Jan Hamáček

Reprezentovatelnost částek ve dvoumincových systémech

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 62 (2017), No. 1, 33–51

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/146722`

Reprezentovatelnost částek ve dvoumincových systémech

Jan Hamáček, Praha

Abstrakt. Máme-li neomezené množství mincí o předepsaných hodnotách, může se stát, že pomocí nich nelze složit některé částky. Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy máme k dispozici mince pouze dvou různých hodnot. V takovém případě je totiž možné poměrně snadno odvodit vzorce pro největší nereprezentovatelnou částku a zjistit počet všech takových částek. Ukážeme, jak lze ke stejnému cíli dospět různými postupy: nejprve odvodíme vzorec pro zjištění počtu všech nereprezentovatelných částek za pomoci rovinné geometrie. Ve druhé části dokážeme oba zmíněné vzorce užitím dělitelnosti. Ve třetí části použijeme ke stejnému účelu vytvořující funkce.

Řekneme, že částka $n \in \mathbb{N}_0$ je reprezentovatelná v systému mincí o hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$, pokud existují $x, y \in \mathbb{N}_0$, pro která platí rovnost

$$n = xa + yb.$$

Jsou-li čísla a, b soudělná a d je jejich největší společný dělitel, pak v daném systému mohou být reprezentovatelné pouze násobky d. Konkrétně platí, že částka kd je reprezentovatelná v systému a, b právě tehdy, když částka k je reprezentovatelná v systému a/d, b/d. Bez újmy na obecnosti se tedy můžeme omezit na systémy mincí o nesoudělných hodnotách a, b. Ukážeme, že v takových systémech existuje pouze konečně mnoho nereprezentovatelných částek, a najdeme jejich počet a vzorec pro největší nereprezentovatelné číslo (tzv. Frobeniovo číslo).

1. Geometrické odvození

Nejprve zjistíme počet nereprezentovatelných částek v systému mincí o dvou nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$. Čerpáme přitom z [3, kap. 13].

Počet reprezentací částky n v systému mincí o hodnotách a, b je roven počtu dvojic $x, y \in \mathbb{N}_0$ takových, že

$$n = xa + yb.$$

Jednoduchými úpravami získáme ekvivalentní vyjádření

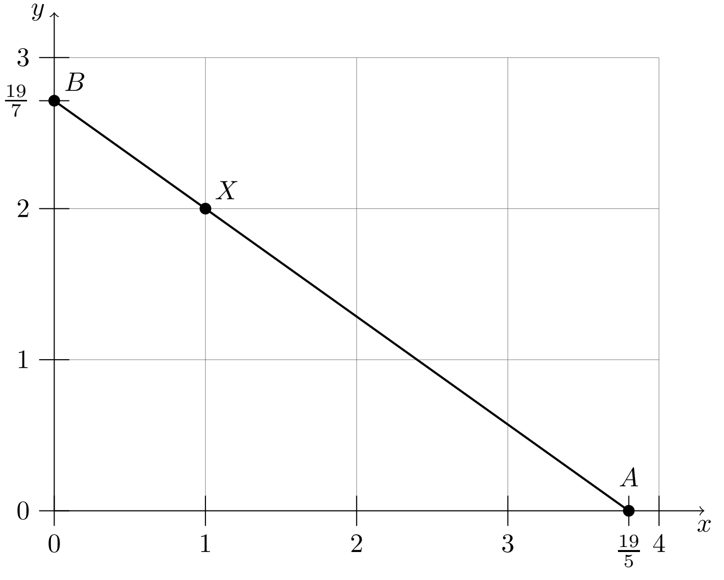
$$y = \frac{-a}{b}x + \frac{n}{b},$$

což je rovnice přímky protínající souřadnicové osy v bodech $A = [n/a, 0]$ a $B = [0, n/b]$.

Mgr. Jan Hamáček, Katedra softwaru a výuky informatiky, MFF UK v Praze, Malostranské náměstí 25, 118 00 Praha 1, e-mail: `hamacekh@gmail.com`

Částka n je proto v systému mincí reprezentovatelná právě tehdy, když na úsečce AB leží bod s celočíselnými souřadnicemi $[x, y]$.

Na obrázku 1 je příklad reprezentovatelné částky $n = 19$ v systému mincí s $a = 5$ a $b = 7$. Na úsečce AB leží jediný bod X s celočíselnými souřadnicemi $[1, 2]$, neboť částku 19 lze reprezentovat jedině pomocí jedné mince o hodnotě 5 a dvou mincí o hodnotě 7.



Obr. 1. Příklad reprezentovatelné částky 19 v systému mincí $a = 5$, $b = 7$

Lemma 1. *Leží-li bod $X = [x, y]$ s celočíselnými souřadnicemi na přímce*

$$p : n = xa + yb,$$

kde $a, b \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná, pak na stejné přímce leží i body $Y_1 = [x + b, y - a]$ a $Y_2 = [x - b, y + a]$. Mezi body X a Y_1 ani mezi body X a Y_2 na přímce p neleží žádný další bod s celočíselnými souřadnicemi.

Důkaz. Bod Y_1 leží na přímce p, protože

$$a(x + b) + b(y - a) = ax + ab + by - ba = ax + by = n.$$

Podobně bod Y_2 leží na přímce p, protože

$$a(x - b) + b(y + a) = ax + by = n.$$

Druhou část tvrzení dokážeme sporem. Nechť mezi body X a Y_1 leží bod $Q = [x + u, y - v]$ s celočíselnými souřadnicemi. Konstanty u, v proto musí splňovat $u, v \in \mathbb{N}$, $1 \leq u < b$ a $1 \leq v < a$. Platí

$$a(x + u) + b(y - v) = ax + by + au - bv = n.$$

Dalšími úpravami této rovnice získáme

$$\begin{aligned} n + au - bv &= n, \\ \frac{a}{b} &= \frac{v}{u}. \end{aligned}$$

Zlomek $\frac{a}{b}$ je v základním tvaru, protože a a b jsou nesoudělná. Všechny zlomky vyjadřující stejné racionální číslo jsou proto ve tvaru $\frac{ma}{mb}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Zlomek $\frac{v}{u}$ však v tomto tvaru není, neboť $1 \leq v < a$ a $1 \leq u < b$.

Stejným způsobem bychom mohli dokázat, že mezi body X a Y_2 na přímce neleží bod $Q' = [x - u, y + v]$, kde opět $u, v \in \mathbb{N}$, $1 \leq u < b$ a $1 \leq v < a$. □

Víme-li, že na přímce p z lemmatu 1 leží alespoň jeden bod s celočíselnými souřadnicemi, pak opakovaným užitím tohoto lemmatu ověříme, že jich na přímce p leží nekonečně mnoho.

Věta 2. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná a $n \in \mathbb{N}_0$, pak na přímce*

$$p : n = xa + yb$$

leží nekonečně mnoho bodů s celočíselnými souřadnicemi. Vzdálenost každých dvou sousedních bodů s celočíselnými souřadnicemi na přímce p je rovna

$$s = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že na přímce p leží alespoň jeden bod s celočíselnými souřadnicemi. Jelikož jsou a, b nesoudělná, existují na základě Bézoutovy věty [6, věta 3.3] celá čísla $x', y' \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$ax' + by' = 1.$$

Vynásobením této rovnosti číslem $n \in \mathbb{N}$ vznikne $anx' + bny' = n$. Bod $[nx', ny']$ proto leží na přímce p.

