Jan Tomsa

Nehrajte si se sirkami I

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 92 (2017), No. 1, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146729

Nehrajte si se sirkami I

Jan Tomsa, Ústav biofyziky 2. LF UK, Praha

Abstract. The article presents the general theory of so called deterministic games with full information. Then, its application is demonstrated on the game called "Marienbad" to find the winning strategy. The arithmetic operation "exclusive sum" (bit non-equivalence) on the $\mathbb{N}_0$ set is defined and its properties are demonstrated. Finally, the article is illustrated by the practical realization of the game.

Pravidla hry marienbad

Ne, tentokrát nejde o varování před vznikem požáru. Jde o to, abyste zbytečně neriskovali ztrátu ve hře, která je předem prohraná. Zvlášť kdyby ji s vámi někdo zkoušel hrát o peníze...

Hra, kterou mám na mysli, se jmenuje marienbad[1)] a má v podstatě velmi jednoduchá pravidla: Vezmou se nějaké drobné předměty (obvykle sirky, mohou to ovšem být i knoflíky, kamínky, fazole, ..., prostě co je po ruce), rozdělí se na hromádky, načež hráči z jednotlivých hromádek střídavě odebírají – v jednom tahu libovolný počet sirek, ale vždy jen z jedné hromádky. Prohrává hráč, na nějž žádná sirka nezbude, jinými slovy, kdo bere poslední sirku, vyhrává.[2)]

Z popisu vyplývá, že marienbad patří, podobně jako např. šachy nebo dáma, k tzv. hrám s plnou informací, což znamená, že oba hráči vědí v každém okamžiku všechno o aktuální herní situaci (tím se liší např. od karetních her, kde si hráči navzájem do karet nevidí). Na příkladu marienbadu ukážeme, že takové hry jsou deterministické, tedy že při správné volbě strategie je o výsledku rozhodnuto předem, ať se soupeř snaží, jak chce.

O strategii hry obecně

Začneme elegantní obecnou teorií. Nechť M je množina všech možných herních situací. Ta je zjevně množinou konečnou. Všechny možné tahy hráčů definuje relace $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{M} \times \mathrm{M}$. Poznamenejme, že relace R je nutně

1) Údajně podle filmu, v němž se vyskytuje.

2) Někdy se hraje opačná varianta, tedy že kdo bere poslední sirku, prohrává. Od výše popsané se liší jen nepatrně, herní strategie je až na detaily stejná.

antireflexivní, tj. neexistuje prvek $x \in \mathrm{M}$, pro nějž by platilo $x \mathrel{\mathrm{R}} x$ (prakticky to znamená, že se nelze „vzdát tahu“).[3)]

Pro každou situaci $x \in \mathrm{M}$ označme $\mathrm{R}(x)$ množinu všech situací, do nichž lze ze situace x přejít (tedy převézt soupeře) jedním tahem, tj.

$$\mathrm{R}(x) = \{y \in \mathrm{M} \colon x \mathrel{\mathrm{R}} y\}.$$

Definujme nyní množinu „bezvýchodných“ situací

$$\mathrm{L}_0 = \{x \in \mathrm{M} \colon \mathrm{R}(x) = \emptyset\},$$

tedy takových, v nichž již nelze učinit žádný tah a hráč, který je na tahu, prohrál (v našem případě obsahuje množina L_0 jedinou situaci, totiž tu, kdy na stole již nejsou žádné sirky). Dále pro $n > 0$ definujme množinu

$$\mathrm{L} = \{x \in \mathrm{M} \colon \mathrm{R}(x) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{W}_k\},$$

kde $\mathrm{W}_k = \{x \in \mathrm{M} : \exists y \in \mathrm{R}(x) \cap \mathrm{L}_k\}$. Definice jsou rekurentní, tj. začínáme od W_0, pokračujeme L_1, W_1, … atd. Takto můžeme postupovat, dokud jsou konstruované množiny neprázdné. Vzhledem ke konečnosti množiny M jsou i naše posloupnosti konečné. Jejich členy poté můžeme sjednotit, tj.

$$\mathrm{L} = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{L}_n, \qquad \mathrm{W} = \bigcup_{n \geq 0} \mathrm{W}_n.$$

Z konstrukce vyplývá, že množiny L a W jsou disjunktní ($\mathrm{L} \cap \mathrm{W} = \emptyset$).

