Naše soutěž

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 91 (2016), No. 4, 57–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/146693

NAŠE SOUTĚŽ

Předkládáme další dvě úlohy *Naší soutěže*. Můžete je vyřešit a řešení poslat na adresu redakce. Řešení může být v elektronické či papírové podobě. Redakce řešení opraví a opravené vám je zašle zpět. V některém z následujících čísel pak najdete úlohy vyřešené. Za řešení každé úlohy můžete získat až 5 bodů.

Soutěž je kontinuální, což znamená, že se výsledky jednotlivých řešitelů sčítají a vede se průběžná výsledková listina (za minulé i letošní ročník dohromady). V listině se nerozlišují úlohy matematické a fyzikální. Nejlepším řešitelům bude každým rokem zaslána odborná literatura.

Nyní předkládáme dvě úlohy, jejichž řešení pošlete do *31. března 2017* na adresu redakce.

Úloha 59. Pro nezáporné celé n definujeme $f(n)$ jako číslo, jehož binární zápis vznikne tak, že nejprve zapíšeme binárně číslo n, a poté v něm nahradíme cifry 0 ciframi 1 a opačně (případně vzniklé cifry 0 na začátku ignorujeme). Například $n = 23$ má binární zápis 10111, takže binární zápis $f(n)$ je 1000, neboli $f(23) = 8$. Určete

$$\sum_{j=1}^{n} f^j(j),$$

kde $f^n(k)$ značí n-násobnou aplikaci funkce f na číslo k.

(*Martin Panák*)

Úloha 60. *Ledová kra*

Ledová kra má tvar desky všude stejné tloušťky. Kra plave na vodní hladině jezera, její tloušťka je $h = 0{,}3$ m, plošný obsah jedné vodorovné stěny je 5 m^2. Hustota vody je $\varrho_1 = 1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, hustota ledu je $\varrho_2 = 920\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

a) Určete, v jaké vzdálenosti x_1 od vodní hladiny je horní podstava kry.
b) Na kru položíme těleso o hmotnosti $M_1 = 50$ kg tak, aby kra zůstala ve vodorovné poloze. Jak se v tomto případě změní vzdálenost horní podstavy kry od vodní hladiny?

c) Určete maximální hmotnost M_2 tělesa, které by kra ještě unesla.

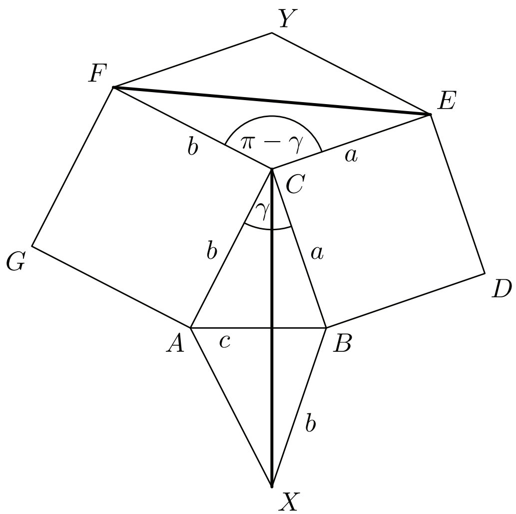
(*Miroslava Jarešová*)

Řešení úloh z čísla 1/2016

Úloha 53. Vně nad stranami BC a AC trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $CBDE$ a $ACFG$. Dokažte, že délka úsečky EF je rovna dvojnásobku velikosti těžnice příslušné vrcholu C trojúhelníku ABC.

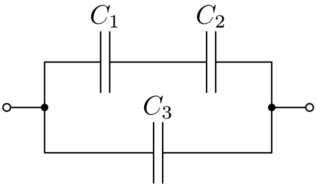
(*Jaroslav Zhouf*)

Řešení: Podle obrázku vytvoříme rovnoběžníky $AXBC$ a $CEYF$. Je-li $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, je $|\sphericalangle FCE| = \pi - \gamma$ a $|\sphericalangle CEY| = \gamma$, a tudíž jsou tyto rovnoběžníky shodné podle věty *sus*. Proto je $|CX| = |EF|$, což se mělo dokázat.



Úloha 54. *Kondenzátory*

Na obrázku je znázorněno schéma zapojení kondenzátorů. Celková kapacita soustavy je $C = 2{,}6\,\mu\mathrm{F}$, kapacita prvního kondenzátoru je $C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}$. Dojde-li k probití kondenzátoru C_2, vzroste celková kapacita soustavy na $C' = 3\,\mu\mathrm{F}$. Určete kapacity kondenzátorů C_2, C_3. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.