Podle lemmatu 1 leží na přímce p nekonečně mnoho bodů s celočíselnými souřadnicemi v pravidelných intervalech. Vzdálenost dvou sousedních bodů $X = [x, y]$ a $Y_1 = [x + b, y - a]$ je

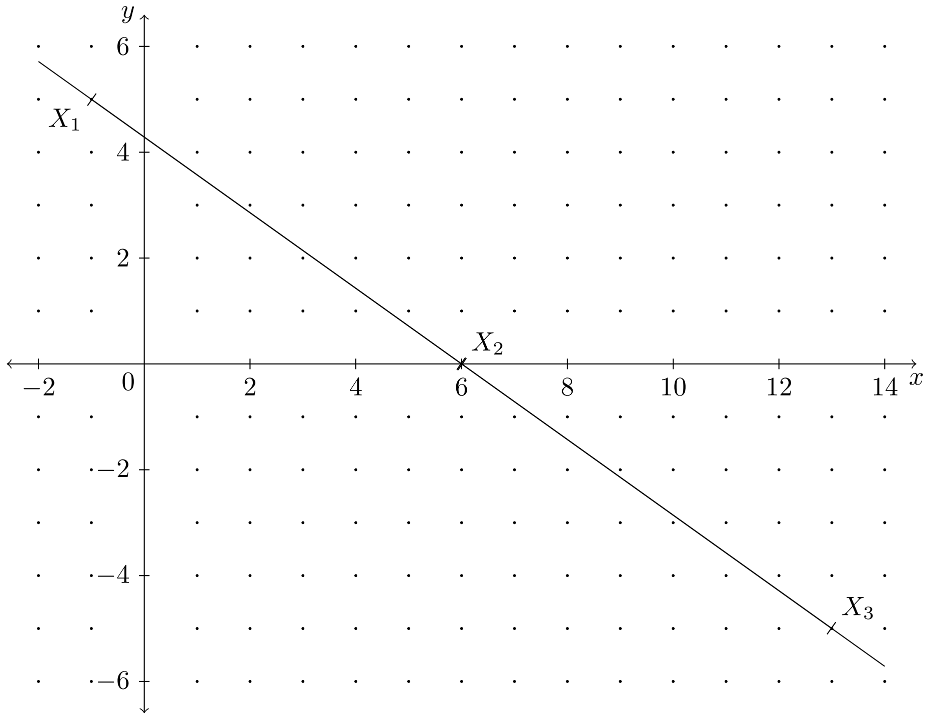
$$s = \sqrt{(x - x - b)^2 + (y - y + a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ke stejnému závěru dojdeme i při volbě sousedních bodů X a $Y_2 = [x - b, y + a]$. □

Na obrázku 2 je znázorněna přímka p odpovídající volbě $n = 30$, $a = 5$ a $b = 7$. Vyznačené body X_1, X_2 a X_3 na přímce p jsou tři po sobě jdoucí body s celočíselnými souřadnicemi. Jejich vzdálenosti jsou podle věty 2

$$|X_1X_2| = |X_2X_3| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}.$$

Věta 3. *Mějme systém mincí s nesoudělnými hodnotami a, b. Částka $n = ab$ je v tomto systému reprezentovatelná dvěma způsoby. Všechny částky $n > ab$ jsou reprezentovatelné. Částky $n < ab$ jsou reprezentovatelné nejvýše jedním způsobem.*



Obr. 2. Přímka s vyznačenými body s celočíselnými souřadnicemi pro $a = 5$, $b = 7$ a $n = 30$

Důkaz. Pokud je úsečka AB s krajními body $A = [n/a, 0]$ a $B = [0, n/b]$ delší než $\sqrt{a^2 + b^2}$, pak na ní podle věty 2 leží alespoň jeden bod s celočíselnými souřadnicemi.

Délka úsečky AB přitom roste s n lineárně, neboť pro $n \geq 0$ platí

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = n \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}.$$

Pro $n = ab$ je $A = [b, 0]$, $B = [0, a]$ a $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Podle věty 2 na této úsečce leží nejvýše dva body s celočíselnými souřadnicemi. Jsou právě dva a jsou jimi body A, B.

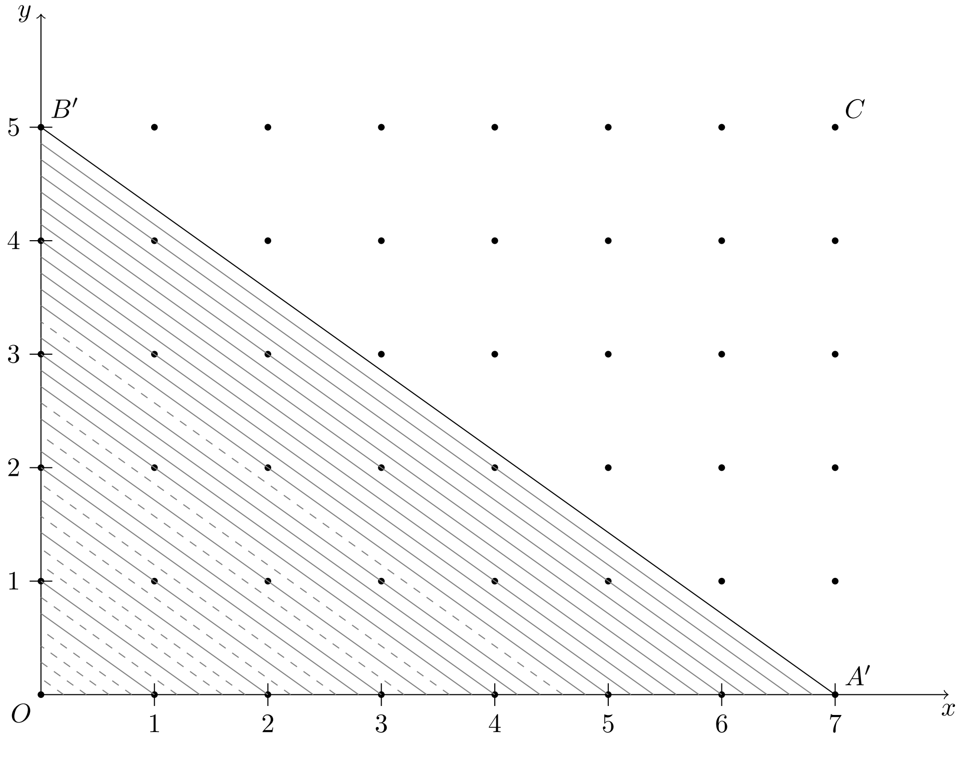
Pro $n > ab$ je odpovídající úsečka delší než vzdálenost sousedních bodů s celočíselnými souřadnicemi, leží na ní proto alespoň jeden z nich. Pro $n < ab$ je odpovídající úsečka kratší než vzdálenost sousedních bodů s celočíselnými souřadnicemi, a proto na ní leží nejvýše jeden z nich. $\square$

V následujících odstavcích popíšeme vztah mezi počtem bodů s celočíselnými souřadnicemi a počtem reprezentovatelných a nereprezentovatelných částek.