Důkaz. Předpokládejme, že množiny L a W disjunktní nejsou, tj. že $\exists x \in \mathrm{L} \cap \mathrm{W}$. Existují tedy indexy n, m takové, že $x \in \mathrm{L}_n \cap \mathrm{W}_m$. To na jedné straně znamená, že $\mathrm{R}(x) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathrm{W}_k$, na straně druhé $\exists y \in R(x) \cap \mathrm{L}_m$. Musí tudíž existovat index $k < n$ tak, že $y \in \mathrm{L}_m \cap \mathrm{W}_k$. Opakovaná aplikace téže úvahy vede k závěru, že $\exists z \in \mathrm{L}_k \cap \mathrm{W}_j$, přičemž $j < m$. Takto bychom mohli pokračovat do nekonečna, což je spor s konečností množiny M. Důkaz je proveden.

Množina L má tu vlastnost, že všechny tahy z ní vedou do množiny W, naopak z každého prvku množiny W vede alespoň jeden tah do množiny L. Přesněji řečeno, hráč, který je na tahu v pozici $x \in \mathrm{W}_n$,

[3)] Zápis $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ znamená, že prvek x je v relaci R s prvkem y, což zde znamená, že po tahu x následuje tah y.

může zvolit „vítězný" tah, kterým soupeře převede do pozice $y \in \mathrm{L}_n$. Ten naopak může odpovědět pouze tahem vedoucím do W_k, kde $k < n$. Posloupnost situací, v nichž jeden z hráčů volí vždy vítězný tah, nutně končí tahem vedoucím z W_0 do L_0, a je tudíž vítěznou strategií. Jinými slovy, množina L obsahuje prohrávající, množina W vyhrávající situace. Výsledek hry tedy závisí na tom, ve které z obou množin se nachází výchozí pozice. Podle toho vyhrává buď začínající hráč, nebo jeho soupeř.

Dosud nezodpovězenou otázkou je, zda množiny L a W pokrývají celou množinu M (tj. $\mathrm{L} \cup \mathrm{W} = \mathrm{M}$). Obecně tomu tak být nemusí, tzn. mohou existovat relace, které vytvořenou strukturou $\mathrm{L} \cup \mathrm{W}$ pokryjí množinu M jen částečně, a tudíž existuje neprázdná množina $\mathrm{T} = \mathrm{M} \setminus (\mathrm{L} \cup \mathrm{W})$. Hráč nacházející se v situaci $x \in \mathrm{T}$ na jedné straně nemá k dispozici vítěznou strategii, na druhé straně není ani odsouzen k prohře. Jinými slovy, má zaručenou možnost uhájit remízu.[4)] Toto je možné např. u tzv. cyklických relací, tj. když existuje taková posloupnost prvků $x_i \in \mathrm{M}$, že $x_1 \mathrel{\mathrm{R}} x_2$, $x_2 \mathrel{\mathrm{R}} x_3$, …, $x_n \mathrel{\mathrm{R}} x_1$. Pak je možné donekonečna opakovat stejnou posloupnost tahů. To však v případě marienbadu zjevně neplatí, neboť celkový počet sirek ve hře se každým tahem zmenšuje, nehledě k tomu, že remízová situace není v této hře vůbec definována.[5)]

Strategie hry marienbad

Tolik obecná teorie, vraťme se nyní k naší hře – marienbadu. Jak podle konkrétního rozložení sirek na hromádkách poznat, zda daná situace vyhrává, a jak vést vítěznou strategii?

Zaveďme si nejprve označení. Symbolem $\langle x_1; x_2; \ldots; x_m \rangle$ popíšeme situaci, kdy na první hromádce leží x_1 sirek, na druhé x_2 atd. až na poslední (m-té) x_m sirek. Definičním oborem pro čísla x_i, $i = 1, \ldots, m$, je $\mathbb{N}_0$, tedy množina přirozených čísel rozšířená o nulu. Musí tomu tak být proto, že v jednom tahu lze odebrat třeba i celou jednu hromádku, tedy např. situaci $\langle x; y; z \rangle$ lze tahem převést na situaci $\langle x; y; 0 \rangle$. Na druhé straně však hromádky s nulovým počtem sirek (prázdné, tedy vlastně neexistující) už není nutno v zápisech situací uvádět, např. místo $\langle x; 0; 0; y; 0 \rangle$ stačí psát $\langle x; y \rangle$.

