud $n - e_j < e_{j+1} - n$, zvětšíme a_j o jedničku a zbytek položíme roven $n - e_j$,
    - pokud $n - e_j > e_{j+1} - n$, zvětšíme a_{j+1} o jedničku a zbytek položíme roven $n - e_{j+1}$,
    - pokud $n - e_j = e_{j+1} - n$, pak buď zvětšíme a_j o jedničku a zbytek bude $n - e_j$, nebo zvětšíme a_{j+1} o jedničku a zbytek bude $n - e_{j+1}$.
4. Je-li n záporné, najdeme $j \in \{1, \ldots, D\}$ takové, že $e_j \leq |n| \leq e_{j+1}$, a rozlišíme tři případy:
    - pokud $|n| - e_j < e_{j+1} - |n|$, zmenšíme a_j o jedničku a zbytek položíme roven $n + e_j$,
    - pokud $|n| - e_j > e_{j+1} - |n|$, zmenšíme a_{j+1} o jedničku a zbytek položíme roven $n + e_{j+1}$,
    - pokud $|n| - e_j = e_{j+1} - |n|$, pak buď zmenšíme a_j o jedničku a zbytek bude $n + e_j$, nebo zmenšíme a_{j+1} o jedničku a zbytek bude $n + e_{j+1}$.
5. Položíme n rovno zbytku a pokračujeme bodem 2.

Zobecněný hladový algoritmus v každém kroku reprezentuje absolutní hodnotu zbývající částky nejbližší větší či menší mincí (na rozdíl od hladového algoritmu, který v každém kroku bere nejbližší menší minci).

Příklad 6. Hladová reprezentace při směně už nemusí být jednoznačná. Uvažujeme-li například české koruny, pak hladové reprezentace částky 35 jsou hned čtyři:

$$\begin{aligned}
35 &= 1 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 5,\\
35 &= 2 \cdot 20 + (-1) \cdot 5,\\
35 &= 1 \cdot 50 + (-1) \cdot 10 + (-1) \cdot 5,\\
35 &= 1 \cdot 50 + (-1) \cdot 20 + 1 \cdot 5.
\end{aligned}$$

Čtenář si ale snadno dokáže (třeba pomocí indukce), že pro danou částku obsahuje každá hladová reprezentace stejný počet mincí.

Zatímco každá reprezentace při platbě je zároveň reprezentací při směně, a tudíž optimální reprezentace dané částky při směně používá maximálně tolik mincí jako optimální reprezentace této částky při platbě, pro hladovou reprezentaci už toto není pravda. Existují systémy mincí takové, že některé částky obsahují v hladové reprezentaci při směně více mincí než v hladové reprezentaci při platbě.

Např. pro systém mincí $e_1 = 1$, $e_2 = 3$, $e_3 = 5$, $e_4 = 10$ máme

$$\begin{aligned}
8 &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3,\\
8 &= 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 1 = 1 \cdot 10 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1,
\end{aligned}$$

přičemž první reprezentace obsahuje dvě mince a je hladová při platbě a další dvě obsahují tři mince a jsou hladové při směně.

Opět jsme vyšetřovali systémy mincí, kde průměrný počet mincí použitých v hladových reprezentacích při směně je minimální.

Definice 8. Mějme $D, N \in \mathbb{N}$. Pak systém $e_1, e_2, \dots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \dots < e_D$, nazveme *optimální hladový (pro směnu)*, jestliže minimalizuje hodnotu výrazu

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\text{počet mincí v hladové reprezentaci } n \text{ při směně pro mince } e_1, e_2, \dots, e_D).$$

Minimální hodnotu výše uvedeného výrazu označíme $P_{\text{hlad-směna}}(D, N)$.

V tab. 4 uvádíme optimální hladové systémy pro směnu pro 3 až 6 mincí.[3]

Podobně jako v případě platby by nás mohlo zajímat, kdy splývá optimální a hladová reprezentace při směně. Protože nyní není ani optimální ani hladová reprezentace

[3]Údaje ve všech tabulkách byly získány pomocí počítačových programů v jazyce Java. V případě optimálních hladových systémů trval výpočet pro 3 až 6 mincí řádově minuty. Pro optimální systémy byly výsledky pro 3 a 4 mince získány v řádu minut, pro 5 mincí v řádu desítek minut, pro 6 mincí v řádu hodin. Pro hledání optimálních reprezentací bylo využito dynamické programování založené na faktu, že chceme-li získat optimální reprezentaci částky n, bude to optimální reprezentace některé z částek $n - e_i$, kde $i \in \{1, \dots, D\}$, po přidání mince v hodnotě e_i. Postupně jsme tedy přidávali po jedné minci k již nalezeným optimálním reprezentacím a získávali tak optimální reprezentace vyšších částek, přičemž stačilo zaznamenávat počty mincí v reprezentacích.

počet mincí D	hodnoty	$P_{\text{hlad-směna}}(D, 100)$
3	1, 6, 31 (32, 33)	4,14
4	1, 4, 13, 47 (48)	3,31
4	1, 4, 14, 47	3,31
4	1, 4, 15, 47 (48)	3,31
5	1, 2, 7, 23, 74	2,92
6	1, 2, 7, 12, 41, 70 (80)	2,69
6	1, 2, 7, 12, 51, 80	2,69

Tab. 4. Optimální hladové systémy pro směnu částek 0 až 99 ($N = 100$) pro počet mincí $D \in \{3, 4, 5, 6\}$ získané počítačovým programem. Když existuje více optimálních hladových systémů a liší se pouze v nejvyšší minci, uvádíme hodnotu různých variant nejvyšší mince v závorce.

dána jednoznačně, je nejprve třeba upřesnit, co budeme vlastně vyšetřovat. Uvažujme $D \in \mathbb{N}$, systém $e_1, e_2, \ldots, e_D \in \mathbb{N}$, kde $1 = e_1 < e_2 < \ldots < e_D$, a částku $n \in \mathbb{N}_0$. Shrňme si, co víme, a závěrem z poznatků odvodíme otázky ke zkoumání.