Označíme body $A' = [b, 0]$, $B' = [0, a]$ a počátek $O = [0, 0]$. Body A' a B' jsou krajními body úsečky pro $n = ab$. Z věty 3 vidíme, že každé reprezentovatelné částce n menší než ab odpovídá úsečka s krajními body $A'' = [n/a, 0]$ a $B'' = [0, n/b]$, na které leží právě jeden bod s celočíselnými souřadnicemi. Odtud plyne, že reprezentovatelných částek n menších než ab je nejvýše tolik, jako bodů s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř trojúhelníku $OA'B'$ nebo na jeho obvodu, nepočítáme-li body A' a B'.

Počet reprezentovatelných částek by byl ostře menší než počet popsaných bodů, kdyby existoval bod s celočíselnými souřadnicemi, který neleží na žádné z úseček. V následující větě dokážeme, že tomu tak není. Počet bodů s celočíselnými souřadnicemi je proto roven počtu reprezentovatelných částek.

Na obrázku 3 jsou na příkladu systému mincí s $a = 5$ a $b = 7$ znázorněny všechny úsečky odpovídající číslům $n \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot 7 = 35\}$. Úsečky, na kterých leží bod s celočíselnými souřadnicemi, a odpovídají tedy reprezentovatelným částkám, jsou znázorněny plnou čarou. Úsečky, na kterých žádný bod s celočíselnými souřadnicemi neleží, a odpovídají tedy nereprezentovatelným částkám, jsou znázorněny čárkovaně.



Obr. 3. Úsečky AB pro $a = 5$, $b = 7$ a $n \in \{0, 1, \ldots, 35\}$

Věta 4. *Mějme nesoudělná $a, b \in \mathbb{N}$. Pro každý bod $X = [x, y]$ se souřadnicemi $x, y \in \mathbb{N}_0$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že X leží na úsečce s krajními body $A = [n/a, 0]$, $B = [0, n/b]$.*

Důkaz. Výraz $ax + by$ je jistě celočíselný. Zvolíme proto

$$n = ax + by. \tag{1}$$

Pokud se na vztah (1) budeme dívat jako na rovnici přímky, snadno ověříme, že protíná osy v bodech $A = [n/a, 0]$ a $B = [0, n/b]$. Bod X na této přímce leží. Leží i na úsečce AB, neboť se nachází v prvním kvadrantu. □

Věta 5. *Počet všech nereprezentovatelných částek v systému mincí o nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$ je*

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Důkaz. Počet všech částek menších než ab, včetně nuly, je ab.

Zvolme $A' = [b, 0], B' = [0, a], O = [0, 0]$ a $C = [b, a]$. Z vět 3 a 4 plyne, že počet reprezentovatelných částek menších než ab je roven počtu bodů s celočíselnými souřadnicemi, které leží uvnitř trojúhelníku $OA'B'$ nebo na jeho obvodu, vyloučíme-li oba body A' a B'. Těch je polovina z počtu bodů s celočíselnými souřadnicemi ležících v obdélníku $OA'CB'$, vyloučíme-li oba body A' a B'.

Počet reprezentovatelných částek menších než ab je proto

$$\frac{(a+1)(b+1)-2}{2}.$$

Počet nereprezentovatelných částek menších než ab vypočítáme odečtením počtu reprezentovatelných od počtu všech:

$$ab - \frac{(a+1)(b+1)-2}{2} = ab - \frac{ab}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Z věty 3 víme, že každá částka větší nebo rovná ab je reprezentovatelná, proto tyto částky neovlivní počet nereprezentovatelných částek. Počet všech nereprezentovatelných částek je tedy

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$ □

2. Počet nereprezentovatelných částek pomocí dělitelnosti

V této části budeme nejprve hledat odpověď na stejnou otázku jako v části předchozí. Britský matematik James Joseph Sylvester použil k popisu problému známky dvou hodnot namísto mincí dvou hodnot. Náš postup vychází z jeho myšlenek. V literatuře proto můžeme problémy popsané v této kapitole nalézt pod názvem „The Stamp Problem", viz např. [5]. V následujícím textu vycházíme z [4, kap. 6].

Otázka. Máme neomezené množství mincí o hodnotách a a b, přičemž čísla a, b jsou nesoudělná. Kolik různých částek menších než ab nedokážeme pomocí těchto mincí reprezentovat?

Obecnější verze této otázky neobsahuje omezení na částky menší než ab. Ve větě 3 jsme však ukázali, že všechny částky větší nebo rovné ab jsou v systému mincí a, b reprezentovatelné; tuto skutečnost později odvodíme i pomocí dělitelnosti.

Vytvoříme tabulku obsahující všechny reprezentovatelné částky menší než ab. Hodnotou v u-tém řádku a v-tém sloupci bude $u \cdot b + v \cdot a$. Pro hodnoty $a = 5$ a $b = 9$ takto vznikne tabulka 1.

$u \backslash v$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
1	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54
2	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63
3	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72
4	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81
5	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90

Tab. 1. Reprezentovatelné částky pro hodnoty $a = 5$, $b = 9$

Definice 6. Mějme nesoudělná $a, b \in \mathbb{N}$. Uvažujme matici o $a+1$ řádcích a $b+1$ sloupcích, kde pro $u, v \in \mathbb{N}_0$, $u \le a$, $v \le b$, je prvek matice v u-tém řádku a v-tém sloupci roven

$$u \cdot b + v \cdot a.$$

Tuto matici označme $A_{a,b}$. Prvek matice $A_{a,b}$ v u-tém řádku a v-tém sloupci budeme značit $A_{a,b}(u, v)$.

Tabulka 1 podle této definice odpovídá matici $A_{5,9}$.

Počet všech nereprezentovatelných částek menších než ab můžeme spočítat pomocí počtu všech reprezentovatelných. Platí totiž rovnost

$$\begin{pmatrix}\text{počet}\\ \text{reprezentovatelných}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{počet}\\ \text{nereprezentovatelných}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{počet}\\ \text{všech}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Zbývá zjistit, kolik je v tabulce (matici $A_{a,b}$) různých reprezentovatelných částek menších než ab.

Tabulka 1 obsahuje tři části. V levé horní části jsou hodnoty menší než $ab = 45$. V pravé dolní části jsou hodnoty větší než 45. Ve zbylých dvou rozích jsou potom právě dvě hodnoty 45. Navíc platí, že hodnot menších než 45 je v tabulce stejný počet jako hodnot větších než 45.

Ověříme, že uvedená tvrzení platí nejen pro hodnoty $a = 5$ a $b = 9$, ale i v obecném případě. Z následující věty plyne, že v matici $A_{a,b}$ je částek menších než ab stejně jako částek větších než ab.