Víme, že $\langle 0 \rangle \in \mathrm{L}_0$, tzn. neleží-li na stole žádná sirka, hráč na tahu definitivně prohrál. Z toho plyne, že jedna neprázdná hromádka je situ-

[4)] Označení množin L, W a T je voleno podle angl. „lost", „won" a „tie".

[5)] Otázka existence, resp. neexistence, „remízové" množiny T je obecně dost složitá. Zdá se, že acykličnost relace (tj. nemožnost opakovat tahy) je podmínkou postačující, nikoli však nutnou. Problematika by si zasloužila samostatnou studii.

ací vyhrávající, konkrétně $\langle x\rangle \in \mathrm{W}_0$, je-li $x > 0$. Jak je tomu při dvou neprázdných hromádkách? Je-li počet sirek na obou stejný, jde zjevně o situaci prohrávající: vezme-li hráč libovolný počet sirek z jedné hromádky, učiní soupeř totéž s druhou, a takto pokračují až do konce. Lze tedy psát $\langle x; x\rangle \in \mathrm{L}$. Naproti tomu pro $x \neq y$ je pozice $\langle x; y\rangle \in \mathrm{W}$, neboť odebráním příslušného počtu sirek z větší hromádky lze převést hru do předchozí situace, tedy např. při $x > y$ se provede tah $\langle x; y\rangle \to \langle y; y\rangle$.

Věc se stává zajímavější při třech hromádkách. Dokažme si nejprve jedno pomocné tvrzení:

Pro každou dvojici čísel $x, y \in \mathbb{N}_0$ existuje právě jedno číslo $z \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\langle x; y; z\rangle \in \mathrm{L}$.

Důkaz. Dokážeme nejprve jednoznačnost. Kdyby existovala dvě různá čísla z, z' s touto vlastností, např. $z' < z$, bylo by jak $\langle x; y; z\rangle \in \mathrm{L}$, tak i $\langle x; y; z'\rangle \in \mathrm{L}$. Avšak z první pozice do druhé lze přejít tahem $z \to z'$, což by znamenalo, že $\langle x; y; z\rangle \in \mathrm{W}$. To je však spor s disjunktností W a L.

Důkaz existence se provede rovněž sporem. Zvolme pevně x, y a předpokládejme, že pro každé $z \in \mathbb{N}_0$ je $\langle x; y; z\rangle \in \mathrm{W}$. Podle definice musí vždy existovat tah, který ji převede na situaci z L. Tou může být buď $\langle x'; y; z\rangle$, kde $x' < x$, nebo $\langle x; y'; z\rangle$, kde $y' < y$, nebo konečně $\langle x; y; z'\rangle$, kde $z' < z$. Poslední varianta je v přímém sporu s předpokladem. Zbývajících možností (první dvě varianty) je však pouze $x + y$, zatímco čísel z je nekonečně mnoho. Tím je důkaz proveden.

Operace XOR

Definujme nyní v množině $\mathbb{N}_0$ následující binární operaci:

$$z = x \# y, \text{ pokud } \langle x; y; z\rangle \in \mathrm{L}$$

Právě dokázaná věta zaručuje, že taková operace existuje. Prozkoumejme její vlastnosti. Na první pohled zjevné jsou tyto:

- Operace je nutně *komutativní*, neboť na pořadí hromádek nezáleží. Tedy $x \# y = y \# x$.
- Ze stejného důvodu platí: Jestliže $x \# y = z$, potom také $y \# z = x$, $z \# x = y$.
- Z předchozího vyplývá též $x \# x = 0$, $x \# 0 = x$. Nula je tedy *neutrálním prvkem* operace a každý prvek je sám sobě *prvkem inverzním.*