- Je zřejmé z definice 6, že každá optimální reprezentace n při směně obsahuje stejný počet mincí; označme jej K.
- Zmiňovali jsme, že každá hladová reprezentace n při směně obsahuje stejný počet mincí; označme jej M.
- Pokud $K = M$, potom každá hladová reprezentace n je zároveň optimální.
- Pokud $K < M$, potom žádná hladová reprezentace n není optimální.

Nyní můžeme zkoumat, který z následujících případů pro částku n platí:

1. $K = M$ a existuje optimální reprezentace, která není hladová (řekneme, že optimální a hladové reprezentace částky n *splývají částečně*).
2. $K = M$ a navíc množina optimálních reprezentací a množina hladových reprezentací jsou stejné (optimální a hladové reprezentace částky n *splývají zcela*).
3. $K < M$ (optimální a hladové reprezentace částky n *nesplývají*).

Příklad 7. Uvažujme mince $e_1 = 1$, $e_2 = 3$, $e_3 = 5$, $e_4 = 10$. Potom $8 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3$ je optimální reprezentace při směně, která není hladová při směně ($K = 2$). Dále $8 = 1 \cdot 10 + (-2) \cdot 1$ je hladová reprezentace při směně, která není optimální při směně ($M = 3$). Pro částku 8 nastává tedy případ 3.

Příklad 8. Uvažujme mince $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $e_3 = 3$, $e_4 = 5$, $e_5 = 8$. Potom $7 = 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 1$ je hladová reprezentace při směně, která je zároveň optimální při směně ($K = M = 2$). Zároveň ale $7 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2$ je optimální reprezentace při směně, která není hladová při směně. Pro částku 7 nastává případ 1.

2.1. Otevřené problémy pro směnu

Článek zakončíme shrnutím otázek týkajících se směny, na něž nám nejsou známy odpovědi.

1. Existuje analogie Pearsonova algoritmu pro směnu? Tedy existuje efektivní algoritmus, který pro daný systém rozhodne, zda splývají optimální a hladové reprezentace všech částek (ať už zcela, nebo částečně)?
2. Splývá optimální a hladová reprezentace každé částky při směně:
   (a) v systému mincí 1, b, b^2, $\ldots$, b^{D-1}, kde $b > 1$ (ať už zcela, nebo částečně)? Algoritmus pro hledání jedné optimální reprezentace každé částky je známý [5].
   (b) v systému mincí v hodnotách Fibonacciho čísel 1, 2, 3, 5, 8, ... (a to částečně, protože zcela nesplývají, viz příklad 8)? Algoritmus pro hledání jedné optimální reprezentace každé částky je známý [4].
3. Lze najít postup pro výpočet reprezentace s vlastnostmi lepšími než hladová reprezentace? Lepšími vlastnostmi rozumíme:
   (a) Reprezentace bude vždy používat menší nebo stejný počet mincí jako hladová reprezentace při platbě dané částky.
   (b) Postup pro získání reprezentace bude jednoznačný a efektivně proveditelný.

Poděkování. Děkujeme recenzentům za podnětné připomínky, jež pomohly podstatně zlepšit srozumitelnost článku, a to zejména v oblasti týkající se výpočetní složitosti.

L i t e r a t u r a

[1] Adamaszek, M., Niewiarowska, A.: *Combinatorics of the change-making problem.* Eur. J. Comb. *31* (2010), 47–63.
[2] Balková, Ľ., Šťastná, A.: *Jsou české mince optimální?* Rozhledy matematicko-fyzikální *90* (2015), 14–22.
[3] Cai, X.: *Canonical coin systems for change-making problems.* International Conference on Hybrid Intelligent Systems *1* (2009), 499–504.
[4] Heuberger, C.: *Minimal expansions in redundant number systems: Fibonacci bases and greedy algorithms.* Period. Math. Hung. *49* (2004), 65–89.
[5] Heuberger, C., Prodinger, H.: *On minimal expansions in redundant number systems: Algorithms and quantitative analysis.* Computing *66* (2001), 377–393.
[6] Kleber, M., Shallit, J., Vakil, R.: *What this country needs is an 18¢ piece.* Math. Intell. *25* (2003), 20–23.
[7] Kozen, D., Zaks, S.: *Optimal bounds for the change-making problem.* Theoret. Comput. Sci. *123* (1994), 377–388.
[8] Lueker, G. S.: *Two NP-complete problems in nonnegative integer programming.* Technical Report TR-178, Computer Science Laboratory, Department of Electrical Engineering, Princeton University, March 1975.
[9] Pearson, D.: *A polynomial-time algorithm for the change-making problem.* Oper. Res. Lett. *33* (2005), 231–234.
[10] Wright, J. W.: *The change-making problem.* J. Assoc. Comput. Mach. *22* (1975), 125–128.