Rozhledy matematicko-fyzikální

Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 1, 56–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146742

Naše soutěž

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže.* Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *30. června 2017* na adresu redakce.

Úloha 61 Je dán trojúhelník ABC s opsanou kružnicí k. Bodem A vedeme přímku f rovnoběžnou s BC, bodem B tečnu t_B ke k a bodem C tečnu t_C ke k. Průsečík přímek t_B a f označíme P, průsečík přímek t_C a f označíme Q. Dokažte, že trojúhelníky ABC, PAB a QCA jsou podobné.
(*Šárka Gergelitsová*)

Úloha 62 *Spojování rezistorů*

Máme k dispozici tři rezistory o odporech $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$. Zjistěte všechny možnosti zapojení těchto rezistorů a vypočtěte výsledné odpory těchto zapojení. Na základě vypočtených hodnot seřaďte jednotlivá zapojení sestupně od zapojení s největším odporem. (*Miroslava Jarešová*)

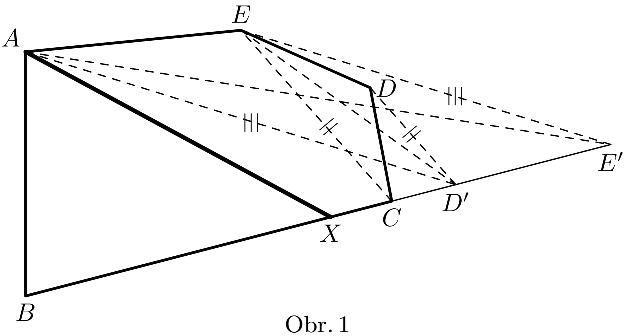
Řešení úloh z čísla 2/2016

Úloha 55 Je dán libovolný konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na jeho hranici najděte bod X tak, aby úsečka AX rozdělila pětiúhelník na dvě části se stejným obsahem. (*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Bod X může ležet na jedné ze stran BC, CD, DE.

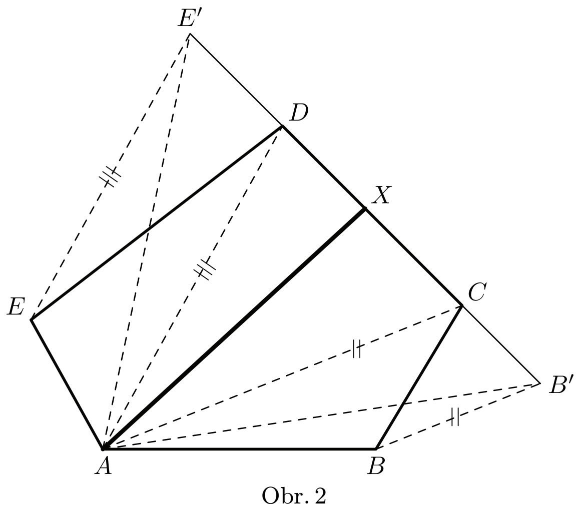
1. Vyzkoušíme, zda bod X neleží na straně BC. Na obr. 1 leží body B, C, D', E' v přímce a je $CE \parallel DD'$, $AD' \parallel EE'$. Jelikož jsou obsahy trojúhelníků ECD a ECD' stejné, jsou stejné i obsahy pětiúhelníku $ABCDE$ a čtyřúhelníku $ABD'E$. A analogicky jelikož jsou stejné obsahy

trojúhelníků $AD'E$ a $AD'E'$, jsou stejné obsahy čtyřúhelníku $ABD'E$ a trojúhelníku ABE'. Bod X je pak středem úsečky AE'. Leží-li bod X na straně BC, je to hledaný bod, kdy úsečka AX dělí obsah pětiúhelníku $ABCDE$ na polovinu.



Obr. 1

2. Vyzkoušíme, zda bod X neleží na straně CD. Na obr. 2 leží body B', C, D, E' v přímce a je $AC \parallel BB'$, $AD \parallel EE'$. Jelikož jsou obsahy trojúhelníků ABC a $AB'C$ stejné a také obsahy trojúhelníků ADE a ADE' jsou stejné, jsou stejné obsahy pětiúhelníku $ABCDE$ a trojúhelníku $AB'E'$. Bod X je pak středem úsečky $B'E'$. Leží-li bod X na straně CD, je to hledaný bod, kdy úsečka AX dělí obsah pětiúhelníku $ABCDE$ na polovinu.



Obr. 2

3. Vyzkoušíme, zda bod X neleží na straně DE. Zde je postup stejný jako v případě 1.

Závěr: Aspoň v jednom z uvedených případů (ve dvou případech to může nastat jedině, když $X = C$, nebo $X = D$) se bod X najde.

Úloha 56 *Skákající žába*
Obdélníková deska o hmotnosti M plove v klidné vodě. Na desce sedí žába, jejíž hmotnost označíme m. Žába vyskočí a dopadne na desku ve vzdálenosti L. Tření mezi deskou a vodou je velmi malé, ke změně ponoru desky při skoku žáby nepřihlížíme, odpor vzduchu neuvažujeme.

a) Určete velikost rychlosti $\boldsymbol{v}$ žáby při výskoku, jestliže žába vyskočí pod úhlem α.
b) Při jakém úhlu výskoku má rychlost $\boldsymbol{v}$ nejmenší velikost $v_{\min}$? Stanovte $v_{\min}$.
c) K jaké hodnotě se blíží $v_{\min}$ pro $\frac{m}{M} \to 0$?

Řešte nejprve obecně, pak úlohy b) a c) pro $L = 0{,}60$ m, $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,
1) $\frac{M}{m} = 5$, 2) $\frac{M}{m} = 100$.

(*Ivo Volf*)

Autorské řešení:
a) Označíme α úhel, pod nímž žába vyskočí. Rychlost $\boldsymbol{v}$ má ve vodorovném směru složku o velikosti $v\cos\alpha$, jejíž směr budeme považovat za kladný; velikost rychlosti desky v tomto směru je $-v_{\mathrm{d}}$. Podle zákona zachování hybnosti platí

$$mv\cos\alpha - Mv_{\mathrm{d}} = 0. \tag{1}$$

Trajektorii pohybu žáby při skoku pokládáme za trajektorii při šikmém vrhu, tzn. za parabolickou. Skok trvá dobu t, pro kterou platí

$$t = \frac{2v\sin\alpha}{g}. \tag{2}$$

Za tuto dobu se deska posune v záporném směru o délku

$$L_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{d}}t, \tag{3}$$

délka skoku žáby je $L - L_{\mathrm{d}}$, takže

$$vt\cos\alpha = L - L_{\mathrm{d}}. \tag{4}$$

Ze soustavy rovnic (1), (2), (3), (4) vyjádříme

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \sin 2\alpha}}.$$

b) Rychlost $\boldsymbol{v}$ má nejmenší velikost $v_{\min}$ pro $\sin 2\alpha = 1$, tedy pro $\alpha = 45^\circ$. Potom

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gL}{1 + \frac{m}{M}}} = \sqrt{\frac{MgL}{M + m}}.$$

Pro zadané hodnoty: $v_{\min 1} \doteq 2{,}21\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_{\min 2} \doteq 2{,}41\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

c) V tomto případě se $v_{\min}$ blíží hodnotě $v'_{\min} = \sqrt{Lg} \doteq 2{,}42\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Stav soutěže po 56 soutěžních úlohách

Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 bodů
Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 bodů
Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 bodů
Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 bodů
Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 bodů
Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 29 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 15 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů

Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G Olgy Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD, Zborovská, Praha 5) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G, Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 body
Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 body
Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 bod