Věta 7. *Nechť $a, b \in \mathbb{N}$ jsou větší než 1. Potom pro $u, v \in \mathbb{N}_0$, $u \le a$, $v \le b$ platí*

$$A_{a,b}(u, v) + A_{a,b}(a - u, b - v) = 2ab.$$

Důkaz. Rozepsáním levé strany rovnosti pomocí definice 6 dostaneme tvrzení věty. □

Věta 8. *Jsou-li čísla $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná, pak se v matici $A_{a,b}$ žádná hodnota kromě ab nevyskytuje více než jednou. Hodnota ab se v matici vyskytuje právě dvakrát.*

Důkaz. Aby se hodnota n vyskytovala v matici $A_{a,b}$ více než jednou, musí se vyskytovat v řádku u_1 a sloupci v_1 a zároveň v řádku u_2 a sloupci v_2. Musí tedy existovat $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{N}_0$ taková, že platí $u_1, u_2 \le a$, $v_1, v_2 \le b$ a n můžeme vyjádřit dvěma způsoby

$$n = u_1 b + v_1 a, \qquad n = u_2 b + v_2 a.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $u_2 < u_1$. Musí proto platit $v_2 > v_1$.

Odečtením předchozích rovností dostaneme

$$b \cdot (u_1 - u_2) = a \cdot (v_2 - v_1). \tag{3}$$

Odtud plyne, že a dělí $b \cdot (u_1 - u_2)$. Hodnoty a a b jsou nesoudělné. Platí proto, že a dělí $u_1 - u_2$. To můžeme interpretovat tak, že čísla řádků u_1, u_2 se musí lišit o násobek a.

Stejným způsobem z rovnosti (3) plyne, že b dělí $a \cdot (v_2 - v_1)$, tedy b dělí $v_2 - v_1$. Čísla sloupců v_1, v_2 se proto musí lišit o násobek b.

V matici $A_{a,b}$ jsou takové hodnoty pouze čtyři v rozích matice. Rozborem případů zjistíme, že jediné stejné hodnoty v matici jsou rovny ab a jsou to prvky $A_{a,b}(a, 0)$ a $A_{a,b}(0, b)$. □

Nyní můžeme využít vzorec (2) k určení počtu všech nereprezentovatelných částek menších než ab.

Věta 9. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná, pak je počet všech nereprezentovatelných částek menších než ab roven*

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Důkaz. V matici $A_{a,b}$ je celkem $(a+1)(b+1)$ hodnot. Dvě z nich jsou podle předchozí věty rovny ab. Polovina ze zbylých hodnot je podle věty 7 menší než ab. Tyto hodnoty jsou navíc podle věty 8 různé.

Počet všech různých reprezentovatelných částek menších než ab je tedy

$$\frac{(a+1)(b+1)-2}{2} = \frac{ab+a+b-1}{2}.$$

Počet všech nereprezentovatelných částek menších než ab je proto

$$ab - \frac{ab+a+b-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}. \qquad \square$$

K tomuto závěru dospěl i Sylvester [4, str. 172]. Z předchozí části víme, že všechny větší částky jsou reprezentovatelné. Odtud plyne, že každá nereprezentovatelná částka je menší než ab. Nalezením největší z nich se budeme zabývat v následující kapitole.

3. Největší nereprezentovatelná částka pomocí dělitelnosti

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet Frobeniova čísla ve dvoumincovém systému pomocí dělitelnosti. Postup si nejprve ukážeme na konkrétním případě pro systém mincí o nesoudělných hodnotách $a = 5$, $b = 9$.

Z tabulky 1 vypustíme poslední řádek a sloupec. Navíc od každého čísla většího než $ab = 45$ odečteme 45. Výsledkem bude tabulka 2.

Tabulka 2 obsahuje všechna čísla mezi 0 a $ab - 1$ včetně. Jsou v ní proto všechny reprezentovatelné i nereprezentovatelné částky menší než ab. Žádné číslo se v ní navíc neopakuje. V levé horní části tabulky (světle šedá pole) jsou všechny reprezentovatelné částky.

V pravé dolní části tabulky (tmavě šedá pole) tedy musí být všechny nereprezentovatelné částky. Největší nereprezentovatelná částka menší než ab se nachází v pravém

$u \backslash v$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	5	10	15	20	25	30	35	40
1	9	14	19	24	29	34	39	44	4
2	18	23	28	33	38	43	3	8	13
3	27	32	37	42	2	7	12	17	22
4	36	41	1	6	11	16	21	26	31

Tab. 2. Reprezentovatelné a nereprezentovatelné částky pro hodnoty $a = 5$, $b = 9$

dolním rohu. Je jí hodnota 31. Mezi 31 a $ab = 45$ je 14 reprezentovatelných částek. Přičtením vhodného násobku pěti k nějaké z nich tak můžeme reprezentovat libovolnou částku vyšší než 45.

Nyní zopakujeme tento postup pro libovolný systém mincí o nesoudělných hodnotách a, b.

Definice 10. Nechť $a, b \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla. Uvažujme matici o a řádcích a b sloupcích, kde pro čísla $u, v \in \mathbb{N}_0$ taková, že $u < a$ a $v < b$, je prvek matice v u-tém řádku a v-tém sloupci roven

$$\begin{cases} u \cdot b + v \cdot a & \text{pro } u \cdot b + v \cdot a < ab, \\ u \cdot b + v \cdot a - ab & \text{pro } u \cdot b + v \cdot a \geq ab. \end{cases}$$

Tuto matici budeme označovat $A^*_{a,b}$. Hodnotu v jejím u-tém řádku a v-tém sloupci budeme značit $A^*_{a,b}(u, v)$.

Matice $A^*_{a,b}$ odpovídá obsahu tabulky 2.

Věta 11. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná, pak jsou v matici $A^*_{a,b}$ všechna čísla různá.*

Důkaz. Z věty 8 plyne, že v matici $A_{a,b}$ bez posledního řádku a sloupce jsou všechna čísla různá.

Na pozicích (u, v), kde $ub + va < ab$, se matice $A^*_{a,b}$ od $A_{a,b}$ neliší. Žádná dvojice čísel z této části proto není stejná.

Na pozicích (u, v), kde $ub + va \geq ab$, je v matici $A^*_{a,b}$ hodnota

$$ub + va - ab = A_{a,b}(u, v) - ab.$$

Žádná dvojice čísel z této části proto také není stejná.

Zbývá zjistit, jestli nemůže existovat číslo z první části stejné jako číslo z druhé části. Takové číslo n by muselo být v první části na pozici (u_1, v_1) s reprezentací

$$n = u_1 b + v_1 a.$$

Zároveň by muselo být na pozici (u_2, v_2) v druhé části s reprezentací

$$n = u_2 b + v_2 a - ab.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme:

$$(v_1 - v_2 + b)a = (u_2 - u_1)b. \tag{4}$$

Vidíme, že a dělí $(u_2 - u_1)b$. Protože a, b jsou nesoudělná, a dělí $u_2 - u_1$, řádkové indexy u_1 a u_2 se tedy liší o násobek a. Protože matice $A^*_{a,b}$ má $a - 1$ řádků, musí být tento násobek roven 0, je tedy $u_1 = u_2$.