(*Miroslava Jarešová*)

Autorské řešení:

Jsou-li všechny kondenzátory funkční, platí pro výpočet celkové kapacity soustavy vztah

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3.$$

Dojde-li k probití kondenzátoru C_2, změní se celková kapacita soustavy na C' a platí

$$C' = C_1 + C_3.$$

Z posledního vztahu je možno vypočítat kapacitu $C_3 = C' - C_1$ a dosadit do vztahu pro C, takže

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C' - C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} + C' - C_1.$$

Z tohoto vztahu nyní vyjádříme níže uvedeným postupem kapacitu C_2:

$$C - C' + C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C - C' + C_1} - \frac{1}{C_1}$$

$$C_2 = \frac{C_1(C - C' + C_1)}{C' - C}$$

Pro dané hodnoty:

$$C_2 = \frac{C_1(C - C' + C_1)}{C' - C} = \frac{1 \cdot (2{,}6 - 3 + 1)}{3 - 2{,}6}\ \mu\mathrm{F} = 1{,}5\ \mu\mathrm{F}$$

$$C_3 = C' - C_1 = (3 - 1)\ \mu\mathrm{F} = 2\ \mu\mathrm{F}$$

Stav soutěže po 54 soutěžních úlohách

Michal Zelina (GChD, Zborovská, Praha 5) – 44 bodů
Zuzana Procházková (GChD, Zborovská, Praha 5) – 34 bodů
Matyáš Grof (GChD, Zborovská, Praha 5) – 33 bodů
Stanislav Boula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 32 bodů
Daniel Pišťák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 31 bodů
Anna Zavadilová (Masarykovo G, Říčany) – 29 bodů
Daniel Borák (GChD, Zborovská, Praha 5) – 26 bodů
Martin Bucháček (G Luďka Pika, Plzeň) – 26 bodů
Ondřej Havelka (G, Trutnov) – 26 bodů
Vladimír Boček (GChD, Zborovská, Praha 5) – 25 bodů
Martin Raszyk (G, Karviná) – 20 bodů
Jiří Braný (GChD, Zborovská, Praha 5) – 18 bodů
Michal Řepík (PedF UK, Praha 1) – 17 bodů
Marian Poljak (G, Přerov) – 15 bodů
Michal Buráň (G, Uherský Brod) – 13 bodů
Jan Bien (GChD, Zborovská, Praha 5) – 12 bodů
Ondřej Somič (SPŠ stavební, Opava) – 12 bodů
Oskar Marelja (GChD, Zborovská, Praha 5) – 11 bodů
Jan Kučera (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
Tadeáš Kučera (G, kpt. Jaroše, Brno) – 10 bodů
Ondřej Motlíček (G, Šumperk) – 10 bodů
Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba) – 10 bodů
Ester Sgallová (GChD, Zborovská, Praha 5) – 10 bodů
David Bainak (G, kpt. Jaroše, Brno) – 9 bodů
Libor Drozek (G, Holešov) – 9 bodů
Vilém Sklenář (GChD Zborovská, Praha 5) – 9 bodů
Ondřej Kincl (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 7,5 bodu
Adam Láf (GChD, Zborovská, Praha 5) – 7 bodů
Tomáš Pavlín (G, Parléřova, Praha 6) – 7 bodů
Le Anh Dung (G, Tachov) – 5 bodů
Veronika Hladíková (G, Radotín, Praha 5) – 5 bodů
Pavel Hudec (GJGH, Truhlářská, Praha 1) – 5 bodů
Mark Karpilovský (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Jan Kmínek (G, Jateční, Ústí nad Labem) – 5 bodů
Jan Krejčí (G, Bílovec) – 5 bodů
Jakub Löwit (G, Českolipská, Praha 9) – 5 bodů
Jan Mikal (G, Rožnov pod Radhoštěm) – 5 bodů
Josef Svoboda (G, Frýdlant nad Ostravicí) – 5 bodů
Martin Sýkora (G, Nad Alejí, Praha 6) – 5 bodů
Štěpán Šimsa (G, Litoměřice) – 5 bodů
Radovan Švarc (G, Česká Třebová) – 5 bodů
Dominik Teiml (The English College, Praha 9) – 5 bodů
Jakub Vančura (G, kpt. Jaroše, Brno) – 5 bodů
Martin Zimen (G, Jihlava) – 5 bodů
Martina Chamrová (G Oty Pavla, Praha 5 Radotín) – 4,5 bodu
Jiří Guth (G, Jírovcova, České Budějovice) – 3 body
Stanislav Taborovec (GChD, Zborovská, Praha 5) – 3 body
Matěj Kukula (GChD, Zborovská, Praha 5) – 2 body
Stanislav Gackowski (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 bod
Václav Skála (G, Klatovy) – 1 bod
Jan Soukup (G, Klatovy) – 1 bod
Tomáš Vajda (GChD, Zborovská, Praha 5) – 1 bod