Trochu pracnější bude důkaz *asociativity.* Nejprve si uvědomme, že spojením dvou prohrávajících situací je rovněž prohrávající situace, neboť příslušné reakce na tah soupeře lze provádět v obou původních částech spojené pozice zvlášť. Nechť nyní $x \# y = u$, $u \# z = v$. Je tedy jak $\langle x; y; u\rangle \in \mathrm{L}$, tak i $\langle u; z; v\rangle \in \mathrm{L}$, a tudíž i $\langle x; y; u; u; z; v\rangle \in \mathrm{L}$. Jelikož však také $\langle u; u\rangle \in \mathrm{L}$, musí být i $\langle x; y; z; v\rangle \in \mathrm{L}$. Označme $y \# z = w$ a vytvořme situaci $\langle x; y; z; v; w; w\rangle$. I ta je ze stejného důvodu prohrávající situací. Avšak vzhledem k tomu, že $\langle y; z; w\rangle \in \mathrm{L}$, musí být i $\langle x; v; w\rangle \in \mathrm{L}$, a tudíž $x \# w = v$. Tím je asociativita dokázána.

Tyto vlastnosti lze shrnout tak, že množina $\mathbb{N}_0$ s operací $\#$ tvoří *Abelovu grupu.* Zvlášť důležitou vlastností je asociativita, která dovoluje pro každou situaci $\langle x_1; x_2; \ldots; x_m\rangle$ definovat funkci

$$X = x_1 \# x_2 \# \ldots \# x_m.$$

Analogicky sumačnímu a multiplikačnímu znaku $\sum$ a $\prod$ pro ni zavedeme označení

$$X = \mathop{\Xi}_{i=1}^{m} x_i = x_1 \# x_2 \# \ldots \# x_m.$$

O ní vyslovíme a dokážeme následující větu:

Situace je prohrávající právě tehdy, když $X = 0$.

Důkaz provedeme indukcí podle m. Věta zjevně platí pro $m = 1$ i pro $m = 2$. Pro $m = 3$, je-li $\langle x; y; z\rangle \in \mathrm{L}$, je $x \# y = z$, a proto

$$x \# y \# z = z \# z = 0.$$

Obráceně, je-li $x \# y \# z = 0$, je $(x \# y) \# 0 = x \# y = z$, a tudíž $\langle x; y; z\rangle \in \mathrm{L}$. Nechť nyní věta platí pro nějaké m, a nechť $\langle x_1; x_2; \ldots; x_m; x_{m+1}\rangle \in \mathrm{L}$. Označme $y = x_m \# x_{m+1}$ a vytvořme situaci $\langle x_1; x_2; \ldots; x_m; x_{m+1}; y; y\rangle$. Z předchozího plyne, že je rovněž situací prohrávající. Avšak vzhledem k tomu, že $\langle x_m; x_{m+1}; y\rangle \in \mathrm{L}$, je též $\langle x_1; x_2; \ldots; x_{m-1}; y\rangle \in \mathrm{L}$. Podle indukčního předpokladu je $\left(\Xi_{i=1}^{m-1} x_i\right) \# y = 0$, a tudíž i $\Xi_{i=1}^{m-1} x_i = 0$.

Obráceně, je-li

$$x_1 \# x_2 \# \ldots \# (x_m \# x_{m+1}) = 0,$$

je $\langle x_1; x_2; \ldots; x_{m-1}; y\rangle \in \mathrm{L}$. Spojením se situací $\langle y; x_m; x_{m+1}\rangle \in \mathrm{L}$ vznikne $\langle x_1; x_2; \ldots; x_{m-1}; y; y; x_m; x_{m+1}\rangle \in \mathrm{L}$ a vzhledem k tomu, že $\langle y; y\rangle \in \mathrm{L}$, je též $\langle x_1; x_2; \ldots; x_{m+1}\rangle \in \mathrm{L}$, což jsme chtěli dokázat.

Máme tak k dispozici jednoznačný indikátor prohrávajících situací. Zbývá odpovědět na otázku, jak ve vyhrávající situaci najít vítězný tah. Odpověď dává následující věta:

V každé situaci $\langle x_1; x_2; \ldots; x_m\rangle \in \mathrm{W}$ *existuje index* j *takový, že* $X \mathbin{\#} x_j < x_j$.