Z rovnosti (4) také vidíme, že b dělí $(v_1 - v_2 + b)a$. Protože a, b jsou nesoudělná, tak b dělí $v_1 - v_2 + b$. Odtud b dělí $v_1 - v_2$, sloupcové indexy v_1 a v_2 se tedy liší o násobek b. Protože matice $A^*_{a,b}$ má $b - 1$ sloupců, musí být tento násobek roven 0, v_1 a v_2 jsou proto stejné.

Oba prvky rovné témuž číslu n tedy leží v matici $A^*_{a,b}$ na stejné pozici, což je však ve sporu s předpokladem, že leží v různých částech matice. V matici $A^*_{a,b}$ proto nejsou dvě stejná čísla. $\square$

Matice $A^*_{a,b}$ obsahuje ab čísel. Všechna jsou menší než ab. Podle věty 11 jsou navíc všechna čísla v matici různá. Matice $A^*_{a,b}$ proto obsahuje všechny reprezentovatelné i nereprezentovatelné částky menší než ab.

Věta 12. *Mějme $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná. Částka na pozici (u, v) v matici $A^*_{a,b}$ je reprezentovatelná právě tehdy, když platí*

$$ub + va < ab.$$

Důkaz. Na pozici (u, v) takové, že $ub + va < ab$, je částka $ub + va$, je proto reprezentovatelná.

Ukážeme naopak, že žádná částka na pozici (u, v) splňující $ub + va \geq ab$ není reprezentovatelná. Matice $A_{a,b}$ obsahovala všechny reprezentovatelné částky menší než ab. Odebráním posledního řádku a sloupce jsme žádnou z nich neodstranili. Odečtením ab od hodnot $ub + va \geq ab$ jsme částky menší než ab nijak nezměnili. Matice $A^*_{a,b}$ proto stále obsahuje všechny reprezentovatelné částky menší než ab.

Podle věty 11 jsou navíc v matici $A^*_{a,b}$ všechny hodnoty různé. Na pozicích (u, v), kde $ub + va \geq ab$, proto nemůže být reprezentovatelná částka. $\square$

Věta 13. *V systému mincí o nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$ je největší nereprezentovatelná částka menší než ab rovna*

$$ab - a - b.$$

Důkaz. Největší nereprezentovatelná částka menší než ab je v pravém dolním rohu matice $A^*_{a,b}$, tedy na pozici $(a - 1, b - 1)$. Její hodnota je

$$A^*_{a,b}(a - 1, b - 1) = (a - 1)b + (b - 1)a - ab = ab - a - b. \qquad \square$$

Nyní jsme se dostali do stejné situace jako v předchozí části. Našli jsme řešení s omezením na částky menší než ab. Ve větě 3 jsme už dokázali, že všechny větší částky jsou reprezentovatelné. Pro zajímavost to dokážeme ještě jednou použitím poznatků z této části.

Věta 14. *V systému mincí o nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$ jsou všechny částky větší nebo rovné ab reprezentovatelné.*

Důkaz. Mezi největší nereprezentovatelnou částkou $ab - a - b$ a ab je $a + b - 1$ reprezentovatelných částek. Přičtením vhodného násobku čísla b k některé z nich získáme reprezentaci libovolné částky větší nebo rovné ab. $\square$

Příklad 15. Ve dvoumincovém systému mincí o hodnotách a, b, kde $a < b$, je 35 nereprezentovatelných částek, z nichž jedna je 58. Jaké jsou hodnoty a, b? [3, kap. 13]

Řešení. Hodnoty a, b jsou nesoudělné. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovalo nekonečně mnoho nereprezentovatelných částek. Dále víme, že

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2} = 35, \tag{5}$$

tedy $(a-1)(b-1) = 70$.

Hledáme tedy čísla $k, l \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $kl = 70$ a $k < l$. Řešením úlohy je dvojice (a, b) taková, že $a = k + 1$ a $b = l + 1$, a, b jsou nesoudělná a částka 58 není reprezentovatelná v systému mincí o hodnotách a, b.

Číslo 70 můžeme rozložit na součin dvou přirozených čísel pomocí rozkladu na součin prvočísel:

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Všechny dvojice přirozených čísel (a, b), pro které platí rovnice (5) a $a < b$, jsou tedy: $(2, 71), (3, 36)$, $(6, 15)$ a $(8, 11)$.

Dvojice $(3, 36)$ a $(6, 15)$ vyřadíme, neboť jde o dvojice soudělných čísel. Dvojici $(2, 71)$ vyřadíme, neboť $58 = 2 \cdot 29$, částka 58 je tedy reprezentovatelná.

V reprezentaci částky 58 v systému $(8, 11)$ musíme použít sudý počet mincí 11, neboť jde o sudou částku. Rozborem všech možností zjistíme, že částka 58 je v systému $(8, 11)$ nereprezentovatelná. Dvojice $(8, 11)$ proto splňuje všechny požadavky a jediným řešením je $a = 8$ a $b = 11$.

4. Metoda vytvořujících funkcí

V této části pomocí metody vytvořujících funkcí vyřešíme následující obecný problém: Pro libovolnou částku n zjistíme, kolika způsoby ji lze reprezentovat v systému dvou mincí. Jako důsledky pak opět získáme vzorce pro počet nereprezentovatelných částek a hodnotu největší z nich. Čerpáme přitom z [1, kap. 1].

Připomeňme, že vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je mocninná řada definovaná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pro systémy s jedinou mincí je zjištění posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ počtu způsobů reprezentace částky n jednoduché. Posloupnost počtu způsobů, jak reprezentovat částky například pro systém s jedinou mincí o hodnotě 3, je

$$(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots).$$

První jednička (nultý člen) přitom vyjadřuje, že částku 0 lze složit jediným způsobem. Obecně pro systémy s jedinou mincí o hodnotě c bude pro posloupnost počtu způsobů reprezentace $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ platit

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{pokud } c \text{ dělí } n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vytvořující funkce této posloupnosti je

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^{ic} = \frac{1}{1-x^c}.$$

Mějme systém mincí o nesoudělných hodnotách a, b. Posloupnost počtu reprezentací částek pro tento systém mincí označíme $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. K nalezení členů této posloupnosti využijeme součin vytvořujících funkcí posloupností jednomincových systémů s mincemi o hodnotách a, b.

Označíme $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost počtu reprezentací částek v jednomincovém systému a. Analogicky označíme $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost počtu reprezentací částek v jednomincovém systému b. Počet způsobů, jak reprezentovat částku n ve dvoumincovém systému a, b je potom

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

To odpovídá koeficientu u x^n v součinu vytvořujících funkcí obou jednomincových systémů. Platí tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)}.$$

Nyní budeme hledat jednodušší vyjádření koeficientů $c_0, c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{N}_0$.