Důkaz. Podle definice existuje index j tak, že $\langle x_1; x_2; \ldots; x'_j; \ldots; x_m\rangle \in \mathrm{L}$, přičemž $x'_j < x_j$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j = m$ (hromádky lze libovolně přehazovat). Potom platí

$$x_1 \mathbin{\#} x_2 \mathbin{\#} \ldots \mathbin{\#} x_{m-1} \mathbin{\#} x'_m = 0,$$

a tedy $x'_m = \Xi_{i=1}^{m-1} x_i$. Z toho však plyne

$$X \mathbin{\#} x_m = \Xi_{i=1}^{m} x_i \mathbin{\#} \Xi_{i=1}^{m-1} x_i = x'_m,$$

a tudíž i $X \mathbin{\#} x_m = x'_m$. Důkaz je hotov.

Než budeme pokračovat, uvedeme ještě jednu větu, pro teorii možná trochu nadbytečnou, ale zajímavou a užitečnou z hlediska praktického hraní hry:

Nechť $\langle x_1; x_2; \ldots; x_m\rangle \in \mathrm{L}$ *a nechť hráč provede tah* $x_j \to x'_j$. *Potom* $X = x_j \mathbin{\#} x'_j$.

Důkaz. Vzhledem k tomu, že původní situace byla prohrávající, je $\Xi_{i=1}^{m} x_i = 0$. S využitím toho, že $x_j \mathbin{\#} x_j = 0$, můžeme pro novou situaci napsat dokazovanou rovnost

$$X = x'_j \mathbin{\#} \Xi_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} x_i \mathbin{\#} x_j \mathbin{\#} x_j = x'_j \mathbin{\#} x_j.$$

Poslední věty ukazují, že existuje nejen vítězná strategie, ale i algoritmus, jak ji nalézt. Nachází-li se hráč v situaci $\boldsymbol{x} = \langle x_1; x_2; \ldots; x_m\rangle$, spočte si nejprve hodnotu funkce X. Mohou nastat dvě možnosti:

A) $X = 0$. Potom $x \in \mathrm{L}$ a je v zásadě jedno, jaký tah hráč zvolí, neboť soupeř jej při správně volené strategii bezpečně porazí. Jedinou šancí je čekat na soupeřovu chybu, tedy na tah vedoucí z W do W. Pak se situace obrací.

B) $X \neq 0$, neboli $x \in \mathrm{W}$. Pak je mezi hromádkami třeba hledat tu, pro niž $x'_j = X \# x_j < x_j$ (může jich být i více než jedna). Následně se provede tah $x_j \to x'_j$, neboli z j-té hromádky se odebere $x_j - x'_j$ sirek.

Jediné, co je k tomu potřeba, je umět provést výpočet operace #, tedy popsat ji numerickým algoritmem. Než jej začneme hledat, zopakujme si, co o operaci víme:

- Množina $\mathbb{N}_0$ je vůči operaci # Abelovou grupou.
- Neutrálním prvkem je 0, každý prvek je sám sobě inverzním prvkem.

Poznámka: Přímým důsledkem je, že je-li $x \# y = z$, pak $y \# z = x$ a cyklicky $z \# x = y$.

Důkaz: $y \# z = y \# (x \# y) = y \# (y \# x) = (y \# y) \# x = 0 \# x = x.$

Operací, která má tyto vlastnosti, je tzv. *bitová non-ekvivalence* neboli *non-ekvivalence po bitech*. V angličtině se označuje poněkud umělým výrazem XOR (eXclusive OR) k odlišení od disjunkce (OR). Bitem se samozřejmě rozumí dvouhodnotová veličina – jednička nebo nula, čili logické ANO, či logické NE. Disjunkci (OR) se také říká logický součet, podobně jako konjunkci (AND) logický součin. Operaci XOR je tak možno označit za exkluzivní součet:

První bit	Druhý bit	AND	OR	XOR
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Důvod pro označení „non-ekvivalence“ je nasnadě: operace XOR nabývá hodnoty 1 (ANO) právě tehdy, když mají operandy různou (neekvivalentní) hodnotu, v opačném případě má hodnotu 0 (NE). Je tudíž opakem (negací) operace „ekvivalence“, která je pravdivá při stejné a nepravdivá při různé hodnotě operandů. Rovněž označení „exkluzivní součet“ má svou logiku – hodnoty jsou podobné jako při operaci OR (nebo), ovšem s tím, že současná platnost obou operandů se vylučuje.

Aplikace operace XOR do hry marienbad

Z tabulky vidíme, že právě operace XOR má požadované vlastnosti. Víme tedy, jak provádět operaci # s bity, ale jak ji provádět s přirozenými čísly, reprezentujícími počty sirek na jednotlivých hromádkách?

Nezbývá, než tato čísla na jednotlivé bity rozložit, neboli (matematicky řečeno) převést je do dvojkové soustavy. Operaci pak musíme provést s každou dvojicí bitů zvlášť a výsledek převést zase zpátky do dekadického tvaru.

Příklad: Máme určit $1 \# 2$. Převodem do dvojkové soustavy zjistíme, že $1 = (01)_2$, $2 = (10)_2$, takže $1 \# 2 = (11)_2 = 3$. To znamená, že situace $\langle 1; 2; 3\rangle \in$ L. Z výše uvedeného však rovněž plyne $1 \# 3 = 2$, $2 \# 3 = 1$.

Podle tohoto příkladu by se mohlo zdát, že výpočet pomocí operace # prakticky znamená počítat součty nebo rozdíly. Někdy tomu tak skutečně je, např. $1 \# 4 = 5$, $2 \# 4 = 6$, $3 \# 4 = 7$, $2 \# 5 = 7$. Zdaleka však ne vždy. Spočtěme $3 \# 5$, kde $3 = (011)_2$, $5 = (101)_2$, takže $3 \# 5 = (110)_2 = 6$. Je tudíž $\langle 3; 5; 6\rangle \in$ L.

Úspěch „virtuózních“ hráčů marienbadu je založen v horším případě na tom, že si pamatují velké množství prohrávajících situací, v lepším případě na schopnosti provádět rychle zpaměti naznačené výpočty. Vidíli takový hráč, že výchozí situace (počáteční rozložení sirek na hromádkách) je prohrávající, „galantně“ nabídne soupeři první tah. V opačném případě si pohlídá, aby začínal hru sám.

Jako příklad uveďme hru, která začíná z oblíbené výchozí pozice $\langle 1; 3; 5; 7\rangle$. Jde zjevně o situaci prohrávající, neboť $1 \# 3 \# 5 \# 7 = 2 \# 5 \# 7 = 7 \# 7 = 0$. Předpokládejme např., že náš soupeř, který je na tahu, chce hrát opatrně a pro začátek odebere jen jednu sirku, třeba tak, že zruší první hromádku. Jsme tedy v situaci $\langle 3; 5; 7\rangle$. Aniž bychom museli provádět výpočet se všemi hromádkami, podle jedné z předchozích vět víme, že $X = 1 \# 0 = 1$. Je tudíž třeba najít hromádku, která se operací $x \# 1$ zmenší. V tomto případě si náhodou můžeme vybrat libovolnou, což umožňuje střídat strategie. Je totiž $3 \# 1 = 2$, $5 \# 1 = 4$, $7 \# 1 = 6$. Musíme tedy odebrat z některé (v tomto případě dokonce z kterékoli) hromádky jednu sirku. Vytvoříme tak některou ze situací $\langle 2; 5; 7\rangle$, $\langle 3; 4; 7\rangle$, nebo $\langle 3; 5; 6\rangle$. Zvolme třeba poslední možnost. Soupeř má v tuto chvíli k dispozici 14 možných tahů. Zcela jistě však již neodebere žádnou hromádku celou, neboť si uvědomí, že bychom reagovali „srovnáním“ zbývajících dvou hromádek, tj. vytvořili bychom situaci typu $\langle x; x\rangle$, jejíž beznadějnost je zjevná. Podobně ani „nesrovná“ žádné dvě hromádky, neboť zde bychom obdobně odpověděli odebráním té třetí. Šest tahů tedy můžeme vyloučit. Soupeř si naopak mohl povšimnout, že v minulých partiích často prohrál ten z hráčů, který se ocitl v situaci $\langle x; y; x + y\rangle$, tedy když jedna hromádka byla součtem druhých dvou. Vlivem této myšlenky by mohl buď odebrat 2 sirky z první hromádky, nebo 4 ze třetí (samozřejmě může táhnout i jakkoli jinak). Zvolí-li první možnost, tj. $\langle 1;5;6\rangle$, bude $X = 3 \# 1 = 2$. Nyní již nemáme na výběr jako předešle, neboť $2 \# 1 = 3 > 2$, $2 \# 5 = 7 > 5$. Jediným vítězným tahem je odebrání 2 sirek ze třetí hromádky, neboť $2 \# 6 = 4 = 6 - 2$. Pokračujte sami a přesvědčte se, že pokud neuděláme chybu, náš soupeř (hráč, který začínal) nevyhnutelně prohraje.