Nechť $p \in \mathbb{N}_0$ je libovolné pevně zvolené číslo. Hledání koeficientu c_p můžeme zjednodušit tak, že budeme hledat konstantní člen rozvoje funkce

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)x^p} = \frac{c_0}{x^p} + \frac{c_1}{x^{p-1}} + \cdots + c_p + c_{p+1}x + c_{p+2}x^2 + \ldots.$$

Začneme rozkladem na parciální zlomky. K nalezení rozkladu funkce f potřebujeme nejprve najít všechny kořeny polynomu $(1-x^a)(1-x^b)x^p$ v oboru komplexních čísel.

Kořeny polynomu $1-x^q$ jsou všechny q-té odmocniny z 1, tedy komplexní čísla $1, \xi_q, \xi_q^2, \ldots, \xi_q^{q-1}$, kde

$$\xi_q = \cos\frac{2\pi}{q} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{q}. \tag{6}$$

Všechny kořeny polynomu $(1-x^a)(1-x^b)x^p$ a jejich násobnosti jsou tedy

- kořen $x = 0$ s násobností p,
- kořen $x = 1$ s násobností 2,
- kořeny $\xi_a, \xi_a^2, \ldots, \xi_a^{a-1}$ s násobností 1,
- kořeny $\xi_b, \xi_b^2, \ldots, \xi_b^{b-1}$ s násobností 1.

Kořeny ξ_a^k a ξ_b^l jsou pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, a-1\}$ a $l \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$ různé, protože a a b jsou nesoudělná čísla.

Pro nalezení rozkladu funkce f na parciální zlomky hledáme konstanty

$$A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, C_1, C_2, \ldots, C_{a-1}, D_1, D_2, \ldots, D_{b-1}$$

takové, že

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)x^p} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_p}{x^p} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \\ + \frac{C_1}{x-\xi_a} + \frac{C_2}{x-\xi_a^2} + \dots + \frac{C_{a-1}}{x-\xi_a^{a-1}} + \\ + \frac{D_1}{x-\xi_b} + \frac{D_2}{x-\xi_b^2} + \dots + \frac{D_{b-1}}{x-\xi_b^{b-1}}.\end{aligned} \tag{7}$$

Z rozvoje funkce f plyne, že platí $A_1 = c_{p-1}, A_2 = c_{p-2}, \dots, A_p = c_0$. Uvidíme, že pro nalezení c_p nejsou hodnoty těchto konstant podstatné.

Najdeme konstantu B_2. Obě strany rovnosti (7) vynásobíme výrazem $(x-1)^2$, čímž získáme

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{(1-x^a)(1-x^b)x^p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k(x-1)^2}{x^k} + B_1(x-1) + B_2 + \\ + \sum_{k=1}^{a-1} \frac{C_k(x-1)^2}{x-\xi_a^k} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{D_k(x-1)^2}{x-\xi_b^k}.\end{aligned}$$

Limita pravé strany pro x jdoucí k 1 je B_2. Platí proto

$$\begin{aligned}B_2 &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(1-x^a)(1-x^b)x^p} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(1-x)(1+x+\dots+x^{a-1})(1-x)(1+x+\dots+x^{b-1})x^p} = \frac{1}{ab}.\end{aligned}$$

Konstantu B_1 získáme podobným způsobem. Obě strany rovnice (7) vynásobíme $x-1$, čímž získáme

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{(1-x^a)(1-x^b)x^p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k(x-1)}{x^k} + B_1 + \frac{B_2}{x-1} + \\ + \sum_{k=1}^{a-1} \frac{C_k(x-1)}{x-\xi_a^k} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{D_k(x-1)}{x-\xi_b^k}.\end{aligned}$$

Po odečtení $B_2/(x-1)$ od obou stran rovnosti je limita pravé strany pro x jdoucí k 1 rovna B_1. Platí proto

$$\begin{aligned}B_1 &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(1-x^a)(1-x^b)x^p} - \frac{\frac{1}{ab}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 - \frac{1}{ab}(1-x^a)(1-x^b)x^p}{(1-x^a)(1-x^b)(x-1)x^p} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 - \frac{1}{ab}(1-x)(1+x+\dots+x^{a-1})(1-x)(1+x+\dots+x^{b-1})x^p}{(1-x)\underbrace{(1+x+\dots+x^{a-1})}_{\to a}(1-x)\underbrace{(1+x+\dots+x^{b-1})}_{\to b}(x-1)\underbrace{x^p}_{\to 1}}.\end{aligned}$$

Zkrátíme $(x-1)^2$ a pomocí pravidel pro počítání limit získáme

$$B_1 = \frac{-1}{ab} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{ab}(1+x+\dots+x^{a-1})(1+x+\dots+x^{b-1})x^p - 1}{x-1}.$$

Definujme funkci h předpisem

$$h(x) = \frac{1}{ab}(1 + x + \dots + x^{a-1})(1 + x + \dots + x^{b-1})x^p.$$

Platí $h(1) = 1$, tedy

$$B_1 = \frac{-1}{ab} \lim_{x \to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{-1}{ab} h'(1).$$

Vypočítáme derivaci funkce h podle pravidla o derivování součinu:

$$\begin{aligned} h'(x) = \frac{1}{ab}\big[&(1 + 2x + 3x^2 + \dots + (a-1)x^{a-2})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{b-1})x^p + \\ &+ (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{a-1})(1 + 2x + 3x^2 + \dots + (b-1)x^{b-2})x^p + \\ &+ (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{a-1})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{b-1})px^{p-1}\big]. \end{aligned}$$

Hodnota B_1 je tedy

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-1}{ab}\left(\frac{(1 + 2 + \dots + (a-1))b}{ab} + \frac{a(1 + 2 + \dots + (b-1))}{ab} + \frac{abp}{ab}\right) = \\ &= \frac{-1}{ab}\left(\frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} + p\right) = \frac{1}{ab} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} - \frac{p}{ab}. \end{aligned}$$

Koeficienty $C_1, \dots, C_{a-1}$ získáme analogicky. Budeme hledat koeficient C_l. Vynásobením obou stran rovnosti (7) výrazem $x - \xi_a^l$ získáme

$$\begin{aligned} \frac{x - \xi_a^l}{(1 - x^a)(1 - x^b)x^p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{A_k(x - \xi_a^l)}{x^k} + \frac{B_1(x - \xi_a^l)}{x - 1} + \frac{B_2(x - \xi_a^l)}{(x-1)^2} + \\ + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{C_k(x - \xi_a^l)}{x - \xi_a^k} + C_l + \sum_{k=l+1}^{a-1} \frac{C_k(x - \xi_a^l)}{x - \xi_a^k} + \sum_{k=1}^{b-1} \frac{D_k(x - \xi_a^l)}{x - \xi_b^k}. \end{aligned}$$

Limita pravé strany pro x jdoucí k ξ_a^l je C_l. Platí proto

$$C_l = \lim_{x \to \xi_a^l} \frac{x - \xi_a^l}{(1 - x^a)(1 - x^b)x^p} = \frac{1}{\xi_a^{lp}(1 - \xi_a^{lb})} \lim_{x \to \xi_a^l} \frac{x - \xi_a^l}{1 - x^a} \overset{\text{l'H}}{=} \frac{1}{\xi_a^{lp}(1 - \xi_a^{lb})} \frac{-1}{a\xi_a^{l(a-1)}}.$$

V posledním kroku výpočtu jsme použili l'Hospitalovo pravidlo. Platí, že $\xi_a^a = 1$, neboť ξ_a je a-tá odmocnina z jedné. Proto

$$\xi_a^{lp}\xi_a^{l(a-1)} = \xi_a^{la}\xi_a^{lp-l} = \xi_a^{l(p-1)}.$$

Použitím popsaných úprav získáme

$$C_l = \frac{-1}{a\xi_a^{l(p-1)}(1 - \xi_a^{lb})}.$$

Stejným postupem zjistíme, že

$$D_l = \frac{-1}{b\xi_b^{l(p-1)}(1 - \xi_b^{la})}.$$

Uvažujme nyní funkci g definovanou předpisem

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{p+n} x^n.$$

Naším cílem je najít hodnotu $c_p = g(0)$. Pro $x \neq 0$ platí

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - \frac{c_0}{x^p} - \cdots - \frac{c_{p-1}}{x} &= \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \\ &+ \frac{C_1}{x-\xi_a} + \frac{C_2}{x-\xi_a^2} + \cdots + \frac{C_{a-1}}{x-\xi_a^{a-1}} + \\ &+ \frac{D_1}{x-\xi_b} + \frac{D_2}{x-\xi_b^2} + \cdots + \frac{D_{b-1}}{x-\xi_b^{b-1}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Funkce g je spojitá v bodě nula. Limitním přechodem pro $x \to 0$ tedy dospějeme k rovnosti

$$c_p = g(0) = -B_1 + B_2 - \frac{C_1}{\xi_a} - \frac{C_2}{\xi_a^2} - \cdots - \frac{C_{a-1}}{\xi_a^{a-1}} - \frac{D_1}{\xi_b} - \frac{D_2}{\xi_b^2} - \cdots - \frac{D_{b-1}}{\xi_b^{b-1}}.$$

Dosazením za konstanty B_i, C_j, D_k získáme

$$c_p = g(0) = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{p}{ab} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{\xi_a^{kp}(1-\xi_a^{kb})} + \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1}{\xi_b^{kp}(1-\xi_b^{ka})}. \tag{9}$$

Našli jsme výraz udávající počet způsobů reprezentace c_p částky p v systému s nesoudělnými hodnotami a, b.

Pokusíme se nalezený vzorec (9) dále zjednodušit. Začneme hledáním jednoduššího způsobu zápisu pro

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{\xi_a^{kp}(1-\xi_a^{kb})}. \tag{10}$$

Podíváme se na systém mincí o hodnotách a a 1. Počet způsobů, jak reprezentovat částku p, označíme c'_p. Každá reprezentace částky p použije k-krát minci o hodnotě a a zbytek částky doplní mincemi o hodnotě 1. Počet způsobů reprezentace p je tedy roven počtu možností, jak zvolit $k \in \mathbb{N}_0$, aby $ka < p$, a tedy i $k < p/a$. Proto platí

$$c'_p = \left\lfloor \frac{p}{a} \right\rfloor + 1. \tag{11}$$

Symbol $\lfloor x \rfloor$ přitom označuje dolní celou část $x \in \mathbb{R}$, tj. největší celé číslo menší nebo rovné x.

Počet způsobů reprezentace částky p můžeme získat také dosazením $b = 1$ do vztahu (9):

$$c'_p = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} + \frac{p}{a} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} \frac{1}{\xi_a^{kp}(1-\xi_a^{k})}. \tag{12}$$

Ze vztahů (11) a (12) vyjádříme

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{\xi_a^{kp}(1-\xi_a^k)} = -\left\{\frac{p}{a}\right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}. \tag{13}$$

Značení $\{x\}$ zde má význam desetinné části čísla x, tedy $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Hledaný výraz (10) stále není ve stejném tvaru jako (13). Předtím, než ho do podobného tvaru upravíme, dokážeme následující lemma.

Lemma 16. *Pro libovolnou funkci* $h_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *a nesoudělná čísla* $a, m \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\sum_{j=1}^{a-1} h_1(\xi_a^j) = \sum_{j=1}^{a-1} h_1(\xi_a^{jm}),$$

kde ξ_a *je dáno vztahem* (6).

Důkaz. Zobrazení $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ s předpisem $f(j) = \xi_a^{jm}$ má periodu a. Stačí proto dokázat, že

$$\{1, 2, \ldots, a-1\} = \{mj \pmod a; j \in \{1, 2, \ldots, a-1\}\}.$$

To plyne z nesoudělnosti a, m. □

Zavedeme funkci h předpisem

$$h(x) = \frac{1}{x^p(1-x^b)}.$$

Hledaný výraz (10) je pak roven

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} h(\xi_a^k).$$

Volme nyní $b' \in \mathbb{N}$ nejmenší takové, že $bb' \equiv 1 \pmod a$. Existence takového b' plyne z nesoudělnosti a, b a z Eulerovy věty [6, věta 3.10]. Čísla a, b' jsou navíc nesoudělná. Podle lemmatu 16 platí

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} h(\xi_a^k) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1} h(\xi_a^{kb'}) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{\xi_a^{kpb'}(1-\xi_a^k)}.$$

Použitím vztahu (13), kde místo p píšeme pb', získáme jednodušší vyjádření vztahu (10):

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{\xi_a^{kp}(1-\xi_a^{kb})} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{\xi_a^{kpb'}(1-\xi_a^k)} = -\left\{\frac{pb'}{a}\right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}. \tag{14}$$

Stejným způsobem můžeme zjednodušit druhou sumu z výrazu (9): zkoumáním systému mincí o hodnotách $1, b$ bychom došli k závěru, že

$$\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b-1}\frac{1}{\xi_b^{kp}(1-\xi_b^{ka})} = -\left\{\frac{pa'}{b}\right\} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2b}. \tag{15}$$

Dosazením získaných výrazů (14) a (15) do (9) obdržíme následující větu.

Věta 17. *Počet reprezentací částky p v systému mincí o nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$ je*

$$c_p = \frac{p}{ab} + 1 - \left\{\frac{pb'}{a}\right\} - \left\{\frac{pa'}{b}\right\},$$

kde a', b' jsou nejmenší přirozená čísla taková, že

$$\begin{aligned} aa' &\equiv 1 \pmod{b}, \\ bb' &\equiv 1 \pmod{a}. \end{aligned}$$

Příklad 18. Zjistěte počet reprezentací částky 42 v systému mincí o hodnotách 5 a 7.

Řešení. Příklad vyřešíme dvěma způsoby. Nejprve odhadneme řešení prostým zkoušením. Potom najdeme počet způsobů užitím věty 17.

Po krátkém zkoušení zjistíme, že částku 42 můžeme reprezentovat pomocí šesti mincí o hodnotě 7, nebo pomocí jedné mince o hodnotě 7 a sedmi mincí o hodnotě 5. Našli jsme tedy dva způsoby, jak částku reprezentovat.