Zvládnete-li naučit se tyto triky, můžete tím oslňovat společnost přátel; peníze si tím ale nevydělávejte, bylo by to vůči slabšímu soupeři značně nekorektní, nehledě k tomu, že riziko početní chyby je dost velké a jednou byste také mohli narazit na lepšího počtáře.

Závěrem uveďme tabulku hodnot operace # pro čísla od 0 do 15:

#	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	**1**	**0**	**3**	**2**	**5**	**4**	**7**	**6**	**9**	**8**	**11**	**10**	**13**	**12**	**15**	**14**
2	**2**	**3**	**0**	**1**	**6**	**7**	**4**	**5**	**10**	**11**	**8**	**9**	**14**	**15**	**12**	**13**
3	**3**	**2**	**1**	**0**	**7**	**6**	**5**	**4**	**11**	**10**	**9**	**8**	**15**	**14**	**13**	**12**
4	**4**	**5**	**6**	**7**	**0**	**1**	**2**	**3**	**12**	**13**	**14**	**15**	**8**	**9**	**10**	**11**
5	**5**	**4**	**7**	**6**	**1**	**0**	**3**	**2**	**13**	**12**	**15**	**14**	**9**	**8**	**11**	**10**
6	**6**	**7**	**4**	**5**	**2**	**3**	**0**	**1**	**14**	**15**	**12**	**13**	**10**	**11**	**8**	**9**
7	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**
8	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
9	**9**	**8**	**11**	**10**	**13**	**12**	**15**	**14**	**1**	**0**	**3**	**2**	**5**	**4**	**7**	**6**
10	**10**	**11**	**8**	**9**	**14**	**15**	**12**	**13**	**2**	**3**	**0**	**1**	**6**	**7**	**4**	**5**
11	**11**	**10**	**9**	**8**	**15**	**14**	**13**	**12**	**3**	**2**	**1**	**0**	**7**	**6**	**5**	**4**
12	**12**	**13**	**14**	**15**	**8**	**9**	**10**	**11**	**4**	**5**	**6**	**7**	**0**	**1**	**2**	**3**
13	**13**	**12**	**15**	**14**	**9**	**8**	**11**	**10**	**5**	**4**	**7**	**6**	**1**	**0**	**3**	**2**
14	**14**	**15**	**12**	**13**	**10**	**11**	**8**	**9**	**6**	**7**	**4**	**5**	**2**	**3**	**0**	**1**
15	**15**	**14**	**13**	**12**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**

Literatura

[1] Burjan, V., Burjanová, L'.: *Matematické hry.* Pytagoras, Bratislava, 1991.

[2] Gatial, J., Hecht, T., Hejný, M.: *Hry takmer matematické.* Mladá fronta, ÚV MO, ŠMM, Praha, 1982.

[3] Novoveský, Š., Križalkovič, K., Lečko, I.: *Zábavná matematika.* SPN, Praha, 1974.

[4] Obelmair, G.: *Hry a kouzla se sirkami.* Nakladatelství Ivo Železný, Praha, 2003.

[5] Pijanowski, L., Pijanowski, W.: *Encyklopedie světových her.* Universum, Praha, 2008.