Dalším zkoušením bychom jistě přišli i na to, že žádný jiný způsob reprezentace neexistuje. Ověříme tuto skutečnost ještě pomocí věty 17.

Víme, že $a = 5, b = 7$ a $p = 42$. Vypočítáme čísla a', b'. Podle Eulerovy věty platí

$$\begin{aligned} a' &\equiv a^{\varphi(b)-1} \pmod{b}, \\ b' &\equiv b^{\varphi(a)-1} \pmod{a}. \end{aligned}$$

Protože $\varphi(7) = 6$ a $\varphi(5) = 4$, dostáváme

$$\begin{aligned} a' &\equiv 5^5 \equiv 3 \pmod{7}, \\ b' &\equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Zbývá tedy dosadit do vzorce ve větě 17 a vypočítat výsledek:

$$\begin{aligned} c_{42} &= \frac{42}{35} + 1 - \left\{\frac{42 \cdot 3}{5}\right\} - \left\{\frac{42 \cdot 3}{7}\right\} = \\ &= \frac{42}{35} + 1 - \left\{\frac{126}{5}\right\} - \{6 \cdot 3\} = \frac{6}{5} + 1 - \frac{1}{5} - 0 = 2. \end{aligned}$$

Počet způsobů, jak reprezentovat částku 42, je roven 2.

Pomocí vzorce z věty 17 nyní zjistíme počet nereprezentovatelných částek a největší nereprezentovatelnou částku v systému mincí o dvou nesoudělných hodnotách a, b.

Nejprve najdeme největší nereprezentovatelnou částku. Vlastně znovu zformulujeme větu 13. Pro důkaz ale tentokrát použijeme poznatky z této kapitoly.

Věta 19. *V systému mincí o nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$ je největší nereprezentovatelná částka rovna*

$$ab - a - b.$$

Důkaz. Potřebujeme ukázat, že $ab-a-b$ není reprezentovatelná a že každá větší částka reprezentovatelná je. Pro počet reprezentací c_{ab-a-b} platí

$$c_{ab-a-b} = \frac{ab-a-b}{ab} + 1 - \left\{\frac{(ab-a-b)b'}{a}\right\} - \left\{\frac{(ab-a-b)a'}{b}\right\}.$$

Nejprve upravíme

$$\left\{\frac{(ab-a-b)b'}{a}\right\} = \left\{(b-1)b' - \frac{bb'}{a}\right\} = \left\{(b-1)b' - k - \frac{1}{a}\right\}.$$

Poslední rovnost využívá toho, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$ je $bb' = 1 + ka$. To vyplývá přímo ze zavedení b' pomocí kongruence. Dále si uvědomíme, že

$$\left\{(b-1)b' - k - \frac{1}{a}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{a}\right\} = 1 - \frac{1}{a}.$$

Po dosazení získáme

$$c_{ab-a-b} = \frac{ab-a-b}{ab} + 1 - 1 + \frac{1}{a} - 1 + \frac{1}{b} = 0.$$

Zbývá dokázat, že každá větší částka je reprezentovatelná, tedy že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_{ab-a-b+n} > 0$. Využijeme toho, že pro $m \in \mathbb{Z}$ platí

$$\left\{\frac{m}{a}\right\} \leq \frac{a-1}{a}.$$

Nyní odhadneme

$$c_{ab-a-b+n} \geq \frac{ab-a-b+n}{ab} + 1 - \frac{a-1}{a} - \frac{b-1}{b} = \frac{n}{ab} > 0. \qquad \square$$

Dále najdeme počet nereprezentovatelných částek v systému mincí o nesoudělných hodnotách a, b.

Lemma 20. *Mějme systém dvou mincí o nesoudělných hodnotách $a, b \in \mathbb{N}$ a číslo $n \in \{1, 2, \ldots, ab-1\}$, které není násobkem a ani b. Potom je právě jedna z částek n, $ab-n$ reprezentovatelná.*

Důkaz. Dokážeme, že součet počtů reprezentací čísel n a $ab-n$ je 1, tedy

$$c_n + c_{ab-n} = 1.$$

Budeme upravovat výraz c_{ab-n}:

$$\begin{aligned} c_{ab-n} &= \frac{ab-n}{ab} + 1 - \left\{\frac{(ab-n)b'}{a}\right\} - \left\{\frac{(ab-n)a'}{b}\right\} = \\ &= 2 - \frac{n}{ab} - \left\{bb' - \frac{nb'}{a}\right\} - \left\{aa' - \frac{na'}{b}\right\} = \\ &= 2 - \frac{n}{ab} - \left\{-\frac{nb'}{a}\right\} - \left\{-\frac{na'}{b}\right\} = \\ &= -\frac{n}{ab} + \left\{\frac{nb'}{a}\right\} + \left\{\frac{na'}{b}\right\} = 1 - c_n. \end{aligned}$$

Využili jsme skutečnosti, že pokud x není celé číslo, pak $1 - \{x\} = \{-x\}$. $\square$

Nyní zopakujeme větu 9 a dokážeme jí pomocí poznatků z této kapitoly.

Věta 21. *Jsou-li $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná, pak počet všech nereprezentovatelných částek menších než ab je*

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Důkaz. Všech částek $n \in \{1, 2, \ldots, ab-1\}$ je $ab - 1$. Z nich $a - 1$ je násobkem b a $b - 1$ je násobkem a. Z nesoudělnosti a a b plyne, že žádná z částek není společným násobkem a i b. Částek $n \in \{1, 2, \ldots, ab-1\}$, které nejsou násobkem a ani b, je proto

$$ab - 1 - (a-1) - (b-1) = a(b-1) - (b-1) = (a-1)(b-1).$$

Podle lemmatu 20 je právě polovina z nich nereprezentovatelná. □

5. Závěr

Dokázali jsme, že v systému mincí o dvou nesoudělných hodnotách a, b je Frobeniovo číslo $ab - a - b$. Počet všech nereprezentovatelných částek je roven

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Tuto skutečnost jsme odvodili několika způsoby.

Podobné otázky má smysl řešit také ve vícemincových systémech. V diplomové práci autora [2], ze které tento článek vychází, popisujeme například algoritmus nalezení Frobeniova čísla nebo algoritmus pro zjištění počtu reprezentací částky v obecných systémech.

Poděkování. Rád bych poděkoval doc. Antonínu Slavíkovi za cenné připomínky a rady při vypracovávání diplomové práce, ze které tento článek vychází.

L i t e r a t u r a

[1] Beck, M., Robins, S.: *Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra.* Springer, New York, 2007.

[2] Hamáček, J.: *Kombinatorické úlohy o mincích.* Diplomová práce. MFF UK, Praha, 2016. Dostupné z: `http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/jan_hamacek_dp/ulohy-o-mincich.pdf`

[3] Honsberger, R.: *Mathematical gems II.* The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1976.

[4] Michael, T.: *How to guard an art gallery and other discrete mathematical adventures.* Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2009.

[5] Petković, M.: *Famous puzzles of great mathematicians.* American Mathematical Society, Providence, 2009.

[6] Stanovský, D.: *Základy algebry.* MatfyzPress, Praha, 